Федеральное агентство по образованию РФ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

ПОСОБИЕ
ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть I. Планиметрия. Векторы

В помощь учащимся
10–11-х классов

Москва 2009

УДК 512(076)
ББК 22.143я7

Пособие по геометрии. Часть I. Планиметрия. Векторы. В помощь учащимся 10–11-х классов./ О.В. Нагорнов, А.В. Баскаков, О. Б. Баскакова, Н.В. Серебрякова. – М.: НИЯУ МИФИ, 2009. – 152 с.

Пособие составлено в соответствии со школьной программой углубленного изучения математики в 10–11-х классах и состоит из семи тем, в каждой из которых представлены необходимые сведения из теории и типовые задачи с решениями. Предлагаемые в достаточном количестве задачи для самостоятельного решения взяты из вариантов вступительных экзаменов в МИФИ, МАИ, ГУУ и другие вузы Москвы и Санкт-Петербурга.

Пособие предназначено для углубленного изучения математики. Работа с ним поможет подготовиться к участию в олимпиадах, поступлению в физико-математические лицеи и НИЯУ МИФИ. Учителя могут использовать данное пособие для подготовки к занятиям.

Рецензент проф. *Н.А. Кудряшов*

Рекомендовано редсоветом НИЯУ МИФИ
в качестве учебно-методического пособия

© *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2009*

ISBN 978-5-7262-1172-5

Содержание

I. ТРЕУГОЛЬНИКИ

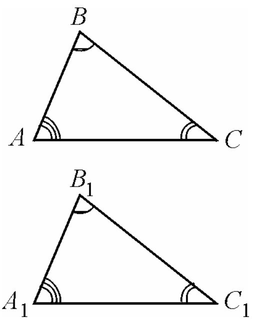
Часть 1. Признаки равенства треугольников. Углы треугольника. Соотношение между сторонами и углами треугольника. Средняя линия. Высота. Медиана. Биссектриса. Равнобедренные треугольники. Прямоугольные треугольники

Определения и теоремы

Определение. Треугольником называется часть плоскости, ограниченная тремя отрезками, соединяющими попарно три точки, не лежащие на одной прямой. Эти отрезки называются сторонами треугольника, а точки – вершинами треугольника. Углы, образованные сторонами треугольника, называются углами треугольника.

Определение. Два треугольника называются равными, если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника и углы, заключенные между соответственными сторонами равны.

Теорема I. *Признаки равенства треугольников.*



1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равен соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны:

$$AB = A_1B_1, \quad BC = B_1C_1,$$
$$\angle ABC = \angle A'B'C' \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1.$$

2. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны:

$$AC = A_1C_1, \ \angle BAC = \angle B_1A_1C_1,$$
$$\angle BCA = \angle B_1C_1A_1 \ \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1.$$

3. Если стороны одного треугольника равны соответственно сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны:

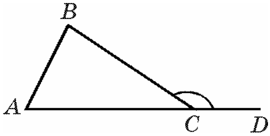
$$AB = A_1B_1, \ AC = A_1C_1, \ BC = B_1C_1 \Rightarrow \ \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1.$$

Теорема II. Сумма углов треугольника равна 180°:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

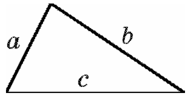
Определение. ***Внешним углом*** треугольника называется угол, дополняющий какой-либо из углов треугольника до развернутого ($\angle BCD$ – внешний угол ΔABC).

Теорема III. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним:



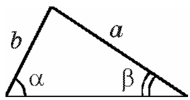
$$\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC.$$

Теорема IV. Сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны:



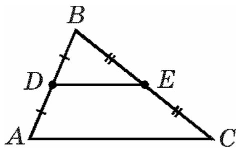
$$a + b > c;\quad a + c > b;\quad b + c > a.$$

Теорема V. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.



$$\angle\alpha > \angle\beta \Rightarrow a > b.$$

Определение. ***Средней линией*** треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.



D – середина AB, E – середина $BC \Rightarrow$

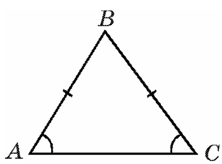
$\Rightarrow DE$ – средняя линия.

Теорема VI. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна ее половине.

$$DE \text{ – средняя линия} \Rightarrow DE \| AC,\quad |DE| = \frac{1}{2}|AC|.$$

Определение. Треугольник называется ***равнобедренным***, если две его стороны равны. Третья сторона в таком треугольнике называется *основанием*.

Теорема VII. В равнобедренном треугольнике углы основания равны.



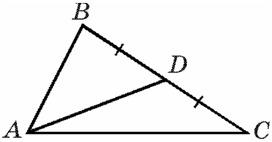
$$AB = BC \Rightarrow \angle BAC = \angle BCA.$$

Теорема VIII. Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник – равнобедренный.

$$\angle BAC = \angle BCA \Rightarrow AB = BC.$$

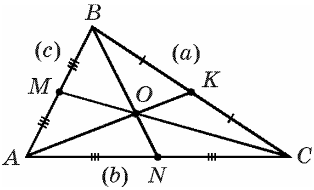
Определение. Треугольник называется ***равносторонним***, если все его стороны равны между собой.

Теорема IX. Каждый угол равностороннего треугольника равен $60°$.



Определение. ***Медианой*** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Теорема X. Медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины.

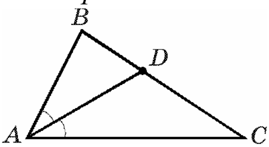


AK, BN, CM – медианы, точка O – центр пересечения этих медиан;

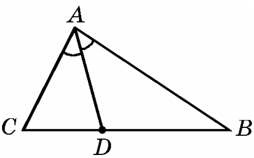
$$\frac{AO}{OK} = \frac{BO}{ON} = \frac{CO}{OM} = 2 .$$

Теорема XI. Медиана $AK = m_a$ треугольника, проведенная к стороне a, может быть вычислена по формуле $m_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, где a, b, c – стороны треугольника.

Определение. ***Биссектрисой*** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину с точкой, лежащей на противоположной стороне, и делящий внутренний угол треугольника пополам:



$\angle BAD = \angle CAD \Rightarrow AD$ – биссектриса.



Теорема XII. Биссектрисы произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

Теорема XIII. Биссектриса треугольника делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

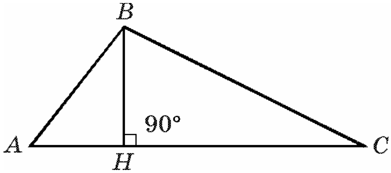
$$AD \text{ – биссектриса } \Rightarrow \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB}.$$

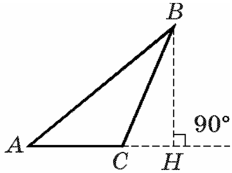
Теорема XIV. Квадрат биссектрисы треугольника равен произведению двух сторон треугольника без произведения отрезков, на которые делит третью сторону биссектрисы:

$$AD \text{ – биссектриса } \Rightarrow AD^2 = AC \cdot AB - CD \cdot DB.$$

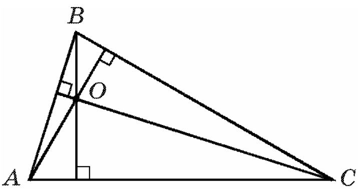
Определение. ***Высотой*** треугольника называется отрезок, перпендикулярный стороне треугольника, соединяющий противоположную вершину и точку, лежащую на этой стороне или на ее продолжении:

$$BH \perp AC \Rightarrow BH - \text{высота.}$$

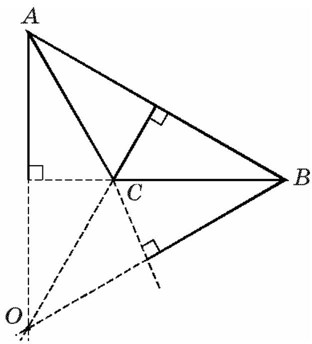


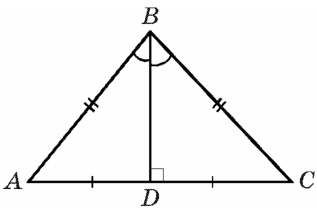


Теорема XV. Прямые, на которых лежат высоты произвольного треугольника, пресекаются в одной точке.



Точка O – точка пересечения высот.





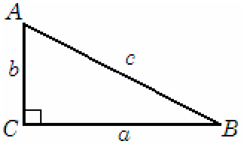
Теорема XVI. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой:

$$AB = BC, \quad BD - \text{медиана} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; BD - \text{высота и биссектриса.}$$

Определение. Треугольник называется ***остроугольным***, если *все* его *углы меньше 90°*.

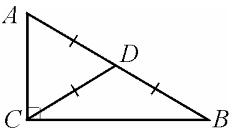
Треугольник называется ***тупоугольным***, если *один* из его углов *больше 90°*.

Треугольник называется ***прямоугольным***, если *один* из его углов *равен 90°*. Стороны треугольника образующего прямой угол, называются катетами, а сторона, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой.



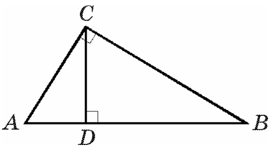
Теорема XVII. (Теорема Пифагора.) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$(ABC = 90^\circ \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$



Теорема XVIII. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы:

$$\angle ACB = 90^\circ,\ CD - \text{медиана} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AD = DB = CD.$$



Теорема XIX. (Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике.) Катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу:

$$\angle ACB = 90^\circ,\ CD - \text{высота} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC},$$

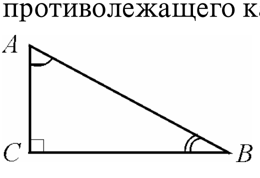
$$AC = \sqrt{AD \cdot AB}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}, \quad BC = \sqrt{BD \cdot AB}.$$

Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу:

$$\angle ACB = 90^\circ,\ CD - \text{высота} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB},$$

$$DC = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

Определение. ***Синусом*** острого угла называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:



$$\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \sin\angle A = \frac{BC}{AB}, \quad \sin\angle B = \frac{AC}{AB}.$$

Косинусом острого угла называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \cos\angle A = \frac{AC}{AB}, \quad \cos\angle B = \frac{BC}{AB}.$$

Тангенсом острого угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\angle ACB = 90° \Rightarrow \operatorname{tg}\angle A = \frac{BC}{AC}, \ \operatorname{tg}\angle B = \frac{AC}{BC}.$$

Котангенсом острого угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$\angle ACB = 90° \Rightarrow \operatorname{ctg}\angle A = \frac{AC}{BC}, \ \operatorname{ctg}\angle B = \frac{BC}{AC}.$$

Таблица значений тригонометрических функций некоторых острых углов

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

При вычислении тригонометрических функций от тупых углов удобно пользоваться так называемыми *формулами приведения*:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha; \quad \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \ \operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

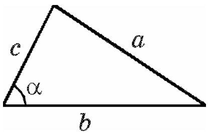
Например:

$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Свойство прямоугольного треугольника. Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.

