Задачник C6

Здесь приведены задачи C6, которые предлагались на ЕГЭ по математике, а также на диагностических работах МИОО начиная с июня 2010 года.

Все задачи снабжены решениями. При этом не ставилась цель сделать решения максимально лаконичными и технически совершенными. Цель совсем другая: как можно яснее и отчётливее излагать идеи, лежащие в основе решения каждой задачи.

Решая задачу на экзамене или олимпиаде, мы во многих случаях не обязаны объяснять, из каких соображений построен нужный пример, найдено нужное число и т. д. Здесь, тем не менее, мы всегда стараемся давать соответствующие объяснения. Наводящие соображения (не нужные, повторяем, при записи решения) набраны более мелким шрифтом внутри значков ► и ◄.

1. (*ЕГЭ, 2013*) Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geqslant 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

→ Ответ и решение

2. (*МИОО, 2012*) Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.

→ Ответ и решение

3. (*ЕГЭ, 2012*) Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

→ Ответ и решение

4. (*ЕГЭ, 2012*) В ряд выписаны числа $1^2, 2^2, \ldots, (N-1)^2, N^2$. Между ними произвольным образом расставляют знаки $+$ и $-$ и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 4, если $N = 12$?

б) 0, если $N = 69$?

в) 0, если $N = 64$?

г) 5, если $N = 90$?

→ Ответ и решение

5. (*ЕГЭ, 2012*) Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадёт только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 20.

а) Может ли число S быть равным 40?

б) Может ли число S быть больше $39\frac{1}{21}$?

в) Найдите максимально возможное значение S.

→ Ответ и решение

6. (*ЕГЭ, 2012*) По окружности расставляют 48 ненулевых целых чисел с общей суммой 20. При этом любые два стоящих рядом числа должны отличаться не более чем на 7 и среди любых четырёх подряд идущих чисел должно быть хотя бы одно положительное.

а) Среди таких 48 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.

б) Среди таких 48 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

→ Ответ и решение

7. (*ЕГЭ, 2012*) Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности полученных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее возможное значение полученного результата?

→ Ответ и решение

8. (*ЕГЭ, 2012*) Учитель в школе ставит отметки от 1 до 5. Средний балл ученика равен 4,625.

а) Какое наименьшее количество оценок может иметь ученик?

б) Если у ученика заменить оценки 3, 3, 5, 5 на две четвёрки, то на сколько максимально может увеличиться средний балл?

→ Ответ и решение

9. (*ЕГЭ, 2012*) Назовем кусок веревки *стандартным*, если его длина не меньше 168 см, но не больше 175 см.

а) Некоторый моток веревки разрезали на 24 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

→ Ответ и решение

10. (*ЕГЭ, 2012*) Имеется 33 коробки массой 19 кг каждая и 27 коробок массой 49 кг каждая. Все эти коробки раскладываются по двум контейнерам. Пусть S — модуль разности суммарных масс коробок в контейнерах. Найдите наименьшее значение S:

а) если дополнительно требуется, что в контейнерах должно находиться одинаковое количество коробок;

б) без дополнительного условия пункта *а*.

→ Ответ и решение

11. (*ЕГЭ, 2012*) Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $3/11$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $3/7$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

→ Ответ и решение

12. (*ЕГЭ, 2012*) Каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$ по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 10 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

→ Ответ и решение

13. (*Пробный ЕГЭ, 2012, Москва*) Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 163.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

→ Ответ и решение

14. (*Пробный ЕГЭ, 2012, СПб*) На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т. д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

→ Ответ и решение

15. (*ФЦТ, 2012*) Имеется арифметическая прогрессия, состоящая из пятидесяти чисел.

а) Может ли эта прогрессия содержать ровно 6 целых чисел?

б) Может ли эта прогрессия содержать ровно 29 целых чисел?

в) Найдите наименьшее число n, при котором эта прогрессия **не** может содержать ровно n целых чисел.

→ Ответ и решение

16. (*МИОО, 2012*) В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

→ Ответ и решение

17. (*МИОО, 2011*) Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключённые между числами 210 и 350.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

→ Ответ и решение

18. (*МИОО, 2011*) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

→ Ответ и решение

19. (*ЕГЭ, 2011*) Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из различных натуральных чисел, первый член которой меньше 10, не содержит ни одного числа вида $n(n+1)/2$, $n \in \mathbb{N}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма первых 10 членов этой прогрессии?

→ Ответ и решение

20. (*ЕГЭ, 2011*) Набор состоит из 33 натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 5. Среднее арифметическое любых 27 чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 13 единиц?

б) Может ли такой набор содержать менее 13 единиц?

в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 28.

→ Ответ и решение

21. (*ЕГЭ, 2011*) На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -12.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

→ Ответ и решение

22. (*ЕГЭ, 2010*) Каждое из чисел 11, 12, …, 19 умножают на каждое из чисел 3, 4, …, 8 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

→ Ответ и решение

23. (*ЕГЭ, 2010*) Перед каждым из чисел 6, 7, …, 11 и 9, 10, …, 17 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

→ Ответ и решение

Ответы и решения

1. [Условие]

Ответ: а) может; б) 41; в) 3 и 6.

Решение. а) Предъявляем пример: числа 2, 3, 4, 5 образуют арифметическую прогрессию, и сумма их равна 14.

б) ► Начинаем с наводящих соображений. Мы чувствуем, что «максимальная» прогрессия начинается с единицы и имеет разность единица: $1, 2, \ldots, n$. Сумма такой прогрессии:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Непосредственно убеждаемся, что $S_{41} = 861$ и $S_{42} = 903$. Поэтому возникает предположение, что наибольшее n равно 41. Остаётся грамотно оформить решение. ◄

Пусть a и d — первый член и разность прогрессии. Так как прогрессия состоит из натуральных чисел, имеем неравенства $a \geqslant 1$ и $d \geqslant 1$.

Предположим, что $n \geqslant 42$. Тогда для суммы S первых n членов прогресии имеем:

$$S = \frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n \geqslant \frac{2a + 41d}{2} \cdot 42 \geqslant \frac{2 \cdot 1 + 41 \cdot 1}{2} \cdot 42 = 903 > 900,$$

что противоречит условию. Следовательно, $n \leqslant 41$ (оценка).

Приведём пример арифметической прогрессии, состоящей из 41 числа и удовлетворяющей условию задачи: $1, 2, 3, \ldots, 40, 41$. Её сумма равна $861 < 900$.

Таким образом, наибольшее n равно 41.

в) Прежде всего заметим, что $n < 41$ (в противном случае сумма прогрессии не меньше $861 > 123$). Разложим 123 на простые множители: $123 = 3 \cdot 41$. Имеем:

$$\frac{2a + d(n-1)}{2} \cdot n = 123 = 3 \cdot 41,$$

то есть

$$\big(2a + d(n-1)\big)\, n = 2 \cdot 3 \cdot 41.$$

Мы видим, что число $2 \cdot 3 \cdot 41$ делится на n. С учётом неравенства $3 \leqslant n < 41$ имеются лишь две возможности $n = 3$ и $n = 2 \cdot 3 = 6$.

► Пока ещё не известно, существуют ли прогрессии с указанными n. Поищем примеры подходящих прогрессий. ◄

Подходящая прогрессия с $n = 3$ существует: 40, 41, 42. Подходящая прогрессия с $n = 6$ также существует: 18, 19, 20, 21, 22, 23. Следовательно, возможными значениями n являются в данном случае 3 и 6.

2. [Условие]

Ответ: а) да; г) $1, 126, \ldots, 8876$.

Решение. а) Да, может: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

б) Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей. Предположим, что разность прогрессии d является r-значным числом (то есть десятичная запись числа d состоит ровно из r цифр).

Возьмём некоторый член a_n нашей прогрессии и обозначим через i цифру, расположенную в $(r+1)$-м разряде его десятичной записи (то есть $(r+1)$-ю по счёту цифру со стороны единиц;

если a_n является r-значным числом, то полагаем $i = 0$). Цифра 9 отсутствует, поэтому i может принимать одно из девяти значений: $i = 0, 1, \ldots, 8$.

Множество членов прогрессии, у которых в $(r + 1)$-м разряде стоит цифра i, мы будем называть i-группой. Всего, таким образом, имеется не более девяти групп членов прогрессии: 0-группа, 1-группа, …, 8-группа.

Поскольку число d является r-значным, при переходе от члена a_n к члену $a_{n+1} = a_n + d$ цифра i либо остаётся неизменной, либо увеличивается на единицу; иными словами, мы либо остаёмся в i-группе, либо переходим в $(i + 1)$-группу. Если мы остались в i-группе, то значение r-го разряда увеличилось. В r-м разряде может стоять одна из девяти цифр $0, 1, \ldots, 8$, поэтому в i-группе не более девяти членов прогрессии.

Итак, i-групп не более девяти, а в каждой группе не более девяти членов; следовательно, всего членов прогрессии не более $9 \cdot 9 = 81 < 100$.

в) Покажем, что на самом деле в i-группе не более восьми членов. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — члены i-группы (они сами по себе образуют арифметическую прогрессию с разностью d).

Обозначим $c_1, c_2, \ldots, c_m$ остатки от деления чисел $b_1, b_2, \ldots, b_m$ на 10^r. (Попросту говоря, каждое число c_k получается выбрасыванием из десятичной записи соответствующего числа b_k всех цифр начиная с $(r+1)$-й; например, если $r = 2$ и $b_k = 123$, то $c_k = 23$.) Ясно, что числа $c_1, c_2, \ldots, c_m$ также образуют арифметическую прогрессию с разностью d.

Теперь заметим, что $c_m \leqslant \underbrace{88\ldots8}_{r}$. Следовательно, $d > \underbrace{11\ldots1}_{r}$. Имеем:

$$\underbrace{88\ldots8}_{r} \geqslant c_m = c_1 + (m-1)d \geqslant (m-1)d > (m-1)\cdot\underbrace{11\ldots1}_{r},$$

откуда $m - 1 < 8$, то есть $m \leqslant 8$.

