Статья написана в соавторстве с А. Г. Малковой

Простейшие тригонометрические уравнения. 1

Простейшими называются тригонометрические уравнения следующих четырёх видов:

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

Любое тригонометрическое уравнение в конечном счёте сводится к решению одного или нескольких простейших. К сожалению, на этом заключительном стандартном шаге школьники допускают множество элементарных ошибок. Цель данной статьи — уберечь вас от нелепых и досадных потерь баллов в подобной ситуации на едином госэкзамене.

Существуют два подхода к решению простейших тригонометрических уравнений.

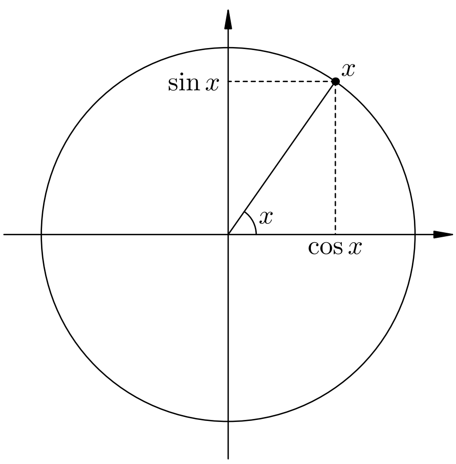
Первый подход — бессмысленный и тяжёлый. Надо выучить по шпаргалке общие формулы, а также все частные случаи. Польза от этого столь же невелика, как от зубрёжки шестнадцати строк заклинаний на непонятном языке. Мы забраковываем этот подход раз и навсегда.

Второй подход — логический и наглядный. Для решения простейших тригонометрических уравнений мы пользуемся тригонометрическим кругом и определениями тригонометрических функций.

Данный подход требует понимания, осмысленных действий и ясного видения тригонометрического круга. Не беспокойтесь, эти трудности преодолеваются быстро. Усилия, потраченные на этом пути, будут щедро вознаграждены: вы начнёте безошибочно решать тригонометрические уравнения.

Уравнения $\cos x = a$ и $\sin x = a$

Напомним, что $\cos x$ — абсцисса точки на единичной окружности, соответствующей углу x, а $\sin x$ — её ордината.

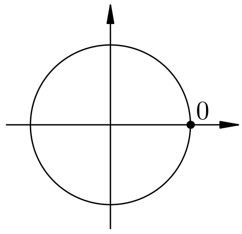


Из определения синуса и косинуса следует, что уравнения $\cos x = a$ и $\sin x = a$ имеют решения только при условии $|a| \leqslant 1$. Абитуриент, будь внимателен! Уравнения $\sin x = 3/2$ или $\cos x = -7$ решений не имеют!

Начнём с самых простых уравнений.

1. $\cos x = 1$.

Мы видим, что на единичной окружности имеется лишь одна точка с абсциссой 1:



Эта точка соответствует бесконечному множеству углов: 0, 2π, -2π, 4π, -4π, 6π, -6π, ... Все они получаются из нулевого угла прибавлением целого числа полных углов 2π (т. е. нескольких полных оборотов как в одну, так и в другую сторону).

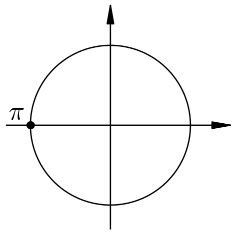
Следовательно, все эти углы могут быть записаны одной формулой:

$$x = 2\pi n,\ n \in Z.$$

Это и есть множество решений данного уравнения. Напоминаем, что Z — это множество целых чисел.

2. $\cos x = -1$.

Снова видим, что на единичной окружности есть лишь одна точка с абсциссой -1:

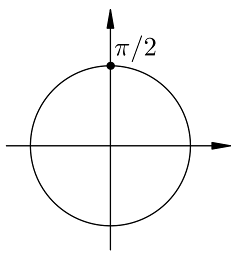


Эта точка соответствует углу π и всем углам, отличающихся от π на несколько полных оборотов в обе стороны, т. е. на целое число полных углов. Следовательно, все решения данного уравнения записываются формулой:

$$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

3. $\sin x = 1$.