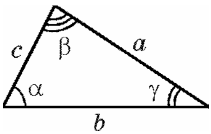
Теорема XX (теорема косинусов). Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha.$$

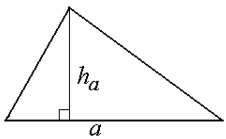
Следствие. Зная стороны треугольника, можно найти косинусы углов: $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Теорема XXI (теорема синусов). Отношения сторон треугольника к синусам противолежащих углов равны между собой:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Теорема XXII. Площадь треугольника равна половине произведения стороны, проведенной к ней высоты:

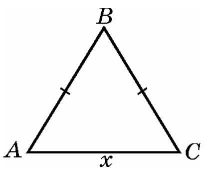


$$S = \frac{1}{2}\cdot h_a \cdot a.$$

Тогда площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

Примеры решения задач

Задача 1.1. Найти основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна 23, а периметр – 71.



Решение. Периметр треугольника $P_{\Delta ABC}$ равен $AB + BC + AC$. Обозначим $AC = x$. Тогда

$$P_{\Delta ABC} = AB + BC + x = 71, \quad AB = BC = 23.$$

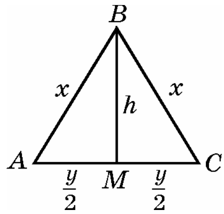
Отсюда $23 + 23 + x = 71$, $x = 71 - 46 = 25$.

Ответ: $AC = 25$.

Задача 1.2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота BM. Найти ее длину, если периметр $P_{\Delta ABC} = 70$, а периметр $P_{\Delta ABM} = 50$.

Решение. Введем обозначения: $AB = BC = x$, $BM = h$; $AC = y$. Поскольку высота в равнобедренном треугольнике совпадает с медианой, то $AM = MC = y/2$.

По условию $P_{\Delta ABM} = x + h + \dfrac{y}{2}$, откуда



$$x + \frac{y}{2} = 50 - h\,; \qquad (*)$$

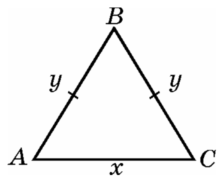
$$P_{\Delta ABC} = 2x + y = 70.$$

Преобразуем: $2x + y = 2\left(x + \dfrac{y}{2}\right)$. Тогда $2\left(x + \dfrac{y}{2}\right) = 70$, т. е. $x + \dfrac{y}{2} = 35$. Из (*) имеем $x + \dfrac{y}{2} = 50 - h$. Тогда $50 - h = 35$, т. е. $h = 15$.

Ответ: $BM = 15$.

Задача 1.3. В равнобедренном треугольнике основание относится к боковой стороне как $4:3$. Найти длину основания, если периметр треугольника равен 20.

Решение. Введем обозначения: $AB = BC = y$, $AC = x$. По условию $P_{\Delta ABC} = 2y + x = 20$; $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow 3x = 4y$. Получаем



$$\begin{cases} 4y = 3x, \\ 2y + x = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 3/2x, \\ 2y + x = 20. \end{cases}$$

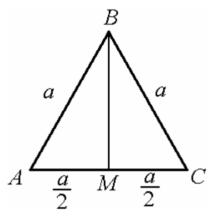
$$2y + x = 20; \qquad \frac{3}{2}x + x = 20,$$

$$\frac{5x}{2} = 20, \qquad x = 40:5 = 8.$$

Ответ: $AC = x = 8$.

Задача 1.4. Найти высоту и площадь равностороннего треугольника со стороной a.

Решение. Пусть BM – высота ΔABC. По свойствам высоты в равнобедренном Треугольнике BM – медиана данного треугольника. Тогда $AM = MC$. По условию $AC = a$. Следовательно, $AM = MC = \dfrac{a}{2}$. Так как $BM \perp AC$, то ΔAMB – прямоугольный. По теореме Пифагора

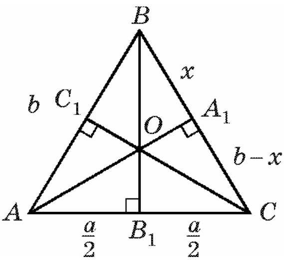


$$h = BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BM}{2} = \frac{a\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Результаты, полученные в задача 1.4 можно использовать как формулы для равностороннего (правильного) треугольника.



Задача 1.5. Найти высоты равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b.

Решение. Так как ΔABC – равнобедренный, то BB_1 – высота и $AB_1 = B_1C = \frac{a}{2}$, $BB_1 \perp AC$. Тогда AB_1B – прямоугольный. По теореме Пифагора

$$|BB_1| = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}.$$

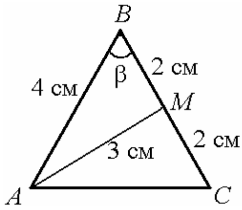
По условию AA_1 – высота треугольника ABC, проведенная к стороне BC. Значит, площадь $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC$. С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BB_1 \cdot AC$. Приравнивая правые части, получаем

$$AA_1 \cdot b = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} \cdot a \Rightarrow AA_1 = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}.$$

Ответ: $AA_1 = CC_1 = \frac{a}{2b}\sqrt{4b^2 - a^2}$; $BB_1 = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$.

Задача 1.6. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4 см, проведена медиана боковой стороны. Найти основание треугольника, если медиана равна 3 см.

Решение. I способ. Пусть ABC – равнобедренный треугольник, в котором проведена медиана AM на сторону BC. Тогда $BM = MC =$ $= 2$ см по свойству медианы.



Пусть $\angle ABC = \beta$. Применим к ΔABM, у которого все стороны даны, теорему косинусов:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot MB\cos\beta,$$

$$9 = 16 + 4 - 2\cdot 4\cdot 2\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{11}{16}.$$

Для нахождения стороны AC применим теорему косинусов к ΔABC. Получим

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\beta = 16 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4\frac{11}{16} = 10 \text{ см}^2,$$

$$AC = \sqrt{10} \text{ см}.$$

Ответ: $AC = \sqrt{10}$ см.

II способ. Основан на использовании формулы длины медианы:

$$AM^2 = \frac{AC^2}{2} + \frac{AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4},$$

откуда

$$9 = \frac{AC^2}{2} + \frac{4^2}{2} - \frac{4^2}{4} = \ 9 = \frac{AC^2}{2} + 8 - 4 \Rightarrow 5 = \frac{AC^2}{2},$$

$$AC^2 = 10 \quad \text{или} \quad AC = \sqrt{10}.$$

Ответ: $AC = \sqrt{10}$ см.

Задача 1.7. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника больше длины другого катета на 10 см, но меньше длины гипотенузы на 10 см. Найти длину гипотенузы этого треугольника.

Решение. Пусть x см и y см – длины катетов этого треугольника ($x > y$). По теореме Пифагора длина гипотенузы $\sqrt{x^2 + y^2}$. По условию

$$\begin{cases} x - y = 10, \\ \sqrt{x^2 + y^2} - x = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 10, \\ \sqrt{2x^2 - 20x + 100} = x + 10. \end{cases}$$

Откуда $x = 40, y = 30$, $\sqrt{x^2 + y^2}$ =50.

Ответ: 50 см.

Задача 1.8. Найти отношение длины гипотенузы прямоугольного треугольника к длине большего катета, если:

а) длины катетов относятся, как 3:7;

б) длина гипотенузы относится к длине меньшего катета, как 3:1.

Решение. Обозначим катеты a = 3x и b = 7x. По теореме Пифагора гипотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{58}x$. Отношение гипотенузы к большему катету $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{58}x}{7x} = \dfrac{\sqrt{58}}{7}$.

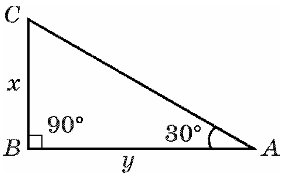
Пункт б) решите по аналогии.

Ответ: а) $\dfrac{\sqrt{58}}{7}$; б) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ $\left(\text{или } \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$.

Задача 1.9. В прямоугольном треугольнике один из углов равен $30°$, а сумма длин гипотенузы и меньшего катета равна 9 см. Найти длины гипотенузы и катетов.

Решение. Пусть дан прямоугольный ΔABC, у которого $\angle ABC$ = 90°, $\angle CAB$ = 30°. В этом случае гипотенуза в ΔABC в два раза больше меньшего катета $\left(BC = AC \cdot \sin 30° = \dfrac{AC}{2}\right)$.

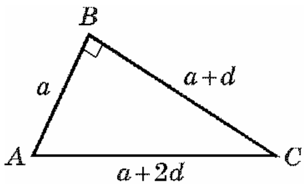
Обозначим BC через x, AB через y. Тогда CA = 2x. Из условия: x + 2x = 9 см, а по теореме Пифагора $x^2 + y^2 = CA^2$. Тогда имеем



систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = (2x)^2, \\ 3x = 9. \end{cases}$ Решая ее, находим CB = 3 см, $AB = 3\sqrt{3}$ см, AC = 6 см.

Ответ: 3 см, $3\sqrt{3}$ см, 6 см.

Задача 1.10. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найти величины острых углов этого треугольника.



Решение. Пусть a – первый член этой прогрессии, а d – разность. Тогда катеты и гипотенуза этого треугольника равны a, $a + d$ и $a + 2d$.

По теореме Пифагора

$$a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d)^2.$$

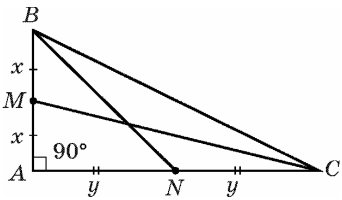
Отсюда $a^2 - 2ad - 3d = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{d}\right) - 3 = 0$, поскольку $\frac{a}{d} > 0$, то $\frac{a}{d} = 3 \Rightarrow d = \frac{a}{3}$. Таким образом, $AB = a$, $BC = \frac{4}{3}a$, $AC = \frac{5}{3}a$.

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению прилежащего катета к гипотенузе, т.е.

$$\cos\angle BAC = \frac{a}{5/3a} = \frac{3}{5}, \qquad \cos\angle ACB = \frac{3/4a}{5/3a} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\arccos\frac{3}{5}$, $\arccos\frac{4}{5}$.

Задача 1.11. В прямоугольном треугольнике длины медиан, проведенных к катетам, равны 4 см и 5 см. Найти длину гипотенузы этого треугольника.



Решение. Медианы $CM = 5$ см и $BN = 4$ см соответственно. По свойствам медиан $AN = NC$, $AM = MB$. Обозначим $BM = MA = x$, $AN = NC = y$. Треугольники NAB и MAC – прямоугольные. По теореме Пифагора из ΔNAB получаем $AB^2 + AN^2 = BN^2$, т. е. $(2x)^2 + y^2 = (4)^2$, $4x^2 + y^2 = 16$. Из ΔCAM имеем $CA^2 + AM^2 = CM^2$, т.е. $(2y)^2 + x^2 = 25$. Получаем систему $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 16, \\ x^2 + 4y^2 = 25. \end{cases}$ Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $3y^2 - 3x^2 = 9$, $y^2 - x^2 = 3$, $x^2 = -3 + y^2$.