Итак, в каждой из i-групп не более восьми членов, а самих этих групп не более девяти. Следовательно, прогрессия содержит не более 72 членов.

г) Приведём пример такой прогрессии, состоящей из 72 членов. Её первый член равен 1, а разность равна 125:

1	126	251	376	501	626	751	876
1001	1126	1251	1376	1501	1626	1751	1876
2001	2126	2251	2376	2501	2626	2751	2876
3001	3126	3251	3376	3501	3626	3751	3876
4001	4126	4251	4376	4501	4626	4751	4876
5001	5126	5251	5376	5501	5626	5751	5876
6001	6126	6251	6376	6501	6626	6751	6876
7001	7126	7251	7376	7501	7626	7751	7876
8001	8126	8251	8376	8501	8626	8751	8876

3. [Условие]

Ответ: а) да; б) четыре.

Решение. а) Да, может. Пример: 1, 2, 3.

б) В этой прогрессии может быть четыре члена: 1, 2, 3, 4. Покажем, что пяти членов в ней быть не может.

► Идея такова. Все члены нашей прогрессии не делятся на 5, то есть дают при делении на 5 ненулевые остатки (а именно, 1, 2, 3, 4). Если имеется пять членов прогресии, то обязательно найдутся два члена с равными остатками. А тогда окажется, что разность прогрессии кратна 5. Но она не может быть кратна 5 — это мы тоже докажем. ◄

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Если три различных натуральных числа, не имеющие простых делителей кроме 2 и 3, образуют арифметическую прогрессию, то разность этой прогрессии не делится на 5.

Доказательство. Предположим, что числа $a = 2^{k_1} \cdot 3^{l_1}$, $b = 2^{k_2} \cdot 3^{l_2}$ и $c = 2^{k_3} \cdot 3^{l_3}$ образуют арифметическую прогрессию (k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3 — целые неотрицательные числа). Разность этой прогрессии обозначим d. Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей.

Пусть k_0 есть наименьшее из чисел k_1, k_2, k_3 и пусть l_0 есть наименьшее из чисел l_1, l_2, l_3. Ясно, что разложение разности прогрессии на простые множители имеет вид:

$$d = 2^{k_0} \cdot 3^{l_0} \cdot 5^m \cdot \ldots$$

(В самом деле, разность d обязана делиться на 2^{k_0}, но не может делиться на 2 в большей степени; аналогично дело обстоит с множителем 3^{l_0}.)

Поделим числа a, b, c, d на $2^{k_0} \cdot 3^{l_0}$. Получим новую арифметическую прогрессию, члены которой по-прежнему обозначим a, b, c. Новую разность также обозначим d. Числа a, b, c, как и ранее, кратны лишь степеням двойки и тройки, а разность d теперь не делится ни на 2, ни на 3. Следовательно, в прогрессии теперь не могут идти подряд два чётных числа и два числа, кратные трём; в частности, прогрессия не содержит число, которое делится на 2 и на 3 одновременно. Кроме того, поскольку d нечётно, чётности чисел a, b, c чередуются (чётное–нечётное–чётное или нечётное–чётное–нечётное).

С учётом сформулированных ограничений мы получаем для нашей новой прогрессии лишь три возможности ($a = 1$, a кратно двум, a кратно трём). В каждом случае предполагаем, что d кратно 5, и приходим к противоречию. Во всех случаях k, l, m, n, p — натуральные числа.

1. Прогрессия имеет вид: 1, 2^k, 3^l. Тогда 2^k должно оканчиваться на 6, и потому $k = 4n$. Аналогично, 3^l должно оканчиваться на 1, и потому $l = 4p$.

   Таким образом, имеем арифметическую прогрессию: 1, 16^n, 81^p. Отсюда

   $$2 \cdot 16^n = 81^p + 1.$$

   Левая часть данного равенства делится на 16. Число 81 при делении на 16 даёт остаток 1; значит, и 81^p при делении на 16 даёт остаток 1. Тогда правая часть имеет остаток 2 при делении на 16. Противоречие.

2. Прогрессия имеет вид: 2^k, 3^l, 2^m. Напомним, что прогрессию мы считаем возрастающей, поэтому $m > k$. С необходимостью имеем $k = 1$; в противном случае второе число 3^l, равное полусумме первого и третьего чисел, окажется чётным. Но, если первое число равно 2, то 2^m оканчивается на 2 (поскольку $2d$ делится на 10), так что $m = 4p + 1$.

   Получаем:

   $$3^l = \frac{2^{4p+1} + 2}{2} = 16^p + 1.$$

   Левая часть этого равенства делится на 3, а правая часть при делении на 3 даёт остаток 2. Противоречие.

3. Прогрессия имеет вид: 3^k, 2^l, 3^m. Тогда $2 \cdot 2^l = 3^k + 3^m$. Правая часть этого равенства делится на 3, а левая — нет. Противоречие.

Противоречия, полученные во всех случаях, завершают доказательство леммы.

Предположим теперь, что пять различных натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию (с разностью d) и кратны лишь степеням двойки и тройки. Все эти числа дают ненулевые остатки при делении на 5. Поскольку ненулевых остатков всего четыре, у двух каких-то чисел эти остатки совпадают.

- Пусть остатки совпадают у двух соседних чисел:

  $$a = 5k + r, \quad a + d = 5l + r$$

  (k, l — целые; $r = 1, 2, 3, 4$). В таком случае разность прогрессии $d = 5(l - k)$ делится на 5. Однако в силу леммы это невозможно.

- Пусть остатки совпадают у двух чисел, расположенных через одно:

  $$a = 5k + r, \quad a + 2d = 5l + r.$$

  Тогда $2d = 5(l - k)$ делится на 5, а значит и d делится на 5 вопреки лемме.

- Пусть остатки совпадают у двух чисел, расположенных через два:

  $$a = 5k + r, \quad a + 3d = 5l + r.$$

  Тогда $3d = 5(l - k)$ делится на 5, а значит и d делится на 5 вопреки лемме.

- Пусть остатки совпадают у двух чисел, расположенных через три, то есть у первого и последнего членов:

  $$a = 5k + r, \quad a + 4d = 5l + r.$$

  Тогда $4d = 5(l - k)$ делится на 5, а значит и d делится на 5 — снова в противоречии с леммой.

Полученные противоречия показывают, что пяти членов в прогрессии быть не может. Больше пяти членов в прогрессии не может быть и подавно. Значит, в прогрессии может быть самое большее четыре члена.

4. [Условие]

Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) да.

Решение. а) ► Давайте выпишем для наглядности все 12 квадратов:

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad 6^2 \quad 7^2 \quad 8^2 \quad 9^2 \quad 10^2 \quad 11^2 \quad 12^2.$$

Нам пригодится знание пифагоровых троек: $3^2 + 4^2 = 5^2$ и $6^2 + 8^2 = 10^2$. Эти шесть квадратов можно выкинуть из списка, поскольку $3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 + 8^2 - 10^2 = 0$. Выпишем оставшиеся шесть квадратов:

$$1 \quad 4 \quad 49 \quad 81 \quad 121 \quad 144.$$

Замечаем, что $144 - 121 = 23$, $81 - 49 = 32$; результаты отличаются на 9, а $1 + 4 = 5$. Вот и готова четвёрка: $-1 - 4 - 49 + 81 + 121 - 144 = 4$.

При записи решения все эти размышления остаются «за кадром», и мы приводим только пример нужной расстановки знаков. ◄

Да, может. Вот пример:

$$-1^2 - 2^2 + 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - 7^2 + 8^2 + 9^2 - 10^2 + 11^2 - 12^2 = 4.$$

б) В последовательности 1^2, 2^2, 3^2, …, 68^2, 69^2 содержится 35 нечётных чисел (и 34 чётных). Поскольку количество нечётных чисел нечётно, при любой расстановке знаков сумма этой последовательности окажется нечётной. Значит, эта сумма не может равняться нулю.

в) ► В арифметической прогрессии из четырёх чисел a, b, c, d мы можем расставить знаки так, чтобы получился нуль: $a - b - c + d = 0$.

Пусть имеется восемь последовательных квадратов: k^2, $(k+1)^2$, …, $(k+7)^2$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&(k+1)^2 - k^2 = 2k+1,\\
&(k+3)^2 - (k+2)^2 = 2k+5,\\
&(k+5)^2 - (k+4)^2 = 2k+9,\\
&(k+7)^2 - (k+6)^2 = 2k+13.
\end{aligned}$$

Четыре числа $2k+1$, $2k+5$, $2k+9$, $2k+13$ образуют арифметическую прогрессию. Расставляя между ними знаки указанным выше образом, получим в сумме нуль. Таким образом, сумму восьми последовательных квадратов можно сделать равной нулю подходящей расстановкой знаков.

Переходим к записи решения. Прежде всего, как из шляпы фокусника, появляется полученный результат. ◄

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$-k^2 + (k+1)^2 + (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2 - (k+5)^2 - (k+6)^2 + (k+7)^2 = 0. \tag{1}$$

Таким образом, сумму квадратов восьми последовательных целых чисел можно сделать равной нулю подходящей расстановкой знаков.

В нашем случае имеется 64 квадрата: 1^2, 2^2, …, 64^2. Разобьём их на 8 равных последовательных отрезков по 8 квадратов:

$$1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ 8^2; \quad 9^2,\ 10^2,\ \ldots,\ 16^2; \quad \ldots \quad ; \quad 57^2,\ 58^2,\ \ldots,\ 64^2.$$

Сумму чисел каждого отрезка можно сделать равной нулю, расставляя знаки так, как в (1). Тем самым общая сумма окажется равной нулю.

г) Заметим, что $1^2 + 2^2 = 5$. Остальные 88 квадратов 3^2, 4^2, …, 90^2 разобьём на 11 равных последовательных отрезков по 8 квадратов и расставим внутри каждого отрезка знаки так, как в (1). Тем самым сумма этих 88 квадратов обратится в нуль, а общая сумма будет равна 5.