Отмечаем на тригонометрическом круге единственную точку с ординатой 1:

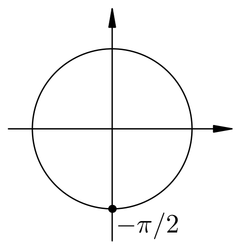


И записываем ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

4. $\sin x = -1$.

Обсуждать тут уже нечего, не так ли? :-)



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Можете, кстати, записать ответ и в другом виде:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

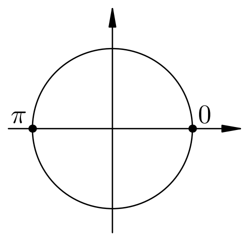
Это — дело исключительно вашего вкуса.

Заодно сделаем первое полезное наблюдение.

Чтобы описать множество углов, отвечающих одной-единственной точке тригонометрического круга, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить $2\pi n$.

5. $\sin x = 0$.

На тригонометрическом круге имеются две точки с ординатой 0:



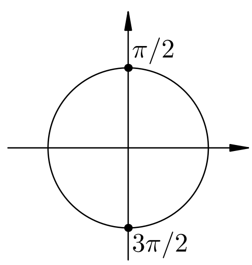
Эти точки соответствуют углам 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, … Все эти углы получаются из нулевого угла прибавлением целого числа углов π (т. е. с помощью нескольких полуоборотов в обе стороны). Таким образом,

$$x = \pi n,\ n \in Z.$$

Точки, лежащие на концах диаметра тригонометрического круга, мы будем называть *диаметральной парой.*

6. $\cos x = 0$.

Точки с абсциссой 0 также образуют диаметральную пару, на сей раз вертикальную:



Все углы, отвечающие этим точкам, получаются из $\pi/2$ прибавлением целого числа углов π (полуоборотов):

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

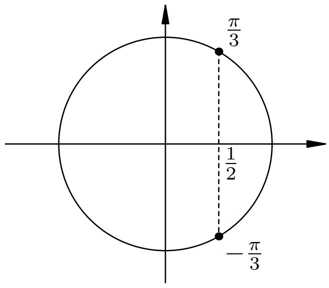
Теперь мы можем сделать и второе полезное наблюдение.

Чтобы описать множество углов, отвечающих диаметральной паре точек тригонометрического круга, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить πn.

Переходим к следующему этапу. Теперь в правой части будет стоять табличное значение синуса или косинуса (отличное от 0 или ±1). Начинаем с косинуса.

7. $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой 1/2:



Все углы, соответствующие верхней точке, описываются формулой (вспомните первое полезное наблюдение!):

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Аналогично, все углы, соответствующие нижней точке, описываются формулой:

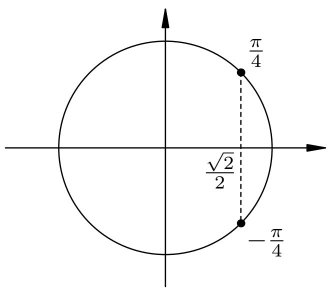
$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Обе серии решений можно описать одной формулой:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

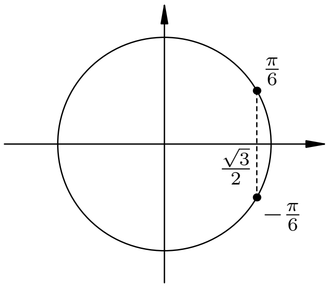
Остальные уравнения с косинусом решаются совершенно аналогично. Мы приводим лишь рисунок и ответ.

8. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



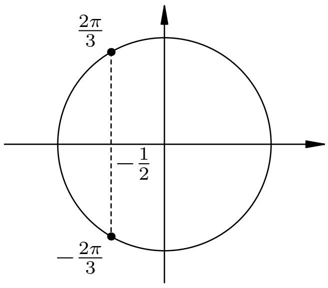
$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

9. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,.$



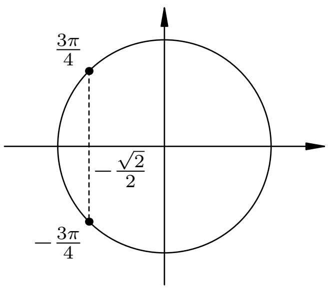
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

10. $\cos x = -\dfrac{1}{2}\,.$



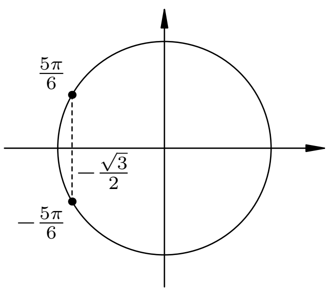
$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

11. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$



$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

12. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,.$

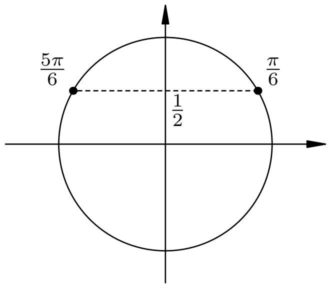


$$x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Теперь рассмотрим уравнения с синусом. Тут ситуация немного сложнее.

13. $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Имеем горизонтальную пару точек с ординатой $1/2$:



Углы, отвечающие правой точке:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Углы, отвечающие левой точке:

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Описывать эти две серии одной формулой никто не заставляет. Можно записать ответ в таком виде:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Тем не менее, объединяющая формула существует, и её надо знать. Выглядит она так:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

На первый взгляд совершенно не ясно, каким образом она даёт обе серии решений. Но давайте посмотрим, что получается при чётных k. Если $k = 2n$, то

$$x = (-1)^{2n} \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

Мы получили первую серию решений x_1. А если k нечётно, $k = 2n + 1$, то

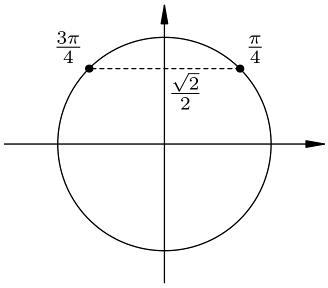
$$x = (-1)^{2n+1} \frac{\pi}{6} + \pi(2n + 1) = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n + \pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Это вторая серия x_2.

Обратим внимание, что в качестве множителя при $(-1)^k$ обычно ставится правая точка, в данном случае $\pi/6$.

Остальные уравнения с синусом решаются точно так же. Мы приводим рисунок, запись ответа в виде совокупности двух серий и объединяющую формулу.

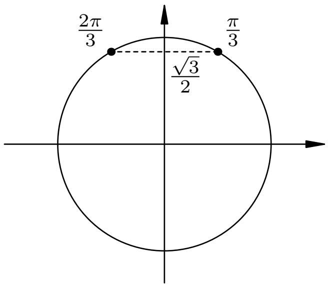
14. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$



$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\\ &x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^k\,\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

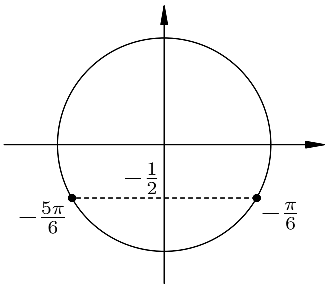
15. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,.$



$$\left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\\ &x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^k\,\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

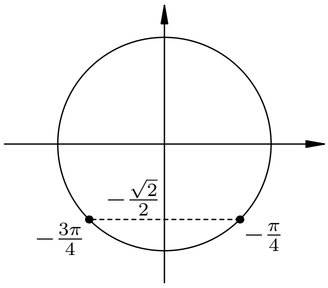
16. $\sin x = -\dfrac{1}{2}\,.$



$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\\ &x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k = (-1)^{k+1}\,\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