Подставляя его во второе уравнение, находим: $y^2 + 4y^2 = 28$, $y^2 = \frac{28}{5}$, $x^2 = \frac{13}{5}$, $|BC|^2 = 4x^2 + 4y^2 = =4\left(\frac{28}{5}+\frac{13}{5}\right) = 4\cdot\frac{41}{5}$ см, тогда $BC = 2\sqrt{\frac{41}{5}}$ см.

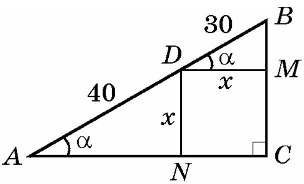
Ответ: $BC = 2\sqrt{\frac{41}{5}}$ см $= \frac{2\sqrt{205}}{5}$ см.

Задача 1.12. Найдите самостоятельно длину высоты прямоугольного треугольника, если она делит гипотенузу на отрезки 32 см и 18 см.

Ответ: 24 см.

Указание. Пусть высота равна h. Квадраты катетов: $(h^2 + 32^2)$ и $(h^2 + 18^2)$, квадрат гипотенузы – $(50)^2$.

Далее примените теорему Пифагора. Еще проще воспользоваться теоремой XIX о квадрате высоты прямоугольного треугольника.



Задача 1.13. На гипотенузе прямоугольного треугольника взята точка, равноудаленная от обоих катетов этого треугольника. Эта точка делит гипотенузу на отрезки 30 см и 40 см. Найдите длины катетов этого треугольника.

Решение. Пусть AD = 40 см, BD = 30 см. Проведем $DM \perp BC$, $DN \perp AC$. Пусть $DM = DN = x$ и $\angle BAC = \angle BDM = \alpha$. Так как

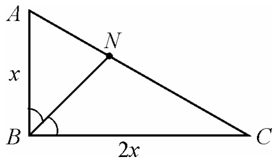
$$\frac{DM}{DB} = \frac{x}{30} = \cos\alpha, \quad \frac{DN}{AD} = \frac{x}{40} = \sin\alpha,$$

то
$$\left(\frac{x}{30}\right)^2 + \left(\frac{x}{40}\right)^2 = 1 \ (\sin^2\alpha + + \cos^2\alpha = 1),$$

т. е. x = 24 см, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ и $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Катет $BC = AB\cdot\sin\alpha = 70\cdot\frac{3}{5} = 42$ см и $BC = AB\cdot\cos\alpha = 70\cdot\frac{4}{5} = 56$ см.

Ответ: 42 см; 56 см.

Задача 1.14. В прямоугольном треугольнике один катет вдвое длиннее другого, а длина гипотенузы равна $3\sqrt{10}$. Найти длину биссектрисы прямого угла.



Решение. Через x и $2x$ обозначим соответственно катеты AB и BC треугольника ABC. По теореме Пифагора

$$x^2 + (2x)^2 = (3\sqrt{10})^2,$$

$$5x^2 = 90, \quad x^2 = 18, \quad x = 3\sqrt{2}.$$

Таким образом, $AB = 3\sqrt{2}$; $BC = 6\sqrt{2}$. По свойству биссектрисы (теорема XIII) $\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, откуда $AN = \frac{AC}{3} = \sqrt{10}$ и $BC = \frac{2}{3}AC = 2\sqrt{10}$. Теперь применим теорему XIV о длине бисектрисы:

$$BN^2 = AB \cdot BC - AN \cdot NC = 3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} - \sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 36 - 20 = 16,$$

$$BN = 4.$$

Ответ: $BN = 4$ см.

Задача 1.15. В ΔPQR угол $QPR = 75°$ и угол $PRQ = 40°$. Найти: а) угол между высотами PK и QL; б) угол между высотой PK и биссектрисой PN.

Решение. Обозначим через M точку пересечения высот QL и PK. Требуется найти $\angle PML$.

Треугольник PKR – прямоугольный. Сумма его острых углов составляет $\angle KPR + \angle KRP = 90°$.

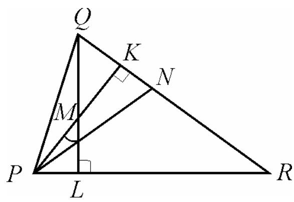
Так как $\angle KRP = 40°$, то $\angle KPR = 50°$.

Аналогично из прямоугольного треугольника PML находим $\angle PML = 90° - \angle MPL = 90° - \angle KPR = 40°$.

б) Искомый угол

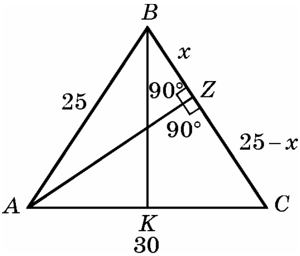
$$\angle KPN = \angle KPR - \angle NPR =$$

$$\angle KPR - \frac{\angle QPR}{2} = 50° - \frac{75°}{2} = 12{,}5°.$$



Ответ: а) $40°$; б) $12{,}5°$.

Задача 1.16. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а высота, опущенная на это основание, равна 20 см. Найти длину высоты, опущенной на боковую сторону.



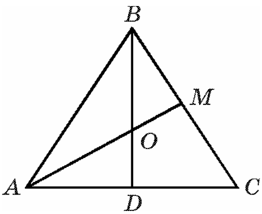
Решение. В ΔABC сторона $AB = BC$ – по условию; BK – высота; $BK = 20$ см, $AC = 30$ см. Так как ΔABC – равнобедренный, то по свойствам высоты BK, проведенной из вершины B, следует, что $AK = KC = 15$ см.

Из теоремы Пифагора $AB = BC = \sqrt{20^2+15^2} = 25$. Проведем высоту AZ на сторону BC, $AZ \perp BC$. Треугольники AZB и AZC – прямоугольные. Обозначим $BZ = x$, тогда $CZ = 25 - x$. Из ΔAZB имеем $(AZ)^2 = 25^2 - x^2$; из ΔAZC имеем $(AZ)^2 = AC^2 - ZC^2 = 30^2 - (25-x)^2$. Отсюда

$$25^2 - x^2 = 30^2 - (25-x)^2, \quad x = 7 \text{ см}.$$

Тогда $(AZ)^2 = 25^2 - 7^2$, $AZ = \sqrt{576} = 24$.

Ответ: $AZ = 24$ см.



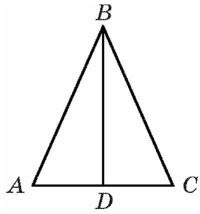
Задача 1.17. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длину боковой стороны.

Решение. Пусть $AB = BC$, AM – медиана, O – точка пересечения медиан. Так как $\dfrac{AO}{OM} = \dfrac{2}{1}$, то $AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{10}{3}$ см. По той же причине $OD = \dfrac{1}{3}BD$. Так как $AD = \dfrac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$, то по теореме Пифагора $OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{\dfrac{28}{9}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{3}$, откуда $BD = 3 \cdot OD = 2\sqrt{7}$. Сторону AB получаем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABD: $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{8+28} = 6$.

Ответ: 6 см.

Задача 1.18. Площадь равнобедренного ΔABC ($AB = BC$) равна 36 см^2. Найти длину стороны AC, если сторона $BC = \sqrt{97}$ см.

Решение. Проведем высоту BD. Пусть $DC = x$. По теореме Пифагора



$$BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{97 - x^2}.$$

Тогда площадь

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot AC = x\sqrt{97 - x^2} = 36.$$

Решая это уравнение, получаем $x_1 = 9$, $x_2 = 4$. Принимаем во внимание то, что x – половина искомой стороны.

Ответ: 8 см или 18 см.

Задача 1.19. Подсчитать косинусы углов ΔABC, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см.

Решение. По теореме косинусов

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB{\cdot}BC{\cdot}\cos\angle ABC,$$

т. е.

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = 0.$$

Аналогично:

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{3}{5},$$

$$\cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: 0; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$.

Задача 1.20. Найти длину стороны AC треугольника ABC, если $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\cos\angle BAC = \frac{7}{8}$.

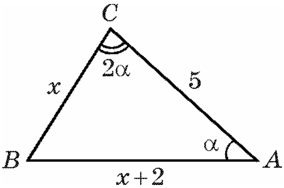
Решение. Применив теорему косинусов к ΔABC, получим

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB{\cdot}AC{\cdot}\cos\angle BAC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64 = 25 + AC^2 - 2{\cdot}5{\cdot}AC{\cdot}\frac{7}{8} \Leftrightarrow 4{\cdot}AC^2 - 35{\cdot}AC - 156 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{35 \pm 61}{8} \Leftrightarrow AC = 12.$$

Ответ: 12 см.



Задача 1.21. Известно, что в ΔABC сторона $AC = 5$ см, $AB - BC = 2$ см, отношение $\angle BCA : \angle BAC = 2{:}1$. Найдите длины сторон ΔABC.

Решение. Пусть $BC = x$ и $\angle BAC = \alpha$. Тогда $AB = x + 2$ и $\angle BCA = 2\alpha$. По теореме синусов $\dfrac{x}{\sin\alpha} = \dfrac{x+2}{\sin 2\alpha}$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{x+2}{2x}$. (Здесь мы воспользовались формулой $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.) По теореме косинусов

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha,$$

т.е.

$$x^2 = (x+2)^2 + 5^2 - 10(x+2)\frac{x+2}{2x} \Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0,$$

$$x_1 = 4,\ x_2 = 5.$$

Ответ: 4 см, 5 см, 6 см или 5 см, 5 см, 7 см.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти угол, смежный с углом ABC, если: а) $\angle ABC = 110°$; б) $\angle ABC = 16°$.

2. Найти смежные углы, если один из них в 3 раза больше другого.

3. Найти в треугольнике ABC $\angle C$, если: а) $\angle A = 60°$; $\angle B = 71°$; б) $\angle A = 50° + \alpha$; б) $\angle B = 50° - \alpha$.

4. В треугольнике ABC $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$. Найти углы в треугольнике ABC.

5. Один из внутренних углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найти внутренние углы треугольника.

6. Найти внутренние углы треугольника, если внешние углы при двух его вершинах равны 120° и 150°.

7. У треугольника один из внутренних углов равен 30°, а один из внешних – 40°. Найти остальные внутренние углы треугольника.

8. В ΔKDM разность углов KDM и DKM в два раза меньше угла DMK, а угол DMK в 2 раза меньше суммы углов KDM и DKM. Найти эти углы.

9. В ΔPKC биссектрисы углов KPC и PKC пересекаютя в точке O. Известно, что угол POK равен 110°, а угол C в 3 раза меньше угла KPC. Найти внутренние углы ΔPKC.