5. [Условие]

Ответ: а) нет; б) нет; в) $39\frac{1}{21}$.

Решение. а) Представим число 40 в виде следующей суммы:

$$40 = \underbrace{\frac{40}{41} + \frac{40}{41} + \ldots + \frac{40}{41}}_{\text{41 слагаемое}}.$$

Каково бы ни было разбиение этих 41 слагаемых на две группы, в одной из этих групп окажется не менее 21 числа. Тогда сумма чисел в этой группе будет больше или равна

$$21 \cdot \frac{40}{41} = \frac{840}{41} > \frac{820}{21} = 20.$$

Следовательно, число S не может равняться 40.

б) Предположим, что

$$S > 39\,\frac{1}{21} = \frac{820}{21}.$$

Представим S в виде суммы:

$$S = \underbrace{\frac{S}{41} + \frac{S}{41} + \ldots + \frac{S}{41}}_{41 \text{ слагаемое}}.$$

Число S не превосходит 40 (ведь S по условию является суммой двух групп чисел, а в каждой группе сумма не больше 20), поэтому каждое из слагаемых $S/41$ меньше единицы. Теперь повторяются рассуждения предыдущего пункта: каково бы ни было разбиение этих слагаемых на две группы, одна из групп будет содержать не менее 21 числа. Сумма чисел в этой группе окажется больше или равна

$$21 \cdot \frac{S}{41} > 21 \cdot \frac{820}{21 \cdot 41} = 20.$$

Значит, S не может быть больше $39\frac{1}{21}$.

в) Из результата пункта б) следует оценка:

$$S \leqslant 39\frac{1}{21}\,. \tag{2}$$

Покажем, что число $39\frac{1}{21}$ удовлетворяет условию задачи. Возьмём произвольное представление:

$$39\frac{1}{21} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \tag{3}$$

в котором числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n положительны и не превосходят единицы. Будем считать для определённости, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$.

Нужное нам разбиение слагаемых в (3) на две группы мы построим следующим образом. К первой группе относим наибольшее первое слагаемое и все идущие за ним до тех пор, пока их сумма не превосходит 20. Более точно, найдётся слагаемое a_p такое, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p \leqslant 20,$$

и в то же время

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p + a_{p+1} > 20.$$

Так вот, первую группу составят числа a_1, $\ldots$, a_p, а вторую группу — числа a_{p+1}, $\ldots$, a_n.

Обозначим через A сумму чисел в первой группе:

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_p. \tag{4}$$

Имеем:

$$A \leqslant 20,$$
$$A + a_{p+1} > 20. \tag{5}$$

Поскольку $a_p \leqslant 1$, из неравенства (5) следует, что $A > 19$. Тогда (4) приводит нас к неравенству $p > 19$ (ведь все слагаемые не превосходят 1); а так как p целое, то

$$p \geqslant 20. \tag{6}$$

Перепишем (4) в виде:

$$a_{p+1} > 20 - A.$$

Вспоминая, что слагаемые в (4) расположены по убыванию, имеем также: $a_p > 20 - A$, $\ldots$, $a_2 > 20 - A$, $a_1 > 20 - A$. Тогда из (4) и (6) последовательно получаем:

$$A > \underbrace{(20 - A) + (20 - A) + \ldots + (20 - A)}_{p \text{ слагаемых}} = p(20 - A) \geqslant 20(20 - A).$$

Отсюда
$$A > \frac{400}{21}\,.$$

Теперь для суммы чисел во второй группе имеем:
$$a_{p+1} + \ldots + a_n = 39\frac{1}{21} - A = \frac{820}{21} - A < \frac{820}{21} - \frac{400}{21} = \frac{420}{21} = 20.$$

Итак, во второй группе сумма чисел меньше 20, что и требовалось. Значит, для числа $39\frac{1}{21}$ условия задачи выполнены. Вместе с оценкой (2) это доказывает, что $39\frac{1}{21}$ — максимально возможное значение S.

6. [Условие]

Ответ: а) 45; б) 12.

Решение. Пусть по кругу расставлены числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{48}. Количество положительных чисел среди них обозначим p.

а) Поскольку сумма всех чисел равна 20, среди них есть как положительные, так и отрицательные. Поэтому $p \neq 48$.

Пусть $p = 47$. В этом случае сумма положительных чисел не менее 47. Но тогда единственное отрицательное число меньше или равно -27 и потому отличается от соседних чисел более чем на 7. Это противоречит условию. Значит, $p \neq 47$.

Пусть $p = 46$. Сумма положительных чисел не менее 46. Отрицательных чисел всего два, и их сумма меньше или равна -26. Значит, одно из отрицательных чисел меньше или равно -13. Это число отличается от соседнего положительного числа более чем на 7. Поэтому $p \neq 46$.

Приведём пример, когда $p = 45$. Положим
$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{45} = 1,\ a_{46} = -6,\ a_{47} = -13,\ a_{48} = -6.$$

Сумма этих чисел равна:
$$45 - 6 - 13 - 6 = 20.$$

Легко видеть, что и остальные условия задачи выполнены. Следовательно, наибольшее возможное значение p равно 45.

б) Из того, что среди любых четырёх подряд идущих чисел имеется хотя бы одно положительное, следует, что
$$p \geqslant 12. \tag{7}$$

В самом деле, разобьём наши 48 чисел на 12 четвёрок:
$$(a_1, a_2, a_3, a_4),\ (a_5, a_6, a_7, a_8),\ \ldots,\ (a_{45}, a_{46}, a_{47}, a_{48}).$$

Если $p < 12$, то по крайней мере в одной четвёрке не будет положительного числа — вопреки условию.

Остаётся предъявить пример с $p = 12$. Пусть
$$\underbrace{a_4 = a_8 = a_{12} = \ldots = a_{44}}_{11\ \text{чисел}} = 5,\ a_{48} = 1,$$

а остальные 36 чисел равны -1. Сумма этих чисел:
$$11 \cdot 5 + 1 - 36 = 20.$$

Остальные условия задачи в данном примере также выполнены. Этот пример и оценка (7) доказывают, что наименьшее возможное значение p равно 12.

7. [Условие]

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

Решение. Пусть A, B, C и D — суммы чисел в четырёх группах. Согласно условию нас интересует сумма:

$$S = |A-B| + |A-C| + |A-D| + |B-C| + |B-D| + |C-D|. \tag{8}$$

Ясно, что S — целое неотрицательное число.

Отметим сразу же, что

$$A+B+C+D = 1+2+\ldots+12 = 78. \tag{9}$$

а) Предположим, что $S=0$. Тогда все шесть слагаемых в (8) равны нулю, что немедленно даёт $A=B=C=D$. Но это невозможно ввиду (9), поскольку 78 не делится на 4. Следовательно, 0 в результате получиться не может.

б) Предположим, что $S=1$. Тогда одно слагаемое в (8) равно единице, а остальные пять слагаемых равны нулю.

Без ограничения общности можно считать, что $|A-B|=1$. Но тогда из $|A-C|=0$ и $|B-C|=0$ получаем соответственно $A=C$ и $B=C$, то есть $A=B$. Возникшее противоречие показывает, что 1 в результате получиться не может.

в) Заметим, что имеется самое большее три слагаемых в (8), которые не содержат фиксированную букву (например, букву D не содержат слагаемые $|A-B|$, $|B-C|$ и $|A-C|$). Поэтому если взять любые четыре слагаемых в (8), то в них непременно будут фигурировать все четыре буквы A, B, C, D.

Таким образом, если четыре каких-то слагаемых в (8) равны нулю, то $A=B=C=D$. Данное равенство, как было отмечено выше, невозможно. Следовательно, *никакие четыре слагаемых в* (8) *не могут равняться нулю.*

Иными словами, как минимум три слагаемых в (8) должны быть отличны от нуля. Тем самым оказывается невозможным случай $S=2$.

Предположим, что $S=3$. Тогда три слагаемых в (8) равны единице, а остальные три — нулю. При этом нулю могут равняться лишь такие три слагаемых, которые не содержат некоторой буквы (в противном случае — когда в трёх нулевых слагаемых фигурируют все четыре буквы A, B, C, D — остальные три слагаемых также обратятся в нуль).

Пусть, например, $|A-B|=|A-C|=|B-C|=0$, то есть $A=B=C$. Тогда $D=A\pm1$, и

$$78 = A+B+C+D = 4A\pm1.$$

Получаем противоречие: слева стоит чётное число, а справа — нечётное. Значит, $S=3$ невозможно.

Приведём пример с $S=4$. Группы возьмём такие:

$$(1,3,4,5,6), \quad (2,7,10), \quad (9,11), \quad (8,12).$$

Здесь $A=19$, $B=19$, $C=20$, $D=20$. Подставляем в (8):

$$S = 0+1+1+1+1+0 = 4.$$

Тем самым доказано, что наименьшее возможное значение S равно 4.

8. [Условие]

Ответ: а) в; б) на 5/56.

Решение. а) Пусть ученик имеет n оценок и S — их сумма. Тогда:

$$\frac{S}{n} = 4{,}625 = 4\,\frac{5}{8} = \frac{37}{8}\,.$$

Отсюда $37n = 8S$, так что n делится на 8. Поэтому $n \geqslant 8$.

Приведём пример с $n = 8$. Пусть ученик имеет семь пятёрок и двойку. Тогда его средний балл:

$$\frac{7 \cdot 5 + 2}{8} = \frac{37}{8}\,.$$

Итак, наименьшее возможное количество оценок ученика равно 8.

