Задачник С4

Здесь приведены задачи С4, которые предлагались на ЕГЭ по математике, а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с сентября 2009 года.

1. (*МИОО, 2013*) Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.
а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.
б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

$\boxed{60^\circ}$

2. (*МИОО, 2013*) В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = R$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

$\boxed{40}$

3. (*ЕГЭ, 2013*) Радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно 2 и 9. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой O_1O_2, если $O_1O_2 = 21$.

$\boxed{8 \text{ или } 80}$

4. (*ЕГЭ, 2013*) Угол C треугольника ABC равен 30°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $BD : DC = 1 : 6$. Найдите синус угла A.

$\boxed{\frac{5\sqrt{13}}{26} \text{ или } \frac{7\sqrt{13}}{26}}$

5. (*ЕГЭ, 2013*) В окружности проведены хорды PQ и CD, причем $PQ = PD = CD = 12$, $CQ = 4$. Найдите CP.

$\boxed{4\sqrt{6} \text{ или } 8\sqrt{3}}$

6. (*ЕГЭ, 2013*) Окружности радиусов 1 и 4 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C. AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$. Найдите AB.

$\boxed{5 \text{ или } 7}$

7. (*ЕГЭ, 2013*) Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15^\circ$.

$\boxed{10 \text{ или } 5/2}$

8. (*ЕГЭ, 2013*) Окружность радиуса 6 вписана в угол, равный $60°$. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 4. Найдите MN.

$3\sqrt{7}$ или $3\sqrt{15}$

9. (*ЕГЭ, 2013*) Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите MN.

$4\sqrt{2}$ или $4\sqrt{14}$

10. (*ФЦТ, 2013*) Две стороны треугольника равны 8 и 10, косинус угла между ними равен $2/5$. В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

5 или $\frac{40}{9}$

11. (*МИОО, 2013*) Расстояния от точки M, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 4 и 3. Через точку M проведена прямая, отсекающая от угла треугольник, площадь которого равна 32. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри угла.

$4\sqrt{17}$ или $\frac{4\sqrt{97}}{3}$

12. (*МИОО, 2013*) Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB.

13 или 20

13. (*МИОО, 2012*) Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.

26 или $24\sqrt{2}$

14. (*МИОО, 2012*) Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 11$, $MN = 8$. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 4 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

5 или $37/3$

15. (*ЕГЭ, 2012*) Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 10 и 26 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 24. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

2 или 6

16. (*ЕГЭ, 2012*) Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной 4 и углом 120°. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

$\boxed{\sqrt{3}-1 \text{ или } \frac{3-\sqrt{3}}{2}}$

17. (*ЕГЭ, 2012*) В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

$\boxed{7 \text{ или } 14/9}$

18. (*ЕГЭ, 2012*) Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной $14\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников AOB, COD и EOF.

$\boxed{28 \text{ или } 12}$

19. (*ЕГЭ, 2012*) Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 8$, $AF = 3$, угол BAC равен 45°.

$\boxed{\frac{11}{\sqrt{2}}}$

20. (*ЕГЭ, 2012*) Угол C треугольника ABC равен 30°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 2 : 5$. Найдите синус угла A.

$\boxed{\frac{7\sqrt{111}}{74} \text{ или } \frac{3\sqrt{111}}{74}}$

21. (*ЕГЭ, 2012*) На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE, если $BC = 6$, $AC = 4$.

$\boxed{2{,}4 \text{ или } 21{,}6}$

22. (*МИОО, 2012*) Площадь трапеции $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

$\boxed{15/4 \text{ или } 12/5}$

23. (*МИОО, 2012*) Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 15$, $AC = 9$ и $BC = 12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD — точка O, причём $CD = 4$ и $AO = 3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

$\boxed{7{,}5 \text{ или } 7{,}2}$

24. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2012*) Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 24. На одной из них взята точка C, а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 25. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

625/48 или 125/8

25. (*Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2012*) Дан треугольник ABC. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE, площадь которого равна 14, — равнобедренный с основанием AE и высотой BD. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{24}{7}$.