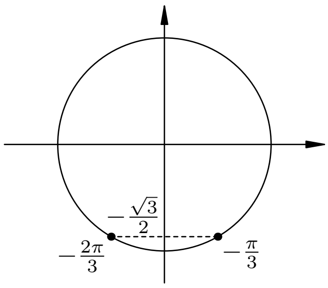
17. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ &x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1}\,\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$$

18. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



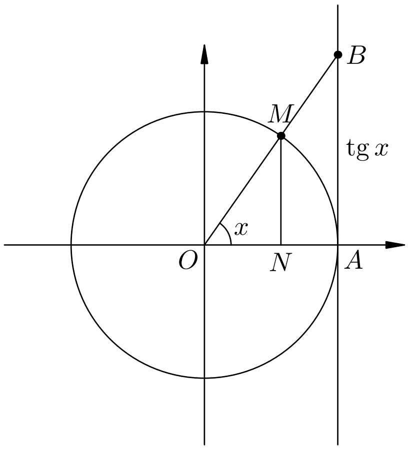
$$\left[\begin{aligned} &x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ &x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{aligned}\right.$$

$$x = (-1)^{k+1}\,\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

На этом с синусом и косинусом пока всё. Переходим к тангенсу.

Линия тангенсов

Начнём с геометрической интерпретации тангенса — так называемой линии тангенсов. Это касательная AB к единичной окружности, параллельная оси ординат (см. рисунок).



Из подобия треугольников OAB и ONM имеем:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{MN}{ON}\,.$$

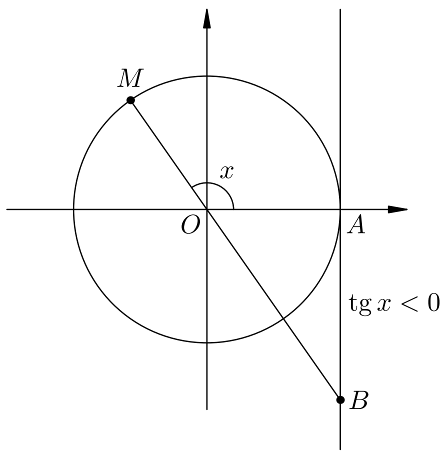
Но $OA = 1$, $MN = \sin x$, $ON = \cos x$, поэтому

$$AB = \operatorname{tg} x.$$

Мы рассмотрели случай, когда x находится в первой четверти. Аналогично рассматриваются случаи, когда x находится в остальных четвертях. В результате мы приходим к следующей геометрической интерпретации тангенса.

Тангенс угла x равен ординате точки B, которая является точкой пересечения линии тангенсов и прямой OM, соединяющей точку x с началом координат.

Вот рисунок в случае, когда x находится во второй четверти. Тангенс угла x отрицателен.

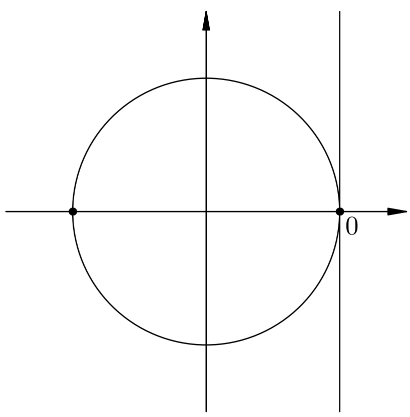


Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Заметим, что тангенс может принимать любые действительные значения. Иными словами, уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом a.

19. $\operatorname{tg} x = 0$.