б) Пусть ученик имел оценки 3, 3, 5, 5, a_1, a_2, ..., a_k. Обозначим

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Заметим сразу, что

$$A \leqslant 5k. \tag{10}$$

Посмотрим, какие ограничения на k накладывает тот факт, что средний балл равен 4,675. Сумма оценок ученика равна $16 + A$, количество оценок равно $4 + k$, так что

$$\frac{16 + A}{4 + k} = \frac{37}{8}\,.$$

Отсюда легко получаем:

$$8A = 37k + 20. \tag{11}$$

Правая часть $37k + 20$ должна делиться на 8. Число 20 при делении на 8 даёт остаток 4. Значит, $37k$ при делении на 8 также должно давать остаток 4. Какой остаток даёт само k? Поскольку $37k = 32k + 5k$ и $32k$ делится на 8, число $5k$ при делении на 8 даёт остаток 4. Перебирая остатки от 0 до 7, легко видим, что и k даёт остаток 4:

$$k = 8m + 4 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Подставляем это в (11):

$$8A = 37(8m + 4) + 20 = 37 \cdot 8m + 168,$$

и после сокращения на 8 получим:

$$A = 37m + 21. \tag{13}$$

Теперь подставляем (12) и (13) в неравенство (10):

$$37m + 21 \leqslant 5(8m + 4),$$

откуда $3m \geqslant 1$, то есть $m \geqslant 1$. Вместе с (12) это даёт нам нужное неравенство на k:

$$k \geqslant 12.$$

Пусть теперь оценки ученика стали 4, 4, a_1, a_2, ..., a_k. Сумма оценок равна $8+A$, количество оценок равно $2 + k$. Находим изменение среднего балла:

$$\Delta = \frac{8 + A}{2 + k} - \frac{37}{8} = \frac{64 + 8A - 37(2 + k)}{8(2 + k)} = \frac{8A - 37k - 10}{8(2 + k)}\,.$$

С учётом (11) имеем:

$$\Delta = \frac{10}{8(2+k)} = \frac{5}{4(2+k)}\,.$$

Максимальное значение Δ достигается при минимально возможном значении k, равном 12:

$$\Delta_{\max} = \frac{5}{4(2+12)} = \frac{5}{56}\,.$$

Таким образом, максимальное увеличение среднего балла составляет $5/56$.

9. [Условие]

Ответ: а) 24; б) 4032.

Решение. а) Пусть L — длина мотка верёвки. Коль скоро его можно разрезать на 24 стандартных куска, выполнено неравенство $L \geqslant 168 \cdot 24$. А так как не все куски имеют одинаковую длину, неравенство является строгим: $L > 168 \cdot 24$.

По тем же самым причинам справедливо неравенство $L < 175 \cdot 24$. Итак,

$$168 \cdot 24 < L < 175 \cdot 24.$$

Теперь заметим, что $168 = 7 \cdot 24$ и $175 = 7 \cdot 25$. Поэтому $175 \cdot 24 = 7 \cdot 25 \cdot 24 = 168 \cdot 25$, и мы получаем новое двойное неравенство для L:

$$168 \cdot 24 < L < 168 \cdot 25. \tag{14}$$

Предположим, что моток можно разрезать на $n \geqslant 25$ стандартных кусков одинаковой длины. Тогда имеем неравенство

$$L \geqslant 168n \geqslant 168 \cdot 25,$$

которое противоречит неравенству (14). Следовательно, $n \leqslant 24$.

Покажем, что наш моток можно разрезать на 24 одинаковых стандартных куска. Из неравенства (14) следует, что $L = 168 \cdot 24 + x$, где $x < 168$. Разрежем моток на 24 куска одинаковой длины; тогда длина d одного куска равна:

$$d = 168 + \frac{x}{24}\,.$$

С одной стороны, $d > 168$. С другой стороны,

$$d < 168 + \frac{168}{24} = 168 + 7 = 175.$$

Итак, $168 < d < 175$, так что куски являются стандартными. Следовательно, данный моток разрезается самое большее на 24 одинаковых стандартных куска.

б) Сформулируем и решим задачу в общем виде — тем самым яснее проявится идея её решения.

Пусть a и b — натуральные числа ($a < b$). Всякое число, расположенное на отрезке $[a; b]$, называем *стандартным*. Нам надо найти такое наименьшее число l, что любое число $L > l$ можно представить в виде суммы стандартных слагаемых.

Существует наибольшее натуральное n, для которого выполнено неравенство

$$(n-1)b < na.$$

В самом деле, нетрудно видеть, что это есть наибольшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству $n < b/(b-a)$. Обозначим его n_0:

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}\colon (n-1)b < na\} = \max\left\{n \in \mathbb{N}\colon n < \frac{b}{b-a}\right\}. \tag{15}$$

Пусть сначала $l < n_0 a$. Покажем, что найдётся $L > l$, не представимое в виде суммы стандартных слагаемых. Возьмём L таким, что $\max\{l, n_0 a - 1\} < L < n_0 a$. Иными словами, мы выбираем число L, одновременно удовлетворяющее двум условиям:

1) $L > l$;
2) $n_0 a - 1 < L < n_0 a$.

Поскольку $(n_0 - 1)b < n_0 a$, из второго условия следует неравенство

$$(n_0 - 1)b < L < n_0 a. \tag{16}$$

Предположим, что L равно сумме k стандартных слагаемых. Тогда $ka \leqslant L \leqslant kb$. Отсюда и из неравенства (16) следует, что одновременно выполнены неравенства $k > n_0 - 1$ и $k < n_0$. Полученное противоречие показывает, что L нельзя представить в виде суммы стандартных слагаемых.

► Чтобы лучше почувствовать эту ситуацию, возьмите $a = 4$, $b = 5$ и подумайте, почему число 15,5 не представляется в виде суммы стандартных слагаемых. ◄

Пусть теперь $l = n_0 a$. Покажем, что любое число $L > l$ можно представить в виде суммы стандартных слагаемых.

Для любого L найдётся натуральное n такое, что $na \leqslant L < (n+1)a$. Поскольку выполнено $L > n_0 a$, имеем $n + 1 > n_0$. Отсюда в соответствии с определением (15) числа n_0 заключаем, что $(n+1)a \leqslant nb$. Это даёт нам неравенство

$$na \leqslant L < nb,$$

или

$$a \leqslant \frac{L}{n} < b.$$

Следовательно, L можно представить в виде суммы n стандартных слагаемых, каждое из которых равно L/n.

Таким образом, мы нашли наименьшее l, такое, что любое число $L > l$ представляется суммой стандартных слагаемых. Это наименьшее l равно $n_0 a$.

Остаётся применить полученные результаты к исходной задаче. Имеем: $a = 168$, $b = 175$, так что

$$\frac{b}{b-a} = \frac{175}{7} = 25.$$

Согласно (15) находим $n_0 = 24$. Тогда $l = n_0 a = 24 \cdot 168 = 4032$.

10. [Условие]

Ответ: а) 30; б) 2.

Решение. а) Всего имеется $33 + 27 = 60$ коробок. Значит, в каждом контейнере должно находиться по 30 коробок.

Пусть x — количество лёгких (по 19 кг) коробок в первом контейнере. Тогда число тяжёлых (по 49 кг) коробок в первом контейнере равно $30 - x$. Во втором контейнере лёгких коробок получается $33 - x$, а тяжёлых коробок: $27 - (30 - x) = x - 3$.

Суммарные массы коробок в первом и втором контейнерах равны соответственно:

$$m_1 = 19x + 49(30 - x) = 1470 - 30x,$$
$$m_2 = 19(33 - x) + 49(x - 3) = 480 + 30x.$$

Отсюда:

$$S = |m_2 - m_1| = |60x - 990| = 30|2x - 33|.$$

Число $|2x - 33|$ является нечётным и принимает наименьшее возможное значение 1 при $x = 16$ или $x = 17$. Следовательно, наименьшее значение S равно 30.

б) Пусть в первом контейнере находится x лёгких коробок и y тяжёлых коробок. Тогда во втором контейнере будет $33 - x$ и $27 - y$ лёгких и тяжёлых коробок соответственно. Имеем:

$$m_1 = 19x + 49y,$$
$$m_2 = 19(33 - x) + 49(27 - y) = 1950 - 19x - 49y.$$

При этом имеют место неравенства:

$$x \leqslant 33, \quad y \leqslant 27. \tag{17}$$

Величина S равна:

$$S = |38x + 98y - 1950| = 2|19x + 49y - 975|.$$

Нам, таким образом, требуется найти минимальное значение S при условии, что выполнены оба неравенства (17).

Заметим, что возможен прямой перебор всех значений x и y ($0 \leqslant x \leqslant 33$, $0 \leqslant y \leqslant 27$), то есть последовательное рассмотрение всех $34 \cdot 28$ вариантов. Вообще, исчерпывающий перебор конечного числа вариантов — это полноценное решение задачи! Но мы, естественно, таким путём не пойдём и поищем способ избежать прямого перебора.

Прежде всего проверим, не может ли S равняться нулю. Для этого рассмотрим уравнение:

$$19x + 49y = 975. \tag{18}$$

Будем использовать остатки от деления на 7. Перепишем уравнение (18) следующим образом:

$$5x + 14x + 49y = 975.$$

Нетрудно проверить, что 975 даёт остаток 2 ($975 = 139 \cdot 7 + 2$). Значит, и слагаемое $5x$ даёт остаток 2 (ведь остальные слагаемые в левой части делятся на 7). Какой остаток при этом даёт сам x? Перебор остатков от 0 до 6 показывает, что единственная возможность — это остаток 6, то есть

$$x = 7k + 6. \tag{19}$$

Подставляем (19) в (18)

$$19(7k + 6) + 49y = 975,$$
$$19 \cdot 7k + 49y = 861,$$

и после сокращения на 7:

$$19k + 7y = 123. \tag{20}$$

Благодаря этому сокращению уравнение (20) проще уравнения (18). Давайте повторим всю эту процедуру — теперь уже применительно к уравнению (20). Начинаем так же:

$$5k + 14k + 7y = 123.$$

Правая часть 123 даёт остаток 4 ($123 = 17 \cdot 7 + 4$). Значит, и $5k$ даёт остаток 4. Тогда k может давать только остаток 5:

$$k = 7m + 5. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (19), получим: $x = 7(7m+5)+6 = 49m+41$. Таким образом, оказывается, что $x \geqslant 41$ — вопреки первому неравенству (17).

