Задачник С5

Здесь приведены задачи С5, которые предлагались на ЕГЭ по математике, а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с сентября 2009 года.

1. (*ЕГЭ, 2013*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{7a}{a-5}\cdot 2^{|x|}=4^{|x|}+\frac{12a+17}{a-5}$$

имеет ровно два различных корня.

$\boxed{\{-170\}\cup(-2;5)}$

2. (*ЕГЭ, 2013*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2-10a+5\sqrt{x^2+25}=4|x-5a|-8|x|$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{\{-5\}\cup\left[15-10\sqrt{2};15+10\sqrt{2}\right]}$

3. (*ЕГЭ, 2013*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\sin^2 x+2\cos x+a\right|=\sin^2 x+\cos x-a$$

имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень.

$\boxed{(-\infty;0]\cup\left\{\frac{1}{4}\right\}}$

4. (*ЕГЭ, 2013*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2+(a+7)^2=|x-7-a|+|x+a+7|$$

имеет единственный корень.

$\boxed{-9;\ -5}$

5. (*ЕГЭ, 2013*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

имеет единственный корень.

$\boxed{\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)\cup\{0\}}$

6. (*ЕГЭ, 2013*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x - 3 - a)\cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{[-\infty; -6] \cup [0; +\infty)}$

7. (*ЕГЭ, 2013*) Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

$\boxed{[-\frac{5}{4}; -1) \cup (-1; 1]}$

8. (*ФЦТ, 2013*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|\cos x + 3\sin x + a| = a - 3\cos x - \sin x$$

имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

$\boxed{(-1; 1]}$

9. (*МИОО, 2013*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1 + x^2} + a(1 + x^2)}{1 + x^2 - 2\sqrt{1 + x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{(-\infty; 3) \cup [4; +\infty)}$

10. (*МИОО, 2013*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{(-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)}$

11. (*МИОО, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых на интервале $(1; 2)$ существует хотя бы одно число x, **не** удовлетворяющее неравенству $a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leqslant 3x - x^2$.

$\boxed{(3/2; +\infty)}$

12. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$$

выполняется при всех x.

$\boxed{(-1; 5)}$

13. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $1 \leqslant |x| \leqslant 3$ не меньше 6.

$\boxed{(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [7 + \sqrt{17}; +\infty)}$

14. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{2}{x+1} = a|x-3|$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет более двух корней.

$\boxed{(1/2; 2/3]}$

15. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

$\boxed{(6/5; 5/4)}$

16. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a-6; a]$.

$\boxed{\left[\frac{19-\sqrt{45}}{2}; \frac{7+\sqrt{69}}{2}\right]}$

17. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

$\boxed{[7/2; 25/7)}$

18. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

$\boxed{(0; 1)}$

19. (*МИОО, 2012*) При каких a уравнение $|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

$\boxed{0 \text{ или } 25/12}$

20. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2012*) При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня?

$\boxed{0;\ -1;\ \frac{-1+\sqrt{2}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{2}}{2}}$

21. (*Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y-2x)(2y-x) \leqslant 0, \\ \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2} = \dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$\boxed{1/2 \text{ или } -1/4}$

22. (*Федеральный центр тестирования, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{\left[\frac{1}{5};\ \frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{8}{15}\right\}}$

23. (*Юг, пробный ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + a = 4\cos x, \\ \sqrt{y} + z^2 = a, \\ (a-2)^2 = |z^2 - 2z| + |\sin 2x| + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

$\boxed{\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0; 0\right) \text{ при } a = 0, \text{ где } n \in \mathbb{Z};\ (2\pi k; 0; 2) \text{ при } a = 4, \text{ где } k \in \mathbb{Z}; \text{ при прочих } a \text{ решений нет}}$

24. (*МИОО, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$ больше, чем -24.

$\boxed{\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2};\ \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)}$

25. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (4a+5)x + 3a^2 + 5a < 0, \\ x^2 + a^2 = 25 \end{cases}$$

имеет решения.

$\boxed{\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\ -3\right) \cup \left(0;\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)}$

26. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=4, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{\sqrt{65}+2 \text{ или } 3}$

27. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2-8x=2|x-a|-16$$

имеет ровно три различных решения.

$\boxed{7/2;\ 4;\ 9/2}$

28. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-4)^2=9, \\ y=|x-a|+1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$\boxed{7-3\sqrt{2};\ 4;\ 1+3\sqrt{2}}$

29. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y=\sqrt{12+4x-x^2}+2, \\ y=\sqrt{16-a^2+2ax-x^2}+a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{[-2;2)\cup(2;6]}$

30. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-4)^2+(|y|-4)^2=4, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{\frac{6-\sqrt{21}}{6};\ \frac{10+\sqrt{37}}{6}}$

31. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+6|x|+7=5y+6x^2+4a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{7/4}$

32. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=b$$

существуют и принадлежат отрезку $[2; 17]$.

$[1; 3]$

33. (*Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4|y-3| = 12-3|x|, \\ y^2-a^2 = 3(2y-3)-x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

$(-4; -3) \cup \{-\frac{12}{5}\} \cup \{\frac{12}{5}\} \cup (3; 4)$

34. (*МИОО, 2011*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+2y+1| \leqslant 11, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2 = 2+a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$-2; 3$

35. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2+xy-4x-9y+20=0, \\ y=ax+1, \\ x>2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$(-1; 0] \cup [1; 3/2)$

36. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$||x^2-2x-3|-x^2+2x-5| \leqslant \frac{1}{3}\left(a^2-\frac{a}{2}\right)-x^2+2x+1$$

имеет единственное целое решение.

$(-3/2; 2)$

37. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2-7|x-a|-3x$ на отрезке $[-6; 6]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

$(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$

38. (*ЕГЭ, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$36^x - (8a+5)\cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

$\boxed{(-7/4;\, 1/2]}$

39. (*ЕГЭ, 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$ меньше 1.

$\boxed{\left(-\infty;\, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{6}}{2};\, +\infty\right)}$

40. (*ЕГЭ, 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2\left|x - a^2\right| - 6x$$

имеет более двух точек экстремума.

$\boxed{\left(-2;\, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};\, 2\right)}$

41. (*ЕГЭ, 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (5a+3)x + 4a^2 \leqslant 4$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 4 - a) \leqslant 0$.

$\boxed{-5/3,\, -3/2,\, -1,\, 1}$

42. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$$

есть ровно одно целое число.

$\boxed{(1;\, 11)}$

43. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\frac{10x - 2x^2 - a}{3}\right) - \cos(2x + a) = x^2 - 8x - a$$

имеет единственное решение.

$\boxed{-16}$

44. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a} - 4^{x^2 - 5x + 4a} = x^2 - 8x + a$$

не имеет действительных решений.

$\boxed{(16;\, +\infty)}$

45. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5 - x} + |x + a| \leqslant 3$ является отрезок.

$\boxed{(-8;\, -9/4] \cup (-2;\, 4)}$

46. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2010*) Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция

$$y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

-2

47. (*МИОО, 2009*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \geqslant 0, \\ x - 8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

$[1; 3]$

48. (*МИОО, 2009*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$$

имеет ровно восемь различных решений.

$(-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$

49. (*МИОО, 2009*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$3x + |2x + |a - x|| = 7|x + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

$(-\infty; -12] \cup [8; +\infty)$

50. (*МИОО, 2009*) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства

$$|2x - a| + 1 \leqslant |x + 3|$$

образуют отрезок длины 1.

$-5/2; -19/2$

51. (*МИОО, 2009*) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

$(-7/2; 1)$