Имеем диаметральную горизонтальную пару точек:

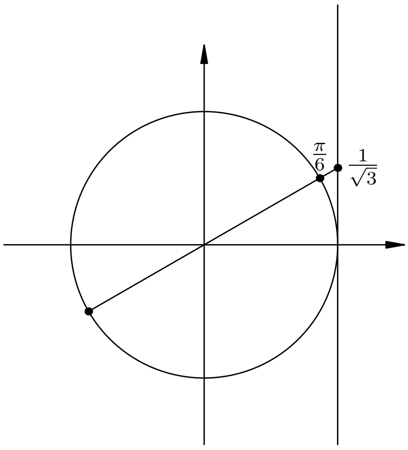


Эта пара, как мы уже знаем, описывается формулой:

$$x = \pi n,\ n \in Z.$$

20. $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Имеем диаметральную пару:

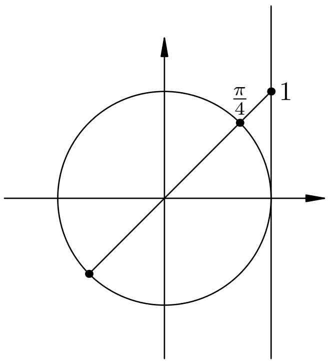


Вспоминаем второе полезное наблюдение и пишем ответ:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

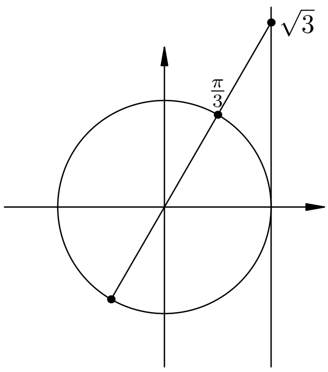
Остальные уравнения с тангенсом решаются аналогично. Мы приводим лишь рисунки и ответы.

21. $\operatorname{tg} x = 1$.



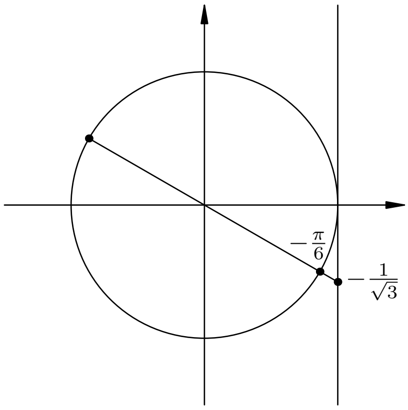
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

22. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.



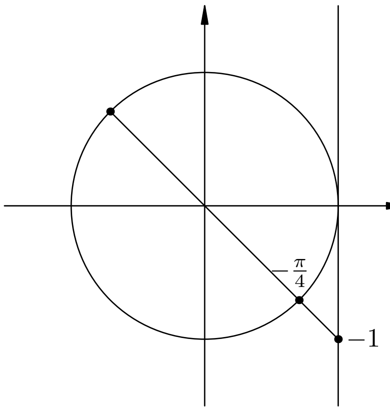
$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$$

23. $\operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



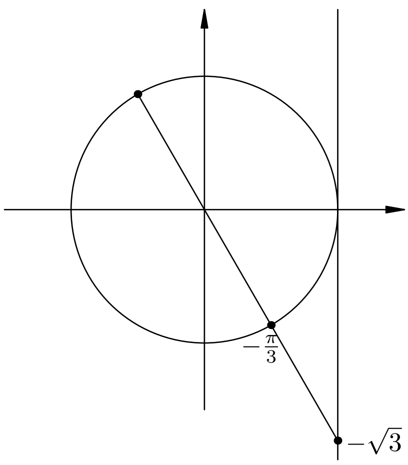
$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

24. $\operatorname{tg} x = -1$.



$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

25. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.



$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$$

На этом заканчиваем пока и с тангенсом.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ нет смысла рассматривать особо. Дело в том, что:

- уравнение $\operatorname{ctg} x = 0$ равносильно уравнению $\cos x = 0$;
- при $a \neq 0$ уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

Впрочем, существует также и линия котангенсов, но... Об этом мы вам расскажем на занятиях :-)

Итак, мы разобрали простейшие тригонометрические уравнения, содержащие в правой части табличные значения тригонометрических функций. Именно такие задачи встречаются в части B вариантов ЕГЭ.

А что делать, например, с уравнением $\sin x = \frac{1}{3}$? Для этого надо сначала познакомиться с обратными тригонометрическими функциями. О них мы расскажем вам в следующей статье.