Итак, уравнение (18) не имеет решений, удовлетворяющих условию (17). Поэтому $S \neq 0$.

► А какие решения есть? Давайте всё же доведём до конца решение уравнения (18) — полезно посмотреть, чем дело кончится. Подставим (21) в (20):

$$19(7m+5) + 7y = 123,$$
$$19 \cdot 7m + 7y = 28,$$
$$19m + y = 4.$$

Отсюда видно, что единственная возможность — это $m = 0$ и $y = 4$. Остаётся найти x. Из (21) и (19) последовательно получаем: $k = 7 \cdot 0 + 5 = 5$, $x = 7 \cdot 5 + 6 = 41$.

Итак, уравнение (18) имеет единственное решение $(41, 4)$ в натуральных числах. Это решение не удовлетворяет условию (17). ◄

Поскольку S является чётным числом, имеем оценку: $S \geqslant 2$. Равенство достигается, например, в случае $x = 23$ и $y = 11$:

$$S = 2 \cdot |19 \cdot 23 + 49 \cdot 11 - 975| = 2 \cdot |976 - 975| = 2.$$

Следовательно, наименьшее значение S равно 2.

► Как найден пример? Берём уравнение $19x+49y = 976$ и решаем его тем же способом — через остатки от деления на 7. Упражняйтесь! ◄

11. [Условие]

Ответ: а) да; б) 10; в) 8/17.

Решение. Пусть m — число мальчиков, d — число девочек в группе. Пусть m_1 мальчиков сходили в театр, m_2 мальчиков сходили в кино, d_1 девочек сходили в театр, d_2 девочек сходили в кино.

Для случая похода в театр имеем:

$$m_1 \leqslant \frac{3}{11}(m_1 + d_1) \Rightarrow 8m_1 \leqslant 3d_1.$$

Для случая посещения кино:

$$m_2 \leqslant \frac{3}{7}(m_2 + d_2) \Rightarrow 4m_2 \leqslant 3d_2.$$

Сложим первое из полученных неравенств с удвоенным вторым:

$$8(m_1 + m_2) \leqslant 3d_1 + 6d_2.$$

Поскольку каждый мальчик сходил либо в театр, либо в кино, имеем $m_1 + m_2 \geqslant m$. Кроме того, очевидно, $d_1 \leqslant d$ и $d_2 \leqslant d$. Получаем:

$$8m \leqslant 8(m_1 + m_2) \leqslant 3d + 6d,$$

то есть

$$8m \leqslant 9d. \tag{22}$$

а) Да, 10 мальчиков могло быть в группе из 20 учащихся. Например, в театр сходили 3 мальчика и все 10 девочек, в кино — остальные 7 мальчиков и 10 девочек. Нужные неравенства выполнены:

$$3 \leqslant \frac{3}{11} \cdot (3+10), \quad 7 \leqslant \frac{3}{7} \cdot (7+10).$$

► Как построен пример? Прежде всего, значения $m = 10$ и $d = 10$ не противоречат неравенству (22), и это наводит на мысль, что пример тут возможен. Затем берём неравенства $8m_1 \leqslant 3d_1$ и $4m_2 \leqslant 3d_2$, задействуем девочек по максимуму ($d_1 = d_2 = 10$) и находим подходящие m_1 и m_2. ◄

б) Предположим, что в группе из 20 учащихся имеется не менее 11 мальчиков: $m \geqslant 11$. Тогда $d \leqslant 9$. Имеем: $8m \geqslant 88$, $9d \leqslant 81$, что противоречит неравенству (22). Следовательно, $m \leqslant 10$, и с учётом пункта а) приходим к выводу, что наибольшее возможное количество мальчиков в группе равно 10.

в) Перепишем неравенство (22) следующим образом:

$$8m \leqslant 9d \Rightarrow \frac{m}{d} \leqslant \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{m}{d} + 1 \leqslant \frac{17}{8} \Rightarrow \frac{m+d}{d} \leqslant \frac{17}{8} \Rightarrow \frac{d}{m+d} \geqslant \frac{8}{17}.$$

Как видим, доля девочек не меньше $8/17$. Приведём пример, когда равенство достигается. Пусть в группе 9 мальчиков и 8 девочек. В театр сходили 3 мальчика и 8 девочек, в кино сходили 6 мальчиков и 8 девочек. Нужные неравенства выполнены:

$$3 \leqslant \frac{3}{11} \cdot (3+8), \quad 6 \leqslant \frac{3}{7} \cdot (6+8).$$

Следовательно, наименьшая возможная доля девочек равна $8/17$.

12. [Условие]

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

Решение. Присвоим каждой карточке номер от 1 до 10. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — числа, данные в условии и записанные на карточках вначале (число a_k записано на карточке с номером k). Аналогично, $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ — числа того же набора, но записанные на карточках после их перемешивания. Согласно условию рассматривается число:

$$c = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_{10} + b_{10}). \tag{23}$$

а) Предположим, что $c = 0$. Тогда в произведении (23) найдётся нулевой множитель, то есть $a_k + b_k = 0$ для некоторого k. Но это невозможно, так как в данном наборе ни для какого числа a_k нет ему противоположного по знаку. Значит, 0 получиться не может.

б) Предположим, что c нечётно. Тогда в произведении (23) каждый множитель должен быть нечётным, то есть $a_k + b_k$ нечётно для любого k $(1 \leqslant k \leqslant 10)$.

Следовательно, для каждого k в паре (a_k, b_k) одно число чётное, а другое нечётное. Поэтому в последовательности $(a_1, \ldots, a_{10}, b_1 \ldots, b_{10})$ окажется 10 чётных и 10 нечётных чисел. Однако из условия вытекает, что указанная последовательность содержит 8 чётных чисел и 12 нечётных.

Возникшее противоречие показывает, что c обязано быть чётным. В частности, 1 получиться не может.

в) Далее считаем, что $c > 0$. Предположим, что $c = 2$. Тогда в произведении (23) ровно один из множителей по модулю равен 2, а все остальные по модулю равны 1. Иными словами, $a_m + b_m = \pm 2$ для некоторого m и $a_k + b_k = \pm 1$ для всех остальных k.

Числа a_m и b_m оба чётные или оба нечётные. В каждой из остальных девяти пар (a_k, b_k) одно число чётное, а другое нечётное. Стало быть, в последовательности $(a_1, \ldots, a_{10}, b_1 \ldots, b_{10})$ окажется или 11 чётных и 9 нечётных чисел (если a_m и b_m чётны), или, наоборот, 9 чётных и 11 нечётных чисел (если a_m и b_m нечётны). Но, как было указано выше, чётных и нечётных чисел в этой последовательности имеется 8 и 12 соответственно.

Значит, случай $c = 2$ невозможен. Поскольку c чётно, имеем оценку: $c \geqslant 4$.

Приведём пример, в котором достигается равенство $c = 4$. Пусть сначала на карточках написаны числа в исходном порядке:

$$1,\ -2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 7,\ -8,\ 9,\ 10,\ -11.$$

Затем на тех же карточках оказались числа:

$$-2,\ 1,\ 4,\ -3,\ 7,\ -5,\ 9,\ -8,\ -11,\ 10.$$

Получаем:

$$c = (1-2)(-2+1)(-3+4)(4-3)(-5+7)(7-5)(-8+9)(9-8)(10-11)(-11+10) = 4.$$

Следовательно, наименьшее неотрицательное значение c равно 4.

13. [Условие]

Ответ: а) 1; б) 39.

Решение. а) В последовательности не менее одного члена. Но последовательность, состоящая из одного числа 163, удовлетворяет условию задачи. Поэтому наименьшее возможное число членов последовательности равно 1.

б) Заметим прежде всего, что последовательность не может состоять только из чередующихся чисел 1 и 7. В самом деле, если такая последовательность содержит чётное число членов, то её сумма делится на 8. Если же число членов нечётно, то при делении суммы последовательности на 8 могут получиться только остатки 1 или 7 — в случаях $(1, 7, \ldots, 1, 7, 1)$ и $(7, 1, \ldots 7, 1, 7)$ соответственно. Однако число 163 при делении на 8 даёт остаток 3.

Стало быть, в последовательности имеется число b, отличное от 1 и 7. Ясно, что $b \geqslant 11$.

Покажем, что в последовательности не может быть более 39 чисел. Предположим обратное: пусть в последовательности имеется не менее 40 членов. Первые 40 чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_{40} этой последовательности разобьём на пары: (a_1, a_2), (a_3, a_4), $\ldots$, (a_{39}, a_{40}). Имеются две возможности.

1. Число b не попадает ни в одну из этих первых 20 пар. Поскольку сумма чисел в каждой паре не менее 8, сумма всех членов последовательности будет не менее $8 \cdot 20 + b \geqslant 171$ вопреки условию.

2. Число b попадает в одну из первых 20 пар. Сумма чисел в этой паре не менее $1 + 11 = 12$, сумма чисел во всех оставшихся 19 парах не менее $19 \cdot 8 = 152$. Тогда сумма последовательности оказывается не менее $12 + 152 = 164$, а это снова противоречит условию.

Таким образом, последовательность содержит менее 40 членов. Предъявим пример последовательности, удовлетворяющей условию и состоящей из 39 членов. Она состоит из 19 пар $(7, 1)$ и заканчивается числом 11:

$$\underbrace{7, 1, 7, 1, \ldots, 7, 1}_{19\text{ пар}}, 11.$$

Действительно, сумма такой последовательности равна $19 \cdot 8 + 11 = 163$.

Итак, наибольшее возможное число членов последовательности равно 39.

14. [Условие]

Ответ: а) нет; б) да; в) через 8 минут.

Решение. а) Все числа, которые выписывает Вася, будут делиться на 7. Но число 2012 не делится на 7 и потому никогда не появится на доске.