10. В ΔABC высоты, проведенные из вершин A и B, пересекаются в точке O. Известно, что угол AOB равен 108°, а угол ACB в 1,5 раза больше угла ABC. Найти углы ΔABC.

11. Биссектриса угла A и высота, опущенная из вершины B ΔABC, пересекаются под углом 75°. Найти величины внутренних углов ΔABC, если известно, что угол ABC в 2 раза больше угла BAC.

12. В ΔPQR $\angle QPR = 75^\circ$ и $\angle PRQ = 40^\circ$. Найти угол между: а) высотами PK и QL; б) высотой PK и биссектрисой PM.

13. В ΔABC $\angle BAC = 110^\circ$ и $\angle BCA = 30^\circ$. Найти угол между:

а) биссектрисами внешнего угла A и внутреннего угла C;

б) высотой BD и биссектрисой AN.

14. Определите угол между медианой и высотой прямоугольного треугольника, проведенными из вершины прямого угла, если острые углы треугольника равны 37° и 53°.

15. Прямая, проходящая через вершину A ΔABC, пересекает сторону BC в точке M. При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$ и $\angle CAM = 15^\circ$. Найти углы ΔABC.

16. Из середины гипотенузы восстановлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком, который делит угол треугольника в отношении 2 : 5 (меньшая часть – при гипотенузе). Найти этот угол.

17. Пусть A, B и C – три последовательно лежащие точки на прямой. Найти:

а) BC, если $AB : BC = 3:2$; $AC = 70$ см;

б) AC, если $AB : BC = 2:5$; $BC = 70$ см;

в) BC, если $AC : BC = 7:3$; $AB = 16$ см;

г) BC, если $AB : AC = 2:5$; $AC = 30$ см.

18. Пусть A, B, C и D – четыре последовательно лежащие на одной прямой точки. Найти:

а) BC, если $AB : BC : CD = 7 : 8 : 5$; $AD = 40$ см;

б) AD, если $AB : BC : CD = 3 : 4 : 8$; $BC = 16$ см;

в) AD, если $AC : CD : BD = 7 : 3 : 8$; $AB = 12$ см.

19. Найти боковую сторону равнобедренного треугольника, если: а) основание равно 17 см, а периметр 67 см; б) разность между основанием и боковой стороной равна 8 см, а периметр 71 см.

20. На боковой стороне равнобедренного треугольника построен равносторонний треугольник, периметр которого равен 45 м, а перимет первого треугольника 40 м. Найти основание равнобедренного треугольника.

21. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит периметр треугольника на части длиной 15 и 6 см. Найти длины сторон треугольника.

22. Периметр равнобедренного треугольника $P_{\Delta ABC} = 110$, ($AB = BC$), а отрезок, соединяющий середины боковых сторон, равен 15. Найти длину боковой стороны.

23. Треугольник ABC – прямоугольный, $\angle C = 90°$. Найти:

а) AB, если $AC = 8$, $BC = 6$;

б) AC, если $AB = 20$, $BC = 7$.

24. В треугольнике OMK $\angle K = 90°$. Найти:

1) OM, если: а) $OK = 12$ см, $MK = 5$ см; б) $OK = 6$ см, $MK = 8$ см;

2) MK, если: а) $OK = 15$ см, $OM = 17$ см; б) $OK = 12$ см, $OM = 13$ см.

25. Найти катет прямоугольного треугольника, если известны гипотенуза и второй катет: а) 8 и 4; б) 6 и 3.

26. В треугольнике ABC высота CH делит сторону AB на отрезки AH и BH. Найти:

а) стороны ΔABC, если $AH = 9$ см, $BH = 16$ см, $CH = 12$ см;

б) сторону AB, если $AC = 17$ см, $BC = 10$ см, $CH = 8$ см.

27. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 45, $\cos\angle ABC = \frac{3}{5}$. Найти: а) катеты; б) площадь ΔABC.

28. В прямоугольном треугольнике ABC длина катета равна 84, синус прилегающего к нему острого угола имеет величину $\frac{20}{29}$. Найти площадь треугольника.

29. Даны стороны треугольников: а) 7, 18, 12; б) 28, 35, 21. Какой треугольник является прямоугольным?

30. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс острых углов A и B прямоугольного ΔABC, если $AB = 13$ см, $BC = 12$ см.

31. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс острых углов A и B прямоугольного ΔABC, если $AB = 7$ см, $BC = 24$ см.

32. Один из углов прямоугольного треугольника равен 30°, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 36 см. Найти стороны треугольника.

33. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а разность гипотенузы и меньшего катета равна 4 см. Найти стороны треугольника.

34. Найти отношение длины гипотенузы прямоугольного треугольника к длине большего катета, если длины катетов относятся как 1 : 3.

35. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит катет на отрезки 4 и 5 см. Найти длину гипотенузы.

36. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки 600 и 175 см. Найти длину большего катета.

37. Гипотенуза AC прямоугольного треугольника ABC на 8 больше катета BC, а катет AB на 1 меньше катета BC. Найти AB.

38. Катет прямоугольного треугольника равен $\frac{5}{2}$, а гипотенуза $\frac{\sqrt{281}}{2}$. Найти его площадь.

39. В прямоугольном треугольнике катеты $AB = 5$ см, $BC = 12$ см. На какие отрезки делит гипотенузу высота, проведенная к ней?

40. Высота равнобедренного треугольника равна 10, а боковая сторона $\frac{\sqrt{481}}{2}$. Найти его площадь.

41. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 12. Найти его периметр, если отношение катетов 3 : 4.

42. В прямоугольном треугольнике катеты равны между собой. Площадь треугольника 12 см^2. Найти длину биссектрисы прямого угла.

43. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{3}$. Найти его площадь.

44. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах. Найти длину стороны квадрата, если длина гипотенузы 6 см.

45. В прямоугольном треугольнике один катет вдвое длиннее другого, а гипотенуза равна $3\sqrt{10}$ см. Найти длину биссектрисы прямого угла.

46. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10. Один из катетов составляет 75 % другого. Найти больший из катетов.

47. В равнобедренном треугольнике длина основания равна a, а длина высоты, опущенной на основание, равна h. Найти расстояние от середины основания до боковой стороны.

48. Найти длину основания равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна $\sqrt{17}$, а площадь 4.

49. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а высота, проведенная к этому основанию, – 20 см. Найти длину высоты, опущенной на боковую сторону.

50. Найти площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10 см, а высота, опущенная на боковую сторону, – 12 см.

51. В треугольнике длина основания на 4 см меньше длины высоты, опущенной на это основание. Площадь треугольника равна 96 см^2. Найти длину основания.

52. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 36 см^2. Стороны $AB = BC$, BD – высота. Найти длину стороны AC, если: а) $BD = 12$ см; б) $BC = \sqrt{97}$ см; в) $BC : DC = \sqrt{2}$.

53. В прямоугольном треугольнике катеты равны 12 и 16 см. Найти длину медианы, проведенной из прямого угла.

54. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из прямого угла, равна одному из катетов. Найти меньший угол треугольника.

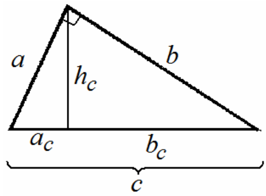
55. Найти периметр и площадь прямоугольного треугольника ABC, если $\angle C = 90°$; $AC = 2$ см; $\sin \angle B = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

56. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки 9 и 4 см. Найти произведение длин катетов.

57. Дан треугольник ABC (см. рис.). Найти:

а) a, b, b_c, h_c, если $a_c = 1$, $c = 4$;

б) a, b, c, h_c, если $a_c = 6$, $b_c = 2$.



58. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13, один из катетов равен 5. Найти второй катет, высоту, проведенную из вершины прямого угла, и отрезки, на которые эта высота делит гипотенузу.

59. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 5, а один из катетов 13. Найти гипотенузу, второй катет и отрезки, на которые эта высота делит гипотенузу.

60. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5, а проведенная к ней высота 2. Найти катеты и отрезки, на которые эта высота делит гипотенузу.

61. Найти площадь прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.

62. В прямоугольном треугольнике сумма сторон 70, а сумма квадратов сторон 1682. Найти квадрат разности катетов.

63. В прямоугольном треугольнике сумма катетов равна 17 см, а гипотенуза – 13 см. Найти катеты и площадь тре-угольника.

64. Найти площадь прямоугольного треугольника, периметр которого равен 24, а стороны образуют арифметическую прогрессию.

65. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 6,5. Определить катеты, если сумма гипотенузы и меньшего катета равна 18.

66. Высота равностороннего треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найти периметр этого треугольника.

67. В прямоугольный треугольник с катетами 10 и 15 см вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найти периметр квадрата.

68. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами, равными 18 и 24 см.

69. В равнобедренном треугольнике основание равно 20, а синус угла при основании равен $\frac{12}{13}$. Найти площадь треугольника.

70. В равнобедренном треугольнике основание равно 18 см, боковая сторона равна 15 см. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие вершины – на боковых сторонах. Найти длину стороны квадрата.

71. Может ли существовать треугольник со сторонами:

а) 5 м, 10 м, 12 м;

б) 1 см, 2 см, 3,3 см;

в) 1,2 см, 1 см, 2,2 см?

72. Могут ли стороны треугольника относиться как: а) 1 : 2 : 3; б) 2 : 3 : 4?

73. В равнобедренном треугольнике одна сторона 25 см, другая 10 см. Какая из них служит основанием?

74. Найти косинусы углов треугольника ABC, если:

а) $AB = 3$ см; $BC = 4$ см; $AC = 5$ см;

б) $AB = 12$ см; $BC = 13$ см; $AC = 10$ см;

в) $AB = 10$ см; $BC = 8$ см; $AC = 3$ см;

75. Найти длину стороны AC треугольника ABC, если:

а) $AB = 5$; $BC = 8$; $\cos\angle BAC = 7/8$;

б) $BC = 7$; $AB = 10$; $\cos\angle ACB = -5/8$.

76. В треугольнике основание равно 12, один из углов в нем равен 120°, сторона против этого угла равна 28. Найти третью сторону.

77. В треугольнике ABC стороны $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $\angle ABC = 45°$. Найти угол BAC.

78. Одна из сторон треугольника равна 8, а два из его углов равны соответственно 30 и 45°. Найти все возможные значения периметра треугольника.

79. Определить тип треугольника (остроугольный, тупоугольный или прямоугольный), если:

а) $AB = 2$; $BC = 3$; $AC = 4$;

б) $AB = 14$; $BC = 50$; $AC = 48$;

в) $AB = 1$; $BC = 2$; $AC = 3$;

г) $AB = 6$; $BC = 7$; $AC = 9$;

д) $AB = 68$; $BC = 119$; $AC = 170$.

80. В треугольнике ABC стороны $AC = \dfrac{6}{5}$ см, $BC = 1$ см; его площадь равна $\dfrac{12}{25}$ см^2. Найти длину стороны AB, если угол BAC – острый.