25 или 39

26. (*Федеральный центр тестирования, 2012*) Радиусы окружностей S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 равны 1 и 7 соответственно, расстояние между точками O_1 и O_2 равно 5. Хорда AB окружности S_2 касается окружности S_1 в точке M, причём точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину отрезка AB, если известно, что $AM : MB = 1 : 6$.

$7\sqrt{3}$ или $7\sqrt{143}/6$

27. (*Юг, пробный ЕГЭ, 2012*) Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 150 см, косинус угла при его основании равен 7/8. Найдите радиус окружности, касающейся вписанной окружности этого треугольника и двух его сторон.

10 см или 90 см

28. (*МИОО, 2011*) Расстояние между параллельными прямыми равно 6. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 16$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

$\frac{\sqrt{730}}{3}$ или $\frac{\sqrt{10}}{3}$

29. (*МИОО, 2011*) Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удалённая от точек A, M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

$54 \pm 12\sqrt{13}$

30. (*МИОО, 2011*) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 8$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

$\frac{51}{8}$ или $\frac{85}{8}$

31. (*МИОО, 2011*) Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно 15/8.

25 или 32

32. (*ЕГЭ, 2011*) Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 36, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 9$. Найдите сторону AB.

$\boxed{10 \text{ или } 17}$

33. (*ЕГЭ, 2011*) Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $5/6$.

$\boxed{9/2 \text{ или } 21/4}$

34. (*ЕГЭ, 2011*) Дана окружность радиуса 4 с центром в точке O, расположенной на биссектрисе угла, равного $60°$. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности внешним образом, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

$\boxed{2 \text{ или } 14}$

35. (*ЕГЭ, 2011*) Окружность радиуса 6 вписана в равнобедренную трапецию, большее основание которой равно 18. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

$\boxed{1/2 \text{ или } 162/299}$

36. (*ЕГЭ, 2011*) Точки A, B и C лежат на сторонах соответственно KL, LM и KM треугольника KLM, причём $KABC$ — параллелограмм, площадь которого составляет $3/8$ площади треугольника KLM. Найдите диагональ AC параллелограмма, если известно, что $KL = 8$, $KM = 12$ и $\cos\angle LKM = 7/12$.

$\boxed{8 \text{ или } 2\sqrt{6}}$

37. (*ЕГЭ, 2011*) Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $1:2$. Найдите отношение $CK : KF$.

$\boxed{2 \text{ или } 3/5}$

38. (*ЕГЭ, 2011*) Расстояния от точки M, расположенной внутри угла, равного $60°$, до сторон угла равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот угол и проходящей через точку M.

$\boxed{2 \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}}$

39. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2011*) Найти радиус окружности, вписанной в угол MKN, равный $2\arcsin 0{,}6$, и касающейся окружности радиуса 4, также вписанной в угол MKN.

$\boxed{1 \text{ или } 16}$

40. (*Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2011*) Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые AB и DC пересекаются в точке M. Найдите площадь четырёхугольника, если известно, что $\angle AMD = \alpha$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники BMC и AMD, равны соответственно r и R.

$\boxed{\frac{R(R^2-r^2)}{r}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \text{ или } \frac{r(r^2-R^2)}{R}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$

41. (*МИОО, 2011*) Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

$\boxed{\frac{\sqrt{793}}{3} \text{ или } \frac{4\sqrt{13}}{3}}$

42. (*МИОО, 2011*) Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

$\boxed{16 \text{ или } 48}$

43. (*МИОО, 2011*) Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.

$\boxed{10 \text{ или } 4}$

44. (*МИОО, 2010*) Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 5$, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

$\boxed{\frac{35\sqrt{3}}{12} \text{ или } \frac{23\sqrt{3}}{6}}$

45. (*МИОО, 2010*) Растояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причём треугольник ABC — остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

$\boxed{\frac{26-4\sqrt{13}}{3} \text{ или } 10/3}$

46. (*МИОО, 2010*) Окружность S радиуса 12 вписана в прямоугольную трапецию с основаниями 28 и 21. Найдите радиус окружности, которая касается основания, большей боковой стороны и окружности S.