б) ► Поскольку все числа, появляющиеся на доске, кратны 7, можно убрать множитель 7 и начать с единицы. Таким образом, нам нужно получить в сумме число 63 : 7 = 9. Пример строится легко:

$$1 \to 2\,(=1\cdot 2) \to 4\,(=2\cdot 2) \to 2\,(=1\cdot 2); \quad 1+2+4+2=9.$$

Построив нужный пример для числа 9, мы умножаем все числа на 7 и приводим пример для 63. ◄

Да, может. Пример:

$$7 \to 14\,(=7\cdot 2) \to 28\,(=14\cdot 2) \to 14\,(=7\cdot 2); \quad 7+14+28+14=63.$$

в) Поскольку все числа возникающей последовательности имеют общий множитель 7, мы можем все члены последовательности разделить на 7. Таким образом, сначала на доске написано число 1, Вася совершает описанные в условии операции, и вопрос ставится так: через какое наименьшее время на доске может появиться число 112 (=784 : 7)?

► Чувствуется, что мы доберёмся до 112 за наименьшее время, если будем умножать последнее число на 2 столько, сколько возможно. Начинаем:

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64.$$

Дальше умножать на 2 уже нельзя, поэтому ограничиваемся сложением: $64+32=96$, $96+16=112$. Остаётся доказать «минимальность» найденной последовательности. ◄

Покажем, что семи минут Васе не хватит. Через семь минут на доске будет последовательность 1, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7. Если при переходе к числу a_{k+1} число a_k не умножается на 2, то оно увеличивается максимум в полтора раза (когда к нему прибавляется предыдущее число). Поэтому имеем: $a_1=2$, $a_2 \leqslant 4$, $a_3 \leqslant 8$, $a_4 \leqslant 16$, $a_5 \leqslant 32$, $a_6 \leqslant 64$ и, наконец, $a_7 \leqslant 64+32=96<112$.

Вася может уложиться в восемь минут. Пример:

$$1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{3} 8 \xrightarrow{4} 16 \xrightarrow{5} 32 \xrightarrow{6} 64 \xrightarrow{7} 96 \xrightarrow{8} 112.$$

Таким образом, число 112 может появиться самое меньшее через восемь минут.

15. [Условие]

Ответ: а) да; б) нет; в) 11.

Решение. а) Приведём пример арифметической прогрессии из 50 членов, содержащей ровно 6 целых чисел. Первый член равен 1/8, разность прогрессии тоже равна 1/8:

$$\underbrace{\frac{1}{8},\,\frac{2}{8},\,\ldots,\frac{7}{8},1,}_{8\text{ чисел}}\underbrace{1\frac{1}{8},\,1\frac{2}{8},\,\ldots,1\frac{7}{8},2,}_{8\text{ чисел}}\ \ldots,\underbrace{5\frac{1}{8},\,5\frac{2}{8},\,\ldots,5\frac{7}{8},6,}_{8\text{ чисел}}\ 6\frac{1}{8},\,6\frac{2}{8}\,.$$

б) Предположим, что прогрессия содержит ровно 29 целых чисел. В таком случае у неё нецелая разность (иначе все члены прогрессии были бы или целыми, или нецелыми), и потому вслед за целым числом идёт нецелое. Следовательно, прогрессия содержит также как минимум 28 нецелых чисел. Всего членов прогресии получается не менее $29+28=57>50$ — противоречие. Значит, прогрессия не может содержать ровно 29 целых чисел.

в) ► Попробуем представить себе, как может быть устроена арифметическая прогрессия, в которой имеется k целых чисел, а остальные — нецелые. Вообще говоря, так:

$$\underbrace{*\ldots*}_{p}\ \boxed{z_1}\ \underbrace{*\ldots*}_{m}\ \boxed{z_2}\ \underbrace{*\ldots*}_{m}\ \boxed{z_3}\ \cdots\ \boxed{z_{k-1}}\ \underbrace{*\ldots*}_{m}\ \boxed{z_k}\ \underbrace{*\ldots*}_{q}$$

Здесь z_1, z_2, $\ldots$, z_k — целые числа, а звёздочками обозначены нецелые числа. Таким образом, между каждой парой соседних целых чисел расположено одно и то же количество m нецелых; кроме того, прогрессия может начинаться с p нецелых чисел и заканчиваться q нецелыми числами ($p, q \leqslant m$).

Если всего имеется 50 членов прогрессии, то выполнено соотношение

$$50 = k + (k-1)m + p + q.$$

Располагая этими наводящими соображениями, можно переходить к строгим доказательствам. ◄

Покажем, что прогрессия может содержать ровно 1, 2, $\ldots$, 10 целых чисел. Нетрудно было бы привести десять конкретных примеров, но нам поможет сэкономить время и место следующая лемма.

Лемма. Предположим, что выполнено равенство

$$50 = k + (k-1)m + p + q, \tag{24}$$

где k и m — натуральные числа, а p и q — целые числа, удовлетворяющие условию $0 \leqslant p, q \leqslant m$. Тогда существует арифметическая прогрессия из 50 чисел, содержащая ровно k целых чисел.

Доказательство. Приведём пример нужной прогрессии. Её первый член равен $1 - \frac{p}{m+1}$, а разность равна $\frac{1}{m+1}$:

$$\underbrace{1-\frac{p}{m+1}, \ldots, 1-\frac{1}{m+1}}_{p},$$

$$1,\ \underbrace{1+\frac{1}{m+1}, \ldots, 1+\frac{m}{m+1}}_{m},$$

$$2,\ \underbrace{2+\frac{1}{m+1}, \ldots, 2+\frac{m}{m+1}}_{m},$$

$$\ldots$$

$$k-1,\ \underbrace{k-1+\frac{1}{m+1}, \ldots, k-1+\frac{m}{m+1}}_{m},$$

$$k, \underbrace{k+\frac{1}{m+1}, \ldots, k+\frac{q}{m+1}}_{q}.$$

Эта прогрессия содержит k целых чисел: $1, 2, \ldots, k$. Остальные выписанные числа являются нецелыми. Всего выписано чисел: $p + k + (k-1)m + q = 50$. Лемма доказана.

Теперь выпишем десять представлений числа 50 в виде (24):

$$50 = 1 + 0\cdot 49 + 49 + 0 \quad (k=1,\ m=49,\ p=49,\ q=0),$$

$$
\begin{aligned}
50 &= 2+1\cdot 48+0+0 \quad (k=2,\ m=48,\ p=0,\ q=0),\\
50 &= 3+2\cdot 23+1+0 \quad (k=3,\ m=23,\ p=1,\ q=0),\\
50 &= 4+3\cdot 14+4+0 \quad (k=4,\ m=14,\ p=4,\ q=0),\\
50 &= 5+4\cdot 11+1+0 \quad (k=5,\ m=11,\ p=1,\ q=0),\\
50 &= 6+5\cdot 8+4+0 \quad (k=6,\ m=8,\ p=4,\ q=0),\\
50 &= 7+6\cdot 7+1+0 \quad (k=7,\ m=7,\ p=1,\ q=0),\\
50 &= 8+7\cdot 6+0+0 \quad (k=8,\ m=6,\ p=0,\ q=0),\\
50 &= 9+8\cdot 5+1+0 \quad (k=9,\ m=5,\ p=1,\ q=0),\\
50 &= 10+9\cdot 4+4+0 \quad (k=10,\ m=4,\ p=4,\ q=0).
\end{aligned}
$$

Из леммы следует тогда, что наша прогрессия может содержать ровно 1, 2, ..., 10 целых чисел.

► Если $k = 11$, то число 50 не получается представить в виде (24). Это наводит на мысль, что 11 является искомым числом. ◄

Теперь покажем, что в нашей прогрессии не может быть ровно 11 целых чисел. Предположим обратное: прогрессия из 50 чисел содержит ровно 11 целых чисел.

Ясно, что разность прогрессии d является нецелым рациональным числом. В самом деле, если a_s и $a_t > a_s$ — соседние целые члены прогрессии, то $d = (a_t - a_s)/(t - s)$. Запишем d в виде несократимой дроби: $d = \frac{l}{m+1}$ (l — целое, m — натуральное). Тогда между a_s и a_t находится в точности m нецелых чисел:

$$a_s + \frac{l}{m+1}\,,\ a_s + \frac{2l}{m+1}\,,\ \ldots,\ a_s + \frac{ml}{m+1}\,.$$

Итак, в прогрессии имеется: 1) 11 целых чисел; 2) 10 промежутков между ними, содержащих по m нецелых чисел; 3) p нецелых чисел перед первым целым числом и q нецелых чисел после последнего целого числа ($0 \leqslant p, q \leqslant m$). Следовательно, должно быть выполнено равенство

$$50 = 11 + 10m + p + q,$$

или

$$10m + p + q = 39.$$

Из этого равенства видно, что $m \leqslant 3$, и тогда $p + q \geqslant 9$. Но с другой стороны, оба числа p и q не превосходят m, поэтому $p + q \leqslant 6$. Полученное противоречие показывает, что в прогрессии не может быть ровно 11 целых чисел.

Таким образом, наименьшее число n, при котором наша прогрессия не может содержать ровно n целых чисел, равно 11.

16. [Условие]

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Решение. а) Предположим, что в последовательности три члена. Тогда она имеет вид: $1, a, 2046$.

Если эти числа образуют арифметическую прогрессию, то $2a = 1 + 2046 = 2047$. Противоречие: левая часть чётна, а правая нечётна.

Если эти числа образуют геометрическую прогрессию, то $a^2 = 1 \cdot 2046 = 2046$. Снова противоречие: 2046 не является квадратом натурального числа ($45^2 = 2025 < 2046 < 46^2 = 2116$).

Поэтому три члена в последовательности быть не может.

б) Предположим, что в последовательности четыре члена: $1, a, b, 2046$. Возможны четыре случая.

1. Первые три числа образуют арифметическую прогрессию и вторые три числа образуют арифметическую прогрессию (то есть все четыре числа образуют арифметическую прогрессию). Тогда имеем:
$$2a = 1 + b, \quad 2b = a + 2046.$$
Выражаем b из первого равенства и подставляем во второе:
$$b = 2a - 1 \Rightarrow 4a - 2 = a + 2046 \Rightarrow 3a = 2048.$$
Противоречие: левая часть делится на 3, а правая не делится.