81. В треугольнике ABC точки M и K – середины строн AB и BC соовтетственно, $MB = 6$ см, $MK = 5$ см, $BC = 14$ см. Найти периметр треугольника ABC.

82. В прямоугольном треугольнике с углом $30°$ и меньшим катетом, равным 6 см, проведены средние линии. Найти периметр треугольника, образованного средними линиями.

83. В прямоугольном треугольнике с углом $45°$ и гипотенузой, равной 8 см, проведены средние линии. Найти периметр треугольника, образованного средними линиями.

84. В треугольнике со сторонами 25, 25 и 14 найти расстояния от точки пересечения медиан до вершин треугольника.

85. В равнобедренном треугольнике расстояния от точки пересечения медивн до вершин треугольника равны 25, 14 и 25 см. Найти стороны треугольника.

86. В треугольнике со сторонами 15, 15 и 24 см найти расстояния от точки пересечения медиан до сторон треугольника.

87. Длины сторон треугольника 11, 12 и 13 см. Найти длину медианы, проведенной к большей стороне.

88. Стороны ΔABC равны $AB = 18$, $BC = 12$, $AC = 14$. Найти длину медианы BM.

89. Длина медианы BD треугольника ABC равна 1, $AB = 3$, угол $BDC = 60°$. Найти площадь треугольника ABC.

90. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 9, катет $BC = 3$. На гипотенузе взята точка M так, что $AM : MB = 1:2$. Найти CM.

91. В прямоугольном треугольнике ABC катеты $AC = 15$ и $BC =$ $= 20$. На гипотенузе AB отложен отрезок $AD = 4$. Найти CD.

92. Сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$, а две другие образуют угол в $30°$ и относятся как $1:2\sqrt{3}$. Найти эти стороны.

93. В ΔABC известно, что $AC = 13$, $AB = 14$, $BC = 15$. На стороне BC взята точка M так, что $CM : MB = 1:2$. Найти AM.

94. В ΔABC точка D на стороне AB. Найти CD, если $BC = 37$, $AC =$ 15, $AB = 44$, $AD = 14$.

95. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом $30°$, если известно, что биссектриса, проведенная из вершины прямого угла, равна a.

96. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равна соответственно 5 и 20. Найти биссектрису угла при основании треугольника.

97. Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника образует с его стороной угол 60°. Найти высоту треугольника, проведенную из той же вершины, если его боковая сторона равна 25 м.

98. В треугольнике ABC стороны $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 7$. Найти длину биссектрисы $\angle ABC$ треугольника.

99. Вычислить биссектрису $\angle A$ треугольника ABC со сторонами $BC = 18$, $AC = 15$, $AB = 12$.

100. В треугольнике ABC со стороной $AB = \sqrt{5}$ из вершины B к стороне AC проведены медиана $BM = 2\sqrt{2}$ и высота $BH = 2$. Найти сторону BC, если известно, что $\angle ABC + \angle ACB < 90°$.

101. В треугольнике ABC стороны $AB = 4$, $BC = 5$. Из вершины B проведен отрезок BM (точка M лежит на стороне AC), причем $\angle ABM = 45°$ и $\angle MBC = 30°$. Найти: а) отношение, в котором точка M делит сторону AC; б) отрезки AM и MC.

102. В равнобедренном треугольнике основание равно $\sqrt{21}$, угол при основании $30°$. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

103. В треугольнике ABC с острым углом A стороны $AB = 3$ см, $AC = 2$ см, AH – биссектриса. Расстояние от H до сторон равно 1. Найти BC.

II. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Часть 2. Подобие треугольников. Площадь треугольников. Отношение площадей треугольников. Пропорциональные отрезки в треугольниках Теоремы Фалеса, Менелая и Чевы.

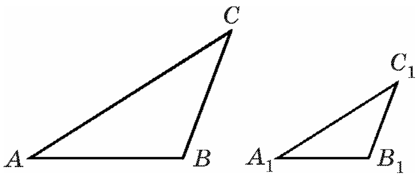
Определение и теоремы

Определение. Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны, а также равны отношения соответственных сторон. Отношение соответственных сторон подобных треугольников называется коэффициентом подобия.

$$\Delta ABC \overset{k}{\sim} \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k\ .$$



В геометрических задачах часто бывает необходимо провести *обоснование* используемых соотношений между элементами фигур. Обоснование проводится с помощью *теорем* планиметрии. Приведем *признаки подобия* треугольников и некоторые следствия этих признаков, на которых базируются решения многих последующих задач.

Два треугольника *подобны,* если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника;

2) длины двух сторон одного треугольника пропорциональны длинам двух сторон другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны;

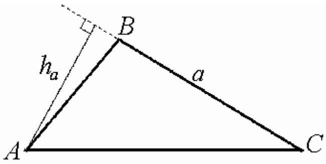
3) длины трех сторон одного треугольника пропорциональны длинам трех сторон другого треугольника.

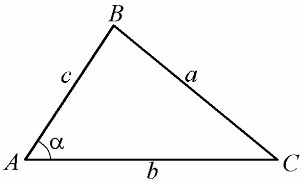
В частности:

1) прямая, параллельная какой-либо стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает треугольник, подобный данному;

2) если длины гипотенузы и катета одного треугольника пропорциональны длинам гипотенузы и катета другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Наконец, в подобных треугольниках отношение всех соответствующих *линейных элементов* (высот, медиан, биссектрис, радиусов вписанной и описанной окружностей, периметров и так далее) *равно коэффициенту подобия,* а площади подобных треугольников относятся как *квадраты коэффициентов подобия.*





Приведем здесь три формулы площади треугольника:

1) $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}h_a\cdot a$,

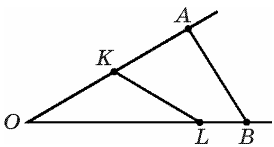
где h_a –высота, проведенная к стороне a;

2)$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$,

где $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр ΔABC;

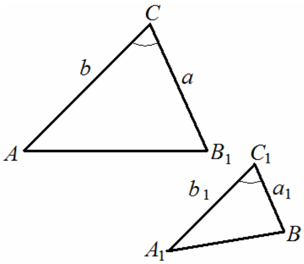
3) $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\angle\alpha$.

Полезно знать и уметь использовать следующие теоремы.



Теорема I. Если на сторонах угла OA и OB отложить K и L соответственно, то отношение площадей треугольников:

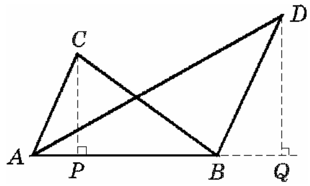
$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OKL}}=\frac{OA\cdot OB}{OK\cdot OL}.$$



Теорема II. Отношение площадей треугольников, имеющих равный угол, равно отношению произведений сторон, заключающих равные углы:

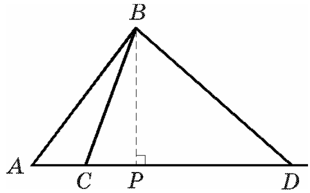
$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=\frac{a\cdot b}{a_1\cdot b_1}.$$

Теорема III. Пусть $\Delta\ ABC$ и ΔABD имеют общую сторону AB. Тогда отношение их площадей равно отношению высот, проведенных из вершин C и D:



$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{CP}{DQ}.$$

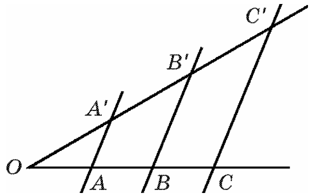
Теорема IV. Отношения площадей треугольников, имеющих общую высоту равно отношению оснований:



$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CBD}} = \frac{AC}{CD}.$$

Докажите самостоятельно теоремы I–IV.

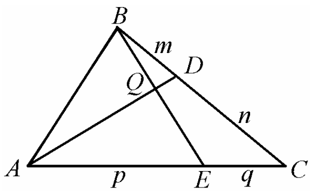
Теорема Фалеса. На сторонах угла при пересечении их параллельными прямыми образуются пропорциональные отрезки:



$$OA : AB : BC = OA' : A'B' : B'C'$$

или
$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

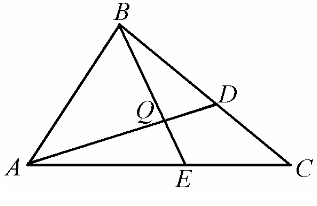
Теорема V. (Теорема о внутренних пропорциональных отрезках.) Если в $\Delta\ ABC$ из вешин A и B к сторонам BC и AC проведены отрезки AD и BE соответственно, делящие эти стороны в заданном отношении



$$\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n} \text{ и } \frac{AE}{EC} = \frac{p}{q},$$

то $$\frac{BQ}{QE} = \frac{m}{n}\left(1 + \frac{1}{p}\right),\ \frac{AQ}{QD} = \frac{p}{q}\left(1 + \frac{m}{n}\right).$$

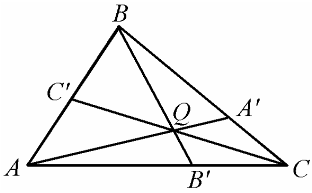
Теорема VI. (Обратная теореме V.) Если в $\Delta\ ABC$ проведены отрезки AD и BE, пересекающиеся в точке Q так, что



$$\frac{AQ}{QD} = t,\ \frac{BQ}{QE} = e,$$

то

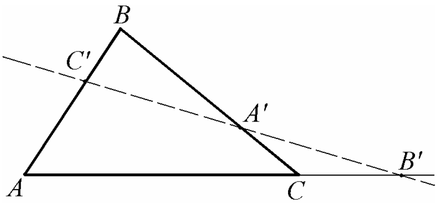
$$\frac{AE}{EC}=\frac{t\cdot e-1}{1+e},\ \frac{BD}{DC}=\frac{t\cdot e-1}{1+t}.$$



Теорема Чевы. На сторонах BC, AC, AB треугольника ABC или на их продолжениях отмечены соответственно точки A', B', C'. Тогда если прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке, то

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$$

Теорема Менелая. Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C отмечены соответственно точки A', B', C', лежащие на одной прямой, то

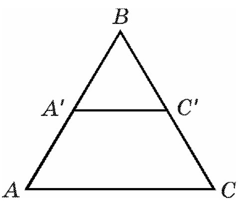


$$\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}=1.$$

Примеры решения задач

Задача 2.1. В ΔABC со сторонами AB = 15, BC = 17 и AC = 10 проведен отрезок $A'C'$ параллельно AC, причем точка A' лежит на стороне AB, а C' – на BC. Найти BC', если $A'C'$ = 7.

Решение. Треугольник $A'BC'$ подобен треугольнику ABC, коэффициент подобия



$$k=\frac{A'B}{AB}=\frac{C'B}{CB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{7}{10}.$$

Таким образом,

$$C'B=k\cdot CB=\frac{7}{10}\cdot 17=11{,}9.$$

Ответ: 11,9 .