$\boxed{3 \text{ или } 4/3}$

47. (*МИОО, 2010*) Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причём $AB = 8$, $CD = 15$. Найдите медиану CE треугольника ABC.

$\boxed{16 \text{ или } 1}$

48. (*МИОО, 2010*) В треугольнике KLM проведены биссектриса KP и высота KH. Известно, что $KM/KL = 1/2$, $PH/MH = 3/2$, а площадь треугольника KHP равна 30. Найдите площадь треугольника KLM.

30 или 150

49. (*ЕГЭ, 2010*) Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M лежит на диагонали BD и делит её в отношении $1:2$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырёхугольника $ABCM$ равна 60.

180 или 90

50. (*ЕГЭ, 2010*) Диагонали трапеции равны 5 и $\sqrt{20}$, а высота равна 4. Найдите площадь трапеции.

10 или 2

51. (*ЕГЭ, 2010*) В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда $AB = 8$. Точка C лежит на хорде AB так, что $AC : BC = 1 : 2$. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

8/9 или 32/9

52. (*ЕГЭ, 2010*) В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 5$ Найдите BC, если $AB = 3$.

7/2 или 21

53. (*ЕГЭ, 2010*) В треугольнике ABC $AB = 15$, $BC = 8$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 3 : 8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

7 или 53/11

54. (*ЕГЭ, 2010*) В окружность радиуса $3\sqrt{5}/2$ вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

$\frac{24+3\sqrt{29}}{14}$ или $\frac{24-3\sqrt{29}}{14}$

55. (*МИОО, 2010*) Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите её радиус.

125/32 или 125/8

56. (*МИОО, 2010*) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и внешним образом касающейся окружности S.

21/25 или 5

57. (*МИОО, 2010*) На стороне прямого угла с вершиной A взята точка O, причём $AO = 7$. С центром в точке O проведена окружность S радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

4 или 12

58. (*МИОО, 2010*) Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Обе окружности лежат по одну сторону от общей касательной. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей касательной. Найдите радиус третьей окружности.

225/64 или 225/16

59. (*МИОО, 2010*) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 13; высота, проведённая к стороне BC, равна 5; $\cos\angle BAC = 5/13$. Найдите длину той хорды AM описанной окружности, которая делится пополам стороной BC.

$\sqrt{26\left(13 \pm \sqrt{69}\right)} = \sqrt{299} \pm \sqrt{39}$

60. (*МИОО, 2010*) Центр O окружности радиуса 4 принадлежит биссектрисе угла величиной 60°. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

2; 14; 14/3; 6

61. (*МИОО, 2010*) Расстояния от общей хорды двух пересекающихся окружностей до их центров относятся как $2:5$. Общая хорда имеет длину $2\sqrt{3}$, а радиус одной из окружностей в два раза больше радиуса другой окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

7 или 3

62. (*МИОО, 2010*) Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BC = 7$, $BD = 3$.

5 или 2

63. (*МИОО, 2010*) В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE.

1 или 3

64. (*МИОО, 2010*) Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = 3/5$.

1 или 9

65. (*МИОО, 2010*) Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключённого между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

30 или 16

66. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2010*) Точка H — основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M. Найдите HM.

7/3 или 14/5

67. (*МИОО, 2009*) Точки D и E — основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведённых из вершин A и C соответственно. Известно, что $DE/AC = k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC.

$\sqrt{a^2+b^2\pm 2kab}$

68. (*МИОО, 2009*) В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

$\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\,|\operatorname{ctg}\alpha|$

69. (*МИОО, 2009*) Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

2 или 10

70. (*МИОО, 2009*) Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$; $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

5 или 30

71. (*МИОО, 2009*) В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?

1/10

72. (*МИОО, 2009*) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

$\sqrt{29/5}$