2. Первые три числа образуют арифметическую прогрессию, а вторые три числа образуют геометрическую прогрессию. Тогда:
$$2a = 1 + b, \quad b^2 = 2046a.$$
После исключения b:
$$(2a - 1)^2 = 2046a.$$
Слева стоит квадрат нечётного числа, который также является нечётным числом. Справа стоит чётное число. Противоречие.

3. Первые три числа образуют геометрическую прогрессию, вторые три числа образуют арифметическую прогрессию. Тогда:
$$a^2 = b, \quad 2b = a + 2046.$$
Приходим к квадратному уравнению: $2a^2 - a - 2046 = 0$. Его дискриминант 16369 не является квадратом натурального числа ($127^2 < 16369 < 128^2$). Значит, это уравнение не имеет натуральных корней.

4. Первые три числа образуют геометрическую прогрессию и вторые три числа образуют геометрическую прогрессию (то есть все четыре числа образуют геометрическую прогрессию). Тогда:
$$a^2 = b, \quad b^2 = 2046a.$$
Отсюда $a^4 = 2046a$, то есть $a^3 = 2046$. Это невозможно, поскольку 2046 не является кубом натурального числа ($12^3 < 2046 < 13^3$).

Итак, в каждом случае получаем противоречие. Следовательно, данная последовательность не может состоять из четырёх членов.

в) В последовательности может быть менее 2046 членов. Вот пример арифметической прогрессии из шести чисел: 1, 410, 819, 1228, 1637, 2046.

► Сконструируем арифметическую прогрессию с первым членом 1 и n-м членом 2046. Пусть разность этой прогрессии равна d. Имеем:
$$2046 = 1 + (n - 1)d \Rightarrow (n - 1)d = 2045.$$
Полагаем $n = 6$, находим $d = 2045 : 5 = 409$ и выписываем прогрессию. ◄

17. [Условие]

Ответ: а) да; б) нет.

Решение. а) Да, может: 216, 252, 294, 343. Это геометрическая прогрессия со знаменателем $7/6$.

► Предположим, что четыре натуральных числа a, b, c, d образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии является несократимой дробью n/m с натуральными m и n:

$$a, \quad b=\frac{an}{m}\,, \quad c=\frac{an^2}{m^2}\,, \quad d=\frac{an^3}{m^3}\,.$$

Отсюда видно, что a делится на m^3, то есть $a=km^3$ для некоторого натурального k. Прогрессия приобретает вид:

$$km^3, \quad km^2n, \quad kmn^2, \quad kn^3.$$

Остаётся заметить, что $6^3=216>210$, $7^3=343<350$, и положить $k=1$, $m=6$, $n=7$.

Данный пример позволяет почувствовать также, что втиснуть в интервал от 210 до 350 пять чисел, образующих геометрическую прогрессию, уже вряд ли получится. Поэтому в пункте б) надо пытаться доказать, что это невозможно. ◄

б) Предположим, что прогрессия состоит из пяти натуральных чисел a, b, c, d, e. Знаменатель прогрессии является несократимой дробью n/m с натуральными m и n. Запишем нашу прогрессию так:

$$a, \quad b=\frac{an}{m}\,, \quad c=\frac{an^2}{m^2}\,, \quad d=\frac{an^3}{m^3}\,, \quad e=\frac{an^4}{m^4}\,.$$

Отсюда видно, что a делится на m^4, то есть $a=km^4$ для некоторого натурального k. Прогрессия, стало быть, имеет вид:

$$km^4, \quad km^3n, \quad km^2n^2, \quad kmn^3, \quad kn^4.$$

Без ограничения общности считаем прогрессию возрастающей, так что $n>m$. Поскольку все члены прогрессии находятся между числами 210 и 350, имеем:

$$km^4>210, \tag{25}$$
$$kn^4<350. \tag{26}$$

Из неравенства (26) следует, что n может принимать только значения 2, 3 или 4. Рассмотрим эти три случая по отдельности.

- $n=2$. Тогда $m=1$. Имеем:

$$(25) \;\Rightarrow\; k>210;$$
$$(26) \;\Rightarrow\; k<\frac{350}{2^4}<21.$$

  Противоречие.

- $n=3$. Тогда $m=1$ или $m=2$. Имеем:

$$(25) \;\Rightarrow\; k>\frac{210}{2^4}>13;$$
$$(26) \;\Rightarrow\; k<\frac{350}{3^4}<5.$$

  Противоречие.

- $n=4$. Тогда $m=1,2$ или 3. Имеем:

$$(25) \;\Rightarrow\; k>\frac{210}{3^4}>2;$$
$$(26) \;\Rightarrow\; k<\frac{350}{4^4}<2.$$

  Снова противоречие.

Полученные противоречия показывают, что прогрессия не может состоять из пяти членов.

18. [Условие]

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Решение. Разложим число 1512 на простые множители:

$$1512 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7. \tag{27}$$

Пусть также $1512 = c_1c_2c_3c_4c_5$, где $c_1, \ldots, c_5$ — различные натуральные числа.

а) Предположим, что все пять чисел $c_1, \ldots, c_5$ образуют геометрическую прогрессию. Поскольку все эти числа натуральные, знаменатель прогрессии является несократимой дробью n/m с натуральными m и n. Запишем нашу прогрессию так:

$$c_1, \quad c_2 = c_1\frac{n}{m}, \quad c_3 = c_1\frac{n^2}{m^2}, \quad c_4 = c_1\frac{n^3}{m^3}, \quad c_5 = c_1\frac{n^4}{m^4}.$$

Отсюда видно, что c_1 делится на m^4, то есть $c_1 = km^4$ для некоторого натурального k. Тогда наша прогрессия приобретает вид:

$$c_1 = km^4, \quad c_2 = km^3n, \quad c_3 = km^2n^2, \quad c_4 = kmn^3, \quad c_5 = kn^4.$$

Не теряя общности, можно считать, что прогрессия возрастающая. Тогда $n > m$. Перемножая числа $c_1, \ldots, c_5$, получим:

$$1512 = k^5m^{10}n^{10}.$$

Выходит, что 1512 делится на десятую степень некоторого натурального числа $n > 1$. Но разложение (27) числа 1512 на простые множители не содержит множителей в десятой степени. Полученное противоречие показывает, что числа $c_1, \ldots, c_5$ не могут образовывать геометрическую прогрессию.

б) Предположим, что числа c_1, c_2, c_3, c_4 образуют возрастающую геометрическую прогрессию:

$$c_1, \quad c_2 = c_1\frac{n}{m}, \quad c_3 = c_1\frac{n^2}{m^2}, \quad c_4 = c_1\frac{n^3}{m^3}.$$

Число c_1 делится на m^3, то есть $c_1 = km^3$ ($k \in \mathbb{N}$). Следовательно, прогрессия имеет вид:

$$c_1 = km^3, \quad c_2 = km^2n, \quad c_3 = kmn^2, \quad c_4 = kn^3.$$

Перемножаем числа $c_1, \ldots, c_5$:

$$1512 = k^4m^6n^6c_5.$$

Снова получаем противоречие: 1512 не может делиться на шестую степень натурального числа $n > 1$. Поэтому ответ на вопрос пункта б) — отрицательный.

► Заметим, что из пункта б) следует пункт а). В самом деле, если среди сомножителей $c_1, \ldots, c_5$ не найдётся четырёх членов геометрической прогрессии, то пяти членов не найдётся и подавно. Поэтому решение можно было бы начать сразу с пункта б). Мы привели отдельное решение для пункта а) из методических соображений. ◄

в) Предъявляем соответствующий пример: $4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 1 = 1512$. Числа 4, 6, 9 образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $3/2$.

► Пример найден следующим образом. Предположим, что числа c_1, c_2, c_3 образуют геометрическую прогрессию:

$$c_1 = km^2, \quad c_2 = kmn, \quad c_3 = kn^2.$$

Тогда $1512 = k^3 m^3 n^3 c_4 c_5$. Глядя на разложение (27) числа 1512 на простые множители, берём $k = 1$, $m = 2$, $n = 3$, $c_4 = 7$, $c_5 = 1$. ◀

19. [Условие]

Ответ: 155.

Решение. Числа вида $n(n+1)/2$ будем называть запрещёнными. Вот начало последовательности запрещённых чисел: 1, 3, 6, 10, 15, ...

Пусть a и d — первый член и разность арифметической прогрессии. Так как число 1 запрещённое, то $a \geqslant 2$. Так как члены прогрессии — различные натуральные числа, то $d > 0$.

Если $d = 1$, то прогрессия будет содержать запрещённое число — например, 10. Если $d = 2$, то прогрессия также будет содержать запрещённое число — например, 10 для чётного a и 15 для нечётного a. Стало быть, $d \geqslant 3$.

Сумма S первых 10 членов прогрессии равна:

$$S = \frac{2a + 9d}{2} \cdot 10 = 10a + 45d.$$

С учётом полученных неравенств имеем оценку:

$$S \geqslant 10 \cdot 2 + 45 \cdot 3 = 155.$$

Нижнее значение 155 нашей оценки реализуется для прогрессии с $a = 2$ и $d = 3$ (то есть для прогрессии $2, 5, 8, \ldots$). Остаётся показать, что эта прогрессия не содержит запрещённых чисел.

Под номером k в данной прогрессии идёт число $2 + 3(k - 1) = 3k - 1$. Нам нужно доказать, что равенство

$$3k - 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

невозможно ни при каких k и n. Перепишем это равенство в виде:

$$6k = n(n+1) + 2.$$

Число n при делении на 3 может давать остатки 0, 1 или 2. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1. $n = 3m \Rightarrow 6k = 3m(3m + 1) + 2$.
2. $n = 3m + 1 \Rightarrow 6k = (3m + 1)(3m + 2) + 2 = 9m^2 + 9m + 4$.
3. $n = 3m + 2 \Rightarrow 6k = (3m + 2)(3m + 3) + 2 = 3(3m + 2)(m + 1) + 2$.