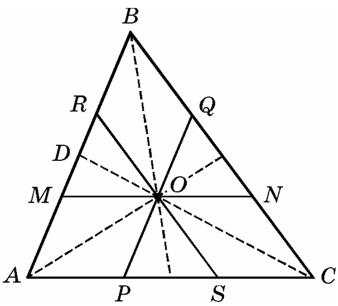
Задача 2.2. В ΔABC со сторонами AB = 15 см, BC = 16 см и AC = 9 см через точку пересечения медиан проведены прямые, параллельные сторонам. Найти площади отсекаемых треугольников.

Решение. Площадь ΔABC можно найти по формуле Герона:

$$S=\sqrt{\frac{15+16+9}{2}\cdot\left(\frac{15+16+9}{2}-9\right)\cdot\left(\frac{15+16+9}{2}-16\right)\cdot\left(\frac{15+16+9}{2}-15\right)}=$$

$$=\sqrt{20\cdot 11\cdot 4\cdot 5}=20\sqrt{11}\,.$$

Пусть O – точка пересечения медиан ΔABC. Проведем MN, PQ и RS параллельно сторонам. Требуется найти площади треугольников OQN, POS, ORM.



Треугольники ABC и PQC подобны. Определим коэффициент подобия. По теореме Фалеса, примененной к углу DCB,

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{DO}{OC}=\frac{1}{2}\,.$$

Обозначим $BQ = x$ и $QC = 2x$, тогда $\frac{CQ}{CB}=\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$, аналогично $\frac{CP}{AC}=\frac{2}{3}$,

т. е. коэффициент подобия равен $\frac{2}{3}$. Таким образом,

$$\frac{S_{\Delta PQC}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$

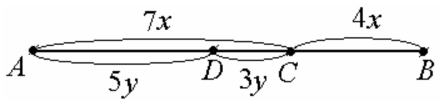
ON – средняя линия ΔPQC, значит, ΔOQN подобен ΔPQC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{S_{\Delta OQC}}{S_{\Delta PQC}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Окончательно получаем

$$\frac{S_{\Delta OQN}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{S_{\Delta OQN}}{S_{\Delta PQC}}\cdot\frac{S_{\Delta PQC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\Rightarrow S_{\Delta OQN}=\frac{20\sqrt{11}}{9}\,.$$

Аналогично находим, что площади еще двух треугольников POS и ORM тоже равны $\frac{20\sqrt{11}}{9}$.

Ответ: $\frac{20\sqrt{11}}{9}$.

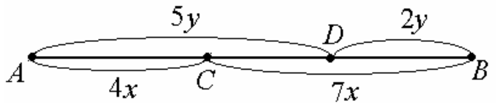
Задача 2.3. Точка C делит отрезок AB в отношении $\frac{AC}{CB}=\frac{7}{4}$. Точка D делит отрезок AC в отношении $\frac{AD}{DC}=\frac{5}{3}$. Найти отношение $\frac{DC}{CB}$.



Решение. Поскольку $\frac{AC}{CB}=\frac{7}{4}$, то можем обозначить $AC = 7x$ и $CB = 4x$. Так как $\frac{AD}{DC}=\frac{5}{3}$, то можем положить $AD = 5\ y$ и $DC = 3y$. С одной стороны, отрезок $AC = 7x$, с другой стороны, $AC = AD +$ $+ DC = 5y + 3y = 8y$. Отсюда $7x = 8y \Leftrightarrow y=\frac{7}{8}x$. Искомое отношение $\frac{DC}{CB}=\frac{3y}{4x}=\frac{7/8\cdot 3x}{4x}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 8}=\frac{21}{32}$.

Ответ: 21:32.

Задача 2.4. На отрезке AB взяты точки C и D так, что $\frac{AC}{CB}=\frac{4}{7}$ и $\frac{AD}{DB}=\frac{5}{2}$. Найти отношение $\frac{AB}{CD}$.



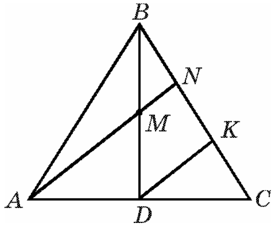
Решение. Согласно условию можно обозначить $AC = 4\ x$, $CB =$ $= 7x$, $AD = 5y$ и $DB = 2y$. С одной стороны, отрезок $AB = AC + CB=$ $= 4x + 7x$, с другой стороны, $AB = AD + DB = 5y + + 2y = 7y$. Отсюда $11x = 7y \Leftrightarrow y=\frac{11}{7}x$. Искомое отношение

$$\frac{AB}{CD}=\frac{11x}{AD-AC}=\frac{11x}{5y-4y}=\frac{11x}{55/7x-4x}=\frac{77}{55-28}=\frac{77}{27}.$$

Ответ: 77:27.

Задача 2.5. Прямая, проходящая через вершину A ΔABC, делит медиану BD пополам. В каком отношении эта прямая делит сторону BC?

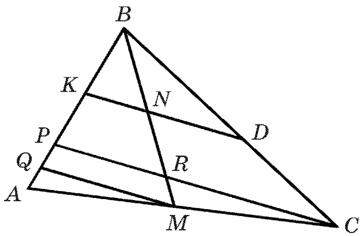
Решение. Пусть M – середина BD. Прямая AM пересекает BC в точке N. Требуется найти отношение $BN : NC$. Проведем DK параллельно AN. Применив теорему Фалеса к углу DBC, получим $\frac{BN}{NK} = \frac{BM}{MD} = \frac{1}{1}$, т. е. $BN = NK$. По той же теореме, примененной к углу ABC, получим $\frac{NK}{KC} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{1}$, т. е. $NK = KC$. Мы видим, что $BN = NK = KC$, т. е. $\frac{BN}{NC} = \frac{1}{2}$.



Ответ: 1 : 2.

Задача 2.6. Прямая проходит через середину медианы BM и точку D, лежащую на стороне BC ΔABC. В каком отношении эта прямая делит AB, если известно, что $BD : DC = 3:2$?

Решение. Пусть N – середина BM, K – точка пересечения AB и DN. Требуется найти $AK : KB$. Проведем CP и MQ параллельно KD, R – точка пересечения CP с BM.

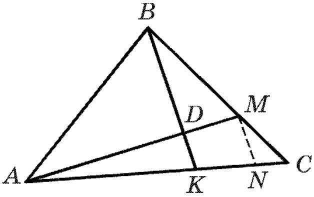


Применяя теорему Фалеса к углу ABC (при параллельных KD и PC), получаем $BK : KP = BD : DC = 3:2$. Положим $KB = 3x$ и $KP = 2x$.

Аналогично получаем $\frac{BN}{NR} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{2}$. Положим $BN = 3y$, $NR =$ $= 2y$. Поскольку $BM = 2BN$, то $BM = 6y$ и $RM = y$. По теореме Фалеса, примененной к $\angle ABM$, $\frac{KP}{PQ} = \frac{NR}{RM} = \frac{2}{1}$, откуда $PQ = x$. Отрезок QM – средняя линия ΔAPC, поэтому $AQ = QP = x$, и искомое отношение $AK : KB = 4x : 3x = 4:3$.

Ответ: 4:3.

Задача 2.7. Точка K лежит на стороне AC треугольника ABC и делит ее в отношении KC : KA = 1:3, точка M лежит на стороне BC и делит ее в отношении CM : MB = 2:5, D – точка пересечения отрезков AM и BK. В каком отношении точка D делит отрезок AM?

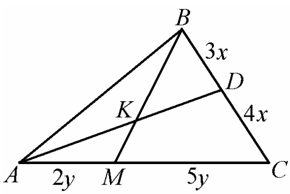


Решение. Требуется найти отношение AD:DM. По условию положим KC = = x, AK = $3x$, CM = $2y$, BM = $5y$. Проведем MN параллельно BK. По теореме Фалеса $\frac{KN}{NC} = \frac{BM}{MC} = \frac{5}{2}$. Поскольку KC = x, то $KN = \frac{5}{7}x$ и $NC = \frac{2}{7}x$. Применив теорему Фалеса к углу MCA, получаем

$$\frac{AD}{DM} = \frac{AK}{KN} = \frac{3x}{5/7x} = \frac{21}{5}.$$

Ответ: 21:5.

Задача 2.8. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и D соответственно. Известно, что AM : MC = 2 : 5, BD : DC = = 3 : 4. Отрезки AD и BM пересекаются в точке K. Площадь ΔBKD равна 45. Найти площадь ΔAMK.



Решение. 1. Рассмотрим ΔAMK и прямую AD. По теореме Менелая

$$\frac{AM}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BK}{KM} = 1,$$

$$\frac{2y}{7y} \cdot \frac{4x}{3x} \cdot \frac{BK}{KM} = 1, \quad \frac{BK}{KM} = \frac{21}{8}.$$

2. Рассмотрим ΔACD и прямую BM. По теореме Менелая

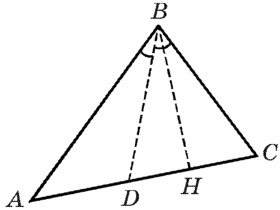
$$\frac{BD}{BC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AK}{KD} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{7x} \cdot \frac{5y}{2y} \cdot \frac{AK}{KD} = 1 \Rightarrow \frac{AK}{KD} = \frac{14}{15}.$$

3. Так как $\angle BKD = \angle AKM$, имеем

$$\frac{S_{BKD}}{S_{KMA}} = \frac{BK \cdot KD}{MK \cdot AK} \Rightarrow \frac{45}{S_{KMA}} = \frac{21}{8} \cdot \frac{15}{14} \Rightarrow S_{KMA} = 16.$$

Ответ: 16.

Задача 2.9. В ΔABC биссектриса угла при вершине B пересекает сторону AC в точке D. Покажите, что $AD{:}DC = AB{:}BC$.



Решение. Опустим высоту BH. Это общая высота для треугольников ABD и DBC. С одной стороны, отношение

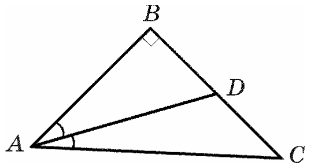
$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta DBC}} = \frac{1/2BH \cdot AD}{1/2BH \cdot DC} = \frac{AD}{DC}.$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta DBC}} = \frac{1/2AB \cdot BD \cdot \sin\angle ABD}{1/2BC \cdot BD \cdot \sin\angle DBC} = \frac{AB}{BC}.$$

Таким образом, $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, что и требовалось доказать.

Задача 2.10. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $BD = 4$, $DC = 6$. Найти площадь ΔADC.



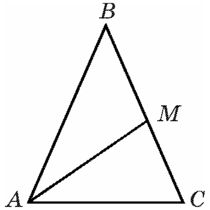
Решение. Воспользовавшись результатами задачи 2.8, получаем

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Обозначим $AB = 2x$, $AC = 3x$. По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$, отсюда $9x^2 = 4x^2 + 100$, $x = 2\sqrt{5}$, т. е. $AB = 4\sqrt{5}$. Отсюда $S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}AB \cdot DC = 12\sqrt{5}$.

