

VII математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера Региональный этап. Второй день

- 8.5. На столе лежит палочка длиной 10 см. Петя ломает её на две части и кладёт обе получившиеся палочки на стол. С одной из лежащих на столе палочек Вася проделывает ту же операцию, потом то же делает Петя и т.д., по очереди. Петя хочет, чтобы после 18 разломов все получившиеся палочки были короче 1 см. Вася хочет помешать Пете. Кто из них имеет возможность добиться своей цели независимо от действий соперника?

(И. Рубанов, С. Берлов)

Ответ. Вася.

Решение. Отметим 9 точек, делящих палочку на части длиной 1 см. Васе достаточно играть так, чтобы на все эти точки пришлись разломы. Так как у него 9 ходов, он сможет это сделать. В итоге после 18 разломов получится 10 палочек длиной 1 см, некоторые из которых разломаны на более мелкие части. Так как разломов, не приходящихся на отмеченные точки, всего 9, хотя бы одна из сантиметровых палочек останется целой, и Петя не добьётся своей цели.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведена верная стратегия Васи без обоснования или с неверным обоснованием — 3 балла.

- 8.6. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T ?

(О. Дмитриев, Р. Женодаров)

Ответ. 5.

Решение. Рассмотрим некоторый момент, когда рейтинг уменьшился на 1. Пусть перед этим проголосовало n человек, и рейтинг был целым числом x . Значит, сумма баллов стала рав-

на n . Пусть следующий зритель выставил y баллов. Тогда сумма баллов стала равна $n x + y = (n+1)(x-1)$, откуда $y = x - n - 1$. Наибольшее возможное значение x равно 10, а наименьшее возможное значение n равно 1; значит, наибольшее значение y (на первом таком шаге) равно 8.

С каждым следующим шагом значение x уменьшается на 1, а значение n увеличивается на 1. Следовательно, на втором шаге значение y не превосходит 6, на третьем — 4, и т.д. Поскольку любая оценка не меньше 0, число шагов не превосходит 5.

Осталось показать, что пять шагов возможны. Пусть рейтинг в момент T равен 10 (при одном проголосовавшем), затем второй зритель выставляет 8 баллов, третий — 6, четвёртый — 4, пятый — 2, а шестой — 0. Тогда рейтинг последовательно принимает значения 9, 8, 7, 6 и 5.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только приведен пример, в котором проголосовало 5 зрителей — 2 балла.

Доказано с полным обоснованием, что более 5 зрителей проголосовать не могло (но пример отсутствует или неверен) — 4 балла.

- 8.7. В трапеции $ABCD$, где $AD \parallel BC$, угол B равен сумме углов A и D . На продолжении стороны CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$. (Б. Обухов)

Решение. Отложим на луче DA отрезок $DE = BC$. Тогда четырёхугольник $DCBE$ — параллелограмм, поэтому $\angle CBE = \angle CDE$. Используя условие, получаем $\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = \angle ABC - \angle CDE = \angle BAE$; значит, треугольник ABE равнобедренный, $AE = BE$.

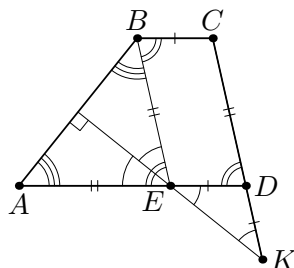
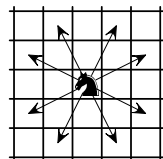


Рис. 1

Далее, поскольку $ED = BC = KD$, получаем $\angle KED = \angle EKD = \angle CDE/2$. Так как $\angle AEB = \angle CDE$, прямая KE является биссектрисой угла AEB и, тем самым, — серединным перпендикуляром к основанию AB равнобедренного треуголь-

ника $АЕВ$. Поэтому точка K равноудалена от концов отрезка AB , что и требовалось доказать.

- 8.8. На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки. Напомним, что конь ходит буквой «Г», как на рисунке справа.



(С. Берлов)

Решение. Будем убирать коней с доски по одному следующим образом. Если на очередном шаге можно убрать какого-то коня так, что оставшиеся будут бить все свободные поля, сделаем это. Если после некоторого шага останется 200 коней, мы получим требуемое.

Предположим, что в некоторый момент ни одного коня с сохранением нужного условия убрать нельзя. Разобьём клетки доски на пары, соединённые ходом коня (это можно сделать, например, как на рис. 2). Назовём пару *полной*, если в ней стоят два коня, и *пустой*, если в ней нет коней; пусть на доске f полных и e пустых пар.

6	5	8	7
2	1	4	3
5	6	7	8
1	2	3	4

Рис. 2

Рассмотрим любого коня R , стоящего в полной паре. Если его убрать, его клетка окажется побитой парным к нему; значит, останется непобитой некоторая другая клетка C . Ясно, что она находится в пустой паре и бьётся только конём R ; сопоставим клетку C коню R . Ясно, что разным коням сопоставлены разные клетки; поэтому общее количество сопоставленных клеток (оно не больше $2e$) равно $2f$, то есть $e \geq f$. Но общее количество коней равно $2f + (200 - e - f) = 200 + (f - e) \leq 200$. Значит, в момент, когда ни одного коня убрать нельзя, мы уже добились требуемого.

Комментарий. Идея сопоставить коню, бьющему клетки, не побитые другими конями, одну из этих клеток, при отсутствии дальнейшего содержательного продвижения — 1 балл.

Без доказательства существенно использовано существование на доске 20×20 гамильтонова обхода конём (т. е. замкнутого маршрута коня, проходящего через каждую клетку ровно один раз) — не выше 3 баллов.