Всюду имеем противоречие: левая часть $6k$ делится на 3, а правая часть на 3 не делится (остаток 2 в первом и третьем случаях, остаток 1 во втором случае).

Таким образом, прогрессия $2, 5, 8, \ldots$ действительно не содержит запрещённых чисел. Поскольку для неё $S = 155$, то 155 — наименьшее значение величины S.

20. [Условие]

Ответ: а) да; б) нет.

Решение. Если среднее арифметическое любых 27 чисел набора меньше 2, то сумма любых 27 чисел набора меньше $27 \cdot 2 = 54$. Будучи натуральным числом, эта сумма не превосходит 53.

Обозначим S максимальную сумму 27 чисел данного набора. Итак, $S \leqslant 53$.

а) Да, может. Такой набор содержит 13 единиц, 17 двоек и 3, 4, 5. Для него, очевидно,

$$S = 3 + 4 + 5 + 17 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 53.$$

► Наводящее соображение очень простое. Если есть ровно 13 единиц и 3, 4, 5, то оставшиеся 17 вакансий заполняются как минимум двойками. Вот и возьмём набор с этими 17-ю двойками! Ясно, что максимальная сумма S получится, если в качестве слагаемых взять 3, 4, 5 и все двойки, добрав остаток единицами. ◄

б) Предположим, что набор содержит k единиц ($0 \leqslant k \leqslant 12$). Остальные $30 - k$ чисел набора (помимо 3, 4, 5) назовём вакантными. Вакантных чисел, стало быть, не менее 18, и каждое вакантное число не меньше 2.

Таким образом, наш набор содержит 3, 4, 5 и восемнадцать чисел, не меньших 2; остальные числа набора не меньше 1. Для максимальной суммы S тогда получаем:

$$S \geqslant 3 + 4 + 5 + 18 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 54.$$

Данное неравенство показывает, что набор не может содержать менее 13 единиц.

в) Заметим сразу, что если набор содержит не менее 16 единиц, то $16 \cdot 1 + 3 + 4 + 5 = 28$. Поэтому остаётся разобрать случаи, когда количество k единиц в наборе менее 16.

Остальные $30 - k$ чисел (помимо 3, 4, 5) продолжаем называть вакантными.

- $k = 13$. Легко видеть, что набор, предъявленный в пункте а), оказывается единственным набором с ровно тринадцатью единицами. В самом деле, для любого другого такого набора сумма 17-ти вакантных чисел будет больше $17 \cdot 2 = 34$, и сумма S станет больше 53.

  А для предъявленного набора имеем: $3 + 4 + 5 + 8 \cdot 2 = 28$.

- $k = 14$ или $k = 15$. Заметим, что среди вакантных чисел обязательно найдётся двойка. В самом деле, иначе все вакантные числа (которых, соответственно, 16 или 15) будут не меньше 3, и тогда их сумма окажется как минимум $15 \cdot 3 = 45$, что противоречит условию.

  Остаётся взять 14 единиц и эту двойку: $14 \cdot 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 28$.

Доказательство закончено.

21. [Условие]

Ответ: а) 48; б) отрицательных; в) 12.

Решение. Напомним, что среднее арифметическое нескольких чисел есть сумма этих чисел, делённая на их количество.

Пусть на доске написано n чисел. Тогда их сумма: $S = -7n$. Обозначим: p — количество положительных чисел, m — количество отрицательных чисел, z — количество нулей. Таким образом, $n = p + m + z$.

Пусть S_+ и S_- — суммы положительных и отрицательных чисел соответственно. Имеем: $S_+ = 6p$, $S_- = -12m$, и так как $S = S_+ + S_-$, то:

$$-7n = 6p - 12m.$$

а) Правая часть данного равенства делится на 6. Поскольку 6 и 7 взаимно просты, число n делится на 6. Между числами 42 и 54 есть только одно такое число: $n = 48$.

б) Из равенства $-7 \cdot 48 = 6p - 12m$ получаем после сокращения на 6:

$$2m - p = 56.$$

Кроме того:

$$p + m + z = 48.$$

Сложим полученные равенства: $3m + z = 104$. Так как 104 при делении на 3 дает остаток 2, число z также даёт остаток 2: $z = 3k + 2$. Отсюда: $3m + 3k + 2 = 104$, или

$$m = 34 - k.$$

Соответственно,

$$p = 2m - 56 = 2(34 - k) - 56 = 12 - 2k.$$

Составляем разность: $p - m = (12 - 2k) - (34 - k) = -22 - k < 0$, так что $p < m$ — отрицательных чисел написано больше.

в) Из равенства $p = 12 - 2k$ видим, что $p \leqslant 12$.

Приведём пример с $p = 12$ (тогда $k = 0$, $z = 2$, $m = 34$). Пусть написано 12 чисел 6, 34 числа -12 и два нуля. Этот набор удовлетворяет условию задачи: среднее арифметическое положительных чисел равно, очевидно, 6; среднее арифметическое отрицательных чисел равно -12, а среднее арифметическое всех чисел:

$$\frac{12 \cdot 6 + 34 \cdot (-12)}{48} = -7.$$

Следовательно, наибольшее возможное количество положительных чисел равно 12.

22. [Условие]

Ответ: 1 и 4455.

Решение. В первом наборе девять чисел; обозначим $a_1 = \pm 11$, $a_2 = \pm 12$, ..., $a_9 = \pm 19$. Во втором наборе шесть чисел; обозначим $b_1 = \pm 3$, $b_2 = \pm 4$, ..., $b_6 = \pm 8$. Знак каждого числа можно выбрать любым — тем самым мы и добьёмся произвольности знака каждого из 54 произведений.

Согласно условию задачи имеем сумму:

$$\begin{aligned} S = a_1b_1 + a_1b_2 + \ldots + a_1b_9 +& \\ + a_2b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_2b_9 +& \\ \ldots \\ + a_6b_1 + a_6b_2 + \ldots + a_6b_9.& \end{aligned}$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned} S &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_6)b_1 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_6)b_2 + \ldots + (a_1 + a_2 + \ldots + a_6)b_9 = \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_6)(b_1 + b_2 + \ldots + b_9) = AB, \end{aligned}$$

где

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_6, \quad B = b_1 + b_2 + \ldots + b_9.$$

1) Очевидно, что величина S окажется наибольшей, если все числа взять с плюсом:

$$S_{\max} = (11 + 12 + \ldots + 19)(3 + 4 + \ldots + 8) = 4455.$$

2) Среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_9$ имеется ровно пять нечётных. Среди чисел $b_1, b_2, \ldots, b_6$ имеется ровно три нечётных. Следовательно, при любом выборе знака каждого из этих чисел оба числа A и B окажутся нечётными, так что S не может равняться нулю. Поэтому имеем оценку: $|S| \geqslant 1$.

Приведём пример расстановки знаков, когда $S = 1$:

$$(11 + 12 - 13 + 14 + 15 + 16 - 17 - 18 - 19)(-3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8) = 1.$$

Значит, $|S|_{\min} = 1$.

► Идея нахождения нужной расстановки очевидна: добиться равенств $A = 1$ и $B = 1$. С величиной B всё просто: группируем числа последовательно в пары и нужным образом чередуем знаки.

Для величины A лучше начать суммировать с конца: $19+18+17 = 54$, $16+15+14 = 45$. Эти суммы отличаются на 9, и необходимое слагаемое 10 мы построим из оставшихся чисел: $11 + 12 - 13 = 10$. ◄

23. [Условие]

Ответ: 3 и 1161.

Решение. Первый набор содержит шесть чисел; пусть $a_1 = \pm 6$, $a_2 = \pm 7$, …, $a_6 = \pm 11$. Второй набор содержит девять чисел; пусть $b_1 = \pm 9$, $b_2 = \pm 10$, …, $b_9 = \pm 17$.

По условию имеем сумму:

$$\begin{aligned} S = &(a_1 + b_1) + (a_1 + b_2) + \ldots + (a_1 + b_9)+\\ &+ (a_2 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_2 + b_9)+\\ &\ldots\\ &+ (a_6 + b_1) + (a_6 + b_2) + \ldots + (a_6 + b_9). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$S = 9(a_1 + a_2 + \ldots + a_6) + 6(b_1 + b_2 + \ldots + b_9),$$

или

$$S = 9A + 6B,$$

где $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_6$ и $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_9$.

1) Очевидно, что сумма S будет наибольшей, если все числа взять с плюсом:

$$S_{\max} = 9 \cdot (6 + 7 + \ldots + 11) + 6 \cdot (9 + 10 + \ldots + 17) = 1161.$$

2) Заметим, что среди чисел $a_1, \ldots, a_6$ ровно три нечётных. Сумма нечётного числа нечётных чисел нечётна; значит, A нечётно. Поэтому и $S = 9A + 6B$ нечётно (поскольку $6B$ чётно).

Кроме того, S делится на 3 (поскольку $9A$ и $6B$ делятся на 3).

Наименьшее по модулю нечётное число, делящееся на 3, есть 3. Стало быть, $|S| \geqslant 3$ (оценка). Приведём пример расстановки знаков, при которой в оценке достигается равенство:

$$9 \cdot (-6 + 7 - 8 + 9 + 10 - 11) + 6 \cdot (-9 + 10 - 11 - 12 - 13 - 14 + 15 + 16 + 17) = 3.$$

Таким образом, $|S|_{\min} = 3$.

► Как мы додумались до этого примера? Сумма $9A + 6B$ равна трём, если, например $A = 1$ и $B = -1$. Получить для A значение 1 очень легко: просто группируем числа друг за другом в пары и чередуем нужным образом знаки.

Для величины B так не выйдет, поэтому начнём суммировать с конца: $17 + 16 + 15 = 48$. Теперь заметим, что $14 + 13 + 12 + 11 = 50$, что отличается от 48 на 2. Недостающую единицу сделаем из оставшихся чисел 9 и 10. ◄