Ответ: $12\sqrt{5}$.

Задача 2.11. В ΔABC биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке M. Известно, что $AB = BC = 2 \cdot AC$, $AM = 4$. Найти площадь ΔABC.



Решение. Пусть $AC = x$. Тогда $AB = 2x$,

$$\cos\angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{x^2 + 4x^2 - 4x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}.$$

Поскольку $\dfrac{BM}{MC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{1}$, то $MC=\dfrac{1}{3}BC=\dfrac{2}{3}x$ и $BM=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{4}{3}x$. Применив теорему косинусов к ΔAMC, получаем

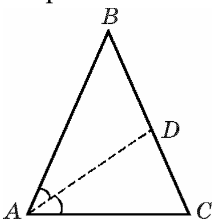
$$16=\frac{4}{9}x^2+x^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot x\cdot\frac{2}{3}x\Rightarrow 16=\frac{10}{9}x^2\Rightarrow x=\frac{12}{\sqrt{10}},$$

$$\sin\angle ACB=\sqrt{1-\cos^2\angle ACB}=\frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}x\cdot 2x\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{144}{10}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{18\sqrt{15}}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{18\sqrt{15}}{5}$.

Задача 2.12. В равнобедренном ΔABC длина основания AC = 5 см, а длина биссектрисы AD = 6 см. Найти длину боковой стороны AB этого треугольника.



Решение. Пусть $AB = BC = x$. Тогда по теореме косинусов

$$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{25}{2\cdot 5\cdot x}=\frac{5}{2x}.$$

Поскольку $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{x}{5}$ и $BD+DC=x$, то

$$BD=\frac{x}{5}DC\Rightarrow\frac{x}{5}DC+DC=x\Leftrightarrow\frac{x+5}{5}DC=x\Rightarrow DC=\frac{5x}{x+5}$$

и $BD=\dfrac{x^2}{x+5}$. Применив теорему косинусов к треугольнику ADC, получим

$$AD^2=AC^2+DC^2-2AC\cdot DC\cdot\cos\angle ACD\Leftrightarrow$$

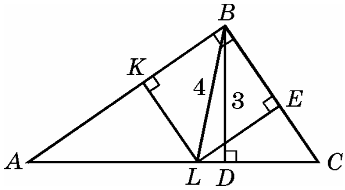
$$\Leftrightarrow 36=25+\frac{25x^2}{(x+5)^2}-2\cdot 5\cdot\frac{5x}{(x+5)}\cdot\frac{5}{2x}\Leftrightarrow$$

$$14x^2-235x-900=0\Rightarrow x=20.$$

Ответ: 20.

Задача 2.13. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны 3 см и 4 см. Найти площадь этого треугольника.

Решение. Пусть BL и BD – биссектриса и высота прямоугольного треугольника ABC.



Опустим из точки L перпендикуляры LK и LE на AB и BC. Поскольку BL – биссектриса, то $KL = LE$ и $KBEL$ – квадрат. Отсюда следует, что $KL = LE = \dfrac{BL}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Пусть $BC = a$, $AB = c$. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABL} + S_{\Delta LBC} = \frac{c \cdot 2\sqrt{2}}{2} + \frac{a \cdot 2\sqrt{2}}{2} = (a+c)\sqrt{2}.$$

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC = \dfrac{ac}{2}$. Таким образом,

$$(a+c)\sqrt{2} = \frac{1}{2}ac \Leftrightarrow 2(a^2 + c^2 + 2ac) = \frac{a^2c^2}{4},$$

$$a^2 + c^2 = \frac{a^2c^2}{8} - 2ac. \qquad (*)$$

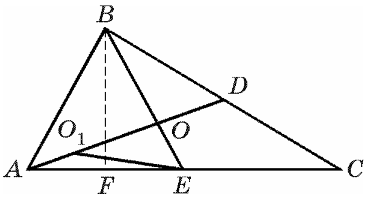
Кроме того, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BD \cdot AC = \dfrac{3}{2}\sqrt{a^2 + c^2} = \dfrac{1}{2}ac$,

$$a^2 + c^2 = \frac{a^2c^2}{9}. \qquad (**)$$

Приравняв правые части равенств (*) и (**), получим $ac = 144$, следовательно, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{ac}{2} = 72$.

Ответ: 72 см^2.

Задача 2.14. Площадь треугольника ABC равна S. Медианы AD и BE пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника AEO_1, где O_1 – точка, принадлежащая медиане AD и такая, что $AO_1 = \dfrac{1}{10} AD$.

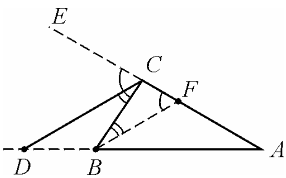


Решение. Площадь ΔABE составляет половину площади ΔABC (эти треугольники имеют одну и ту же высоту BF, а $AE=\frac{1}{2}AC$); так как $OB:OE = 2:1$, то $S_{\Delta AOE}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABE}$ (треугольники ABE и AOE имеют одну и ту же высоту, проведенную из точки A и $OE=\frac{1}{3}BE$). Далее имеем $AO_1=\frac{1}{10}AD=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{10}AO$, отсюда

$$S_{\Delta AO_1E}=\frac{3}{20}S_{\Delta AOE}=\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{3}S_{\Delta ABE}=\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S=\frac{S}{40}.$$

Ответ: $\frac{S}{40}$.

Задача 2.15. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает прямую AB в точке D. Найти отношение $AD : BD$, если $AC : BC = 3$.



Решение. Проведем $BF||CD$. Так как $\angle DCB = \angle CBF$ (накрест лежащие при параллельных CD и BF) и $\angle ECD = \angle CFB$ (как соответственные при параллельных прямых CD и BF). Следовательно, ΔBCF – равнобедренный. Из подобия ΔAFB и ΔACD имеем

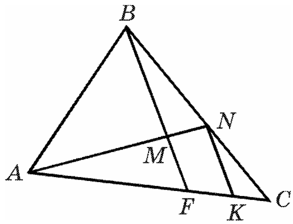
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AF}{AC}==\frac{AC-BC}{AC}=\frac{AD-BD}{AD}\Rightarrow\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{AD}.$$

Из последней пропорции получаем, что $\frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{3}$. Следовательно, $\frac{AD}{BD}=3$.

Ответ: $AD : BD = 3$.

Задача 2.16. Точки F и N делят стороны треугольника ABC в отношении $AF : FC = 3 : 1$ и $BN : NC = 3 : 2$. Прямые AN и BF пересекаются в точке M. Найти отношение площадей треугольников AMB и ANB.

Решение. По теореме I отношение $\dfrac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta ANB}} = \dfrac{AB \cdot AM}{AB \cdot AN} = \dfrac{AM}{AN}$ – это отношение, которое и следует найти. Проведем NK параллельно BF. Так как $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{3}{1}$, обозначим $AF = 3x$ и $FC = x$. По теореме Фалеса $\dfrac{FK}{KC} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{3}{2}$, откуда $FK = \dfrac{3}{5}x$ и $KC = \dfrac{2}{5}x$. Применив теорему Фалеса к



$\angle NAC$, получим $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AF}{AK} = \dfrac{3x}{3x + 3/5x} = \dfrac{1}{6/5} = \dfrac{5}{6}$.

Таким образом, $\dfrac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta ANB}} = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{5}{6}$.

Ответ: $\dfrac{5}{6}$.

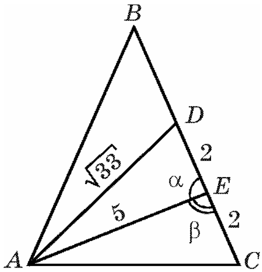
В задачах с *высотами* треугольника часто используется *свойство подобия* треугольников, отсекаемых высотами.

Задача 2.17. В равнобедренном ΔABC на боковой стороне BC взяты точки D и E так, что $DE = EC = 2$. Найдите периметр ΔABC, если $AE = 5$ см, $AD = \sqrt{33}$ см.

Решение. Пусть $\angle AED = \alpha$, $\angle AEC = \beta$. По теореме косинусов

$$\cos\alpha = \frac{AE^2 + DE^2 - AD^2}{2 \cdot AE \cdot DE} = -\frac{1}{5}.$$

Так как $\beta = 180° - \alpha$, то $\cos\beta = \dfrac{1}{5}$. По теореме косинусов



$$AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2AE{\cdot}EC{\cdot}\cos\beta = 25,$$

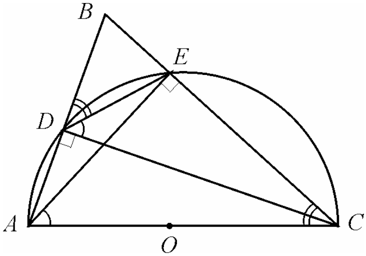
т. е. $AC = 5$. Треугольник AEC – равнобедренный и, следовательно, $\angle AEC = \beta$. Треугольники ABC и AEC подобны, причем коэффициент подобия равен $\dfrac{AC}{EC} = \dfrac{5}{2}$.

Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия, т. е.

$$P_{\Delta ABC} = \frac{5}{2} \cdot P_{\Delta AEC} = 30.$$

Ответ: 30 см.

Задача 2.18. В остроугольном ΔABC проведены высоты AE и CD. Доказать, что: 1) $\Delta ABE \sim \Delta CBD$; 2) $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ и коэффициент подобия этих треугольников равен $\cos\angle ABC$.



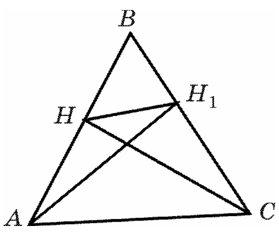
Решение. 1. Треугольники ΔABE и ΔCBD подобны как прямоугольные, имеющие общий угол $\angle B$.

2. Построим окружность с центром в середине отрезка AC и радиусом $AC/2$. Эта окружность проходит через точки D и E (так как углы ADC и AEC – прямые и опираются на диаметр).

Углы CDE и CAE равны как вписанные и опирающиеся на одну дугу. Эти углы дополняют до $90°$ углы BDE и ACE соответственно, поэтому два последних угла тоже равны.

Аналогично, $\angle BAC = \angle DEB$ и, следовательно, $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ по трем углам. Коэффициент подобия равен отношению $\dfrac{BD}{BC} = \cos\angle DBC$ (из прямоугольного ΔDBC), что и требовалось доказать.

Используя утверждение задачи 2.18, решим следующие задачи.



Задача 2.19. В остроугольном ΔABC проведены высоты CH и AH_1. Известно, что $AC = 2$ и площадь круга, описанного около ΔHBH_1 равна $\pi/3$. Найти угол между высотой CH и стороной BC.

Решение. Пусть $\angle ABC = \alpha$. Как следует из решения задачи 2.16, треугольники HBH_1 и ABC подобны, и коэффициент подобия равен $\cos\alpha$.

Таким образом, $HH_1 = 2\cos\alpha$. Радиус описанного около ΔHBH_1 круга равен

$$\frac{HH_1}{2\sin\angle HBH_1} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \text{ctg}\alpha .$$

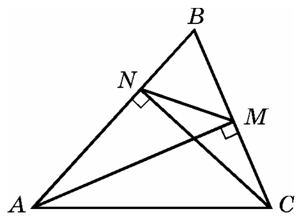
Площадь круга равна $\pi\text{ctg}^2\alpha = \frac{\pi}{3}$, откуда ctg $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. $\alpha =$ $=60°$. Искомый $\angle HCB = 90° - \alpha = 30°$.

Ответ: 30°.

Задача 2.20. В остроугольном ΔABC опущены высоты AM и CN. Площади $S_{\Delta ABC} = 56$, $S_{ANMC} = 42$, радиус описанной около ΔABC окружности $R_{\text{опис}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$. Найти MN.

Решение. Так как площадь ΔNBM равна $56 - 42 = 14$ и ΔNBM и ΔABC подобны, то коэффициент подобия

$$k = \sqrt{\frac{S_{\Delta NBM}}{S_{\Delta ABC}}} = \frac{1}{2} = \cos\angle ABC$$



(см. задачу 2.15). Таким образом,

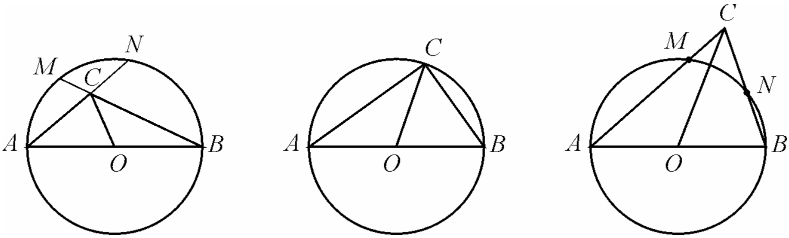
$$\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R_{\text{опис}}$, то $\frac{AC\cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\frac{16}{\sqrt{3}}$, т. е. $AC = 16$. Сторона $MN = AC\cdot k = \frac{16}{2} = 8$.

Ответ: 8.

Задача 2.21. В треугольнике ABC стороны $AC = 3$, $BC = 2$, $S_{\Delta ABC} = \frac{3}{4}\sqrt{15}$. Медиана, проведенная к третьей стороне, меньше ее половины. Найти синус угла ABC.

Решение. Сначала посмотрим, что означает последнее условие задачи. Для этого построим на стороне AB как на диаметре окружность. Возможны три случая положения вершины C: внутри окружности, на окружности, вне окружности.



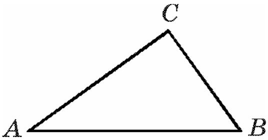
В первом случае $\angle ACB$ равен полусумме дуг AB и MN, т.е. $\angle ACB$ тупой.

Во втором случае угол $\angle ACB$ опирается на диаметр, т. е. $\angle ACB = 90°$

В третьем случае $\angle ACB = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{MN}}{2} < 90°$, т.е. острый.

Во всех трех случаях отрезок CO является медианой. Нетрудно видеть, что в первом случае медиана CO меньше половины AB, т. е. угол $\angle ACB$ – тупой. Площадь

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot \sin\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin\angle ACB = \frac{3}{4}\sqrt{15},$$



$\sin\angle ACB = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Отсюда

$$\cos\angle ACB = -\sqrt{1 - \sin^2\angle ACB} = -\frac{1}{4}$$

(минус перед корнем означает, что $\angle ACB$ тупой.) По теореме косинусов сторона

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC{\cdot}BC{\cdot}\cos\angle ACB = 9 + 4 + 12 \cdot \frac{1}{4} = 16,$$

т. е. $AB = 4$. Применив теорему косинусов к углу $\angle ABC$, получим $\cos\angle ABC = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \dfrac{16 + 4 - 9}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \dfrac{11}{16}$. Откуда

$$\sin\angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2\angle ABC} = \sqrt{\frac{256 - 121}{256}} = \sqrt{\frac{135}{256}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти площадь треугольника со сторонами:

а) 7, 24, 25; б) 5, 12, 13.

2. Найти высоту KP треугольника KLM, если:

а) $KL = 10$ см, $LM = 6$ см, $KM = 8$ см;

б) $KL = 12$ см, $LM = 5$ см, $KM = 9$ см.

3. В треугольнике величины внутренних углов относятся как 3 : 4 : 5, а длина стороны, лежащей против меньшего угла, равна $\sqrt{2}$ см. Найти длины сторон и площадь треугольника.

4. Две стороны треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, площадь треугольника равна 3. Найти третью сторону.

5. Длина стороны правильного ΔABC равна 4. Найти:

а) длину высоты BK;

б) площадь ΔABC;

в) длину медианы AE;

г) расстояние от точки пересечения биссектрис до вершины треугольника;

д) длину отрезка EK;

е) длину трезка KF, где точка F делит отрезок AB в тоношении 3:1;

ж) площадь ΔEFK;

з) расстояние от точки F до прямой EK;

и) отношение площадей ΔABC и ΔKEC.

6. В ΔABC $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$. Найти:

а) площадь ΔABC;

б) длину высоты BK;

в) длины биссектрис BE и AF;

д) длины медиан BP и CQ.

7. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 60°. Найти:

а) отношение площадей, на которые делит треугольник высота, опущенная на гипотенузу;

б) отношение площадей, на которые делит треугольник биссектриса прямого угла.

8. В ΔABC $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Найти:

а) площадь ΔABC;

б) длину высоты BK;

в) $\cos\angle ABC$;

д) длину медианы BP.

9. В ΔABC $AB = 6$, $BC = 4$, $\angle ABC = –0,25$. Найти:

а) длину стороны AC;

б) $\sin\angle BAC$;

в) площадь ΔABC;

г) длину медианы AK;

д) длину биссектрисы AL.

10. Найти площадь треугольника NOP, если $ON = 5$, высота $PK = 4\sqrt{2}$.

11. Площадь треугольника BCD равна 48 см^2. Найти сторону BC, если ысота $DM = 9$ см.

12. Найти площадь треугольника, если две его стороны равны 13 и 15 см, а высота, проведенная к третьей стороне, равна 12 см.

13. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см. Найти площадь данного треугольника, если угол между боковыми сторонами равен 120°.

14. Найти гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника, если его площадь равна 36 см^2.

15. Площадь прямоугольного треугольника равна 6 см^2, а длина одного из катетов 4 см. Найти периметр этого треугольника.

16. Дан ΔABC, в котором угол при вершине B – тупой, сторона AB = 3 см, а $\sin\angle B = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Найти периметр треугольника, если его площадь равна $3\sqrt{7}$ см^2.

17. В ΔABC угол при вершине A – острый; стороны $AB = 12$ см; $AC = 8$ см. Площадь треугольника равна умноженному на $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$ произведению сторон AB и AC. Найти периметр треугольника.

18. В ΔABC сторона $AC = 5$ см; $AB – BC = 2$ см; $\angle BCA : \angle BAC = 2 : 1$. Найти длины сторон ΔABC.

19. Найти площадь треугольника, если его высоты равны 12, 15 и 20.

20. Точка C делит отрезок AB в отношении $AC : CB = 2 : 3$. Точка D делит отрезок CB в отношении $CD : DB = 2 : 5$. Найти отношение $AC : CD$.

21. Точка P делит отрезок MN в отношении $MP : PN = 3 : 5$. Точка Q делит отрезок MP в отношении $MQ : QP = 4 : 3$. Найти отношение $QP : PN$.

22. На отрезке AB взяты точки C и D так, что $AC : CB = 2 : 11$, $AD : DB = 5 : 4$. Найти отношение длин отрезков CB и CD.

23. На отрезке AB взяты точки C и D так, что $AC : CB = 3 : 8$, $AD : DB = 7 : 5$. Найти отношение длин отрезков AC и CD.

24. В ΔABC стороны $AB = 10$ см; $BC = 8$ см; $AC = 9$ см. На какие отрезки делит сторону AC биссектриса BL?

25. На какие отрезки делит катет MP прямоугольного ΔMNP биссектриса NB, если $NP = 14$ см, $MN = 50$ см?

26. В каком отношении делятся медианы треугольника точкой их пересечения? (Использовать теорему V.)

27. На стороне BC в ΔABC взята точка D, такая, что $BD : DC = 2:5$, а на стороне AC – точка E так, что $AE = \frac{1}{3}AC$. В каком отношении делятся отрезки BE и AD точкой Q их пересечения. (Использовать теорему V.)

28. В ΔABC отрезки AD и BC, проведенные из вершин A и B к сторонам BC и AC соответственно, делятся между собой в отношении $\frac{AQ}{QD} = \frac{3}{2}$; $\frac{BQ}{QE} = \frac{4}{5}$ (Q – точка пересечения отрезков AD и BC). В каком отношении точки E и D делят стороны треугольника? (Использовать теорему VI.)

29. Каждая из сторон ΔABC разделена на три равные части так, что точки деления D, E, F, лежащие на сторонах AC, BA, и CB соответственно, отсекают по $\frac{1}{3}$ длины каждой стороны ($AD = \frac{1}{3}AC$, $BE = \frac{1}{3}BA$, $CF = \frac{1}{3}CB$). Вершины ΔABC соединены с точками деления отрезками прямых AF, BD и CE, которые, пересекаясь, образуют ΔPQR. Какую часть площади ΔABC занимает ΔPQR?

30. Стороны ΔABC равны $AB = 3$; $AC = 4$; $BC = 5$. В каком отношении точка пересечения биссектрис O делит биссектрису угла B?

31. В ΔABC на стороне AB взята точка D, которая делит сторону в отношении $AD : DB = 3 : 8$. В каком отношении CD делит медиану AM?

32. Две биссектрисы в треугольнике делятся в точке пересечения 2 : 1 и 3 : 1 (считая от вершины). Найти, в каком отношении делится точкой пересечения третья биссектриса.

33. В каком отношении делит сторону AB треугольника ABC прямая, проходящая через точку D, лежащую на стороне BC, и через середину медианы BM, если известно, что $BD : DC = 3 : 2$?

34. На продолжении стороны BC треугольника ABC взята точка D, такая, что $BC = 2CD$. В каком отношении сторону AC делит прямая, проходящая через точку D и точку M, лежащую на AB, если $3AM = MB$?

35. Точка K делит сторону AC треугольника ABC в отношении $KC : KA = 1:3$; точка M делит сторону BC в отношении $CM : MB = 2:5$. Точка D – точка пересечения отрезков AM и BK. В каком отношении точка D делит отрезок AM?

36. Точка M делит сторону AB ΔABC в отношении $AM : MB = 1:2$. Точка N лежит на стороне AC и отрезок BN делится отрезком MC в отношении 5:2, считая от вершины B. В каком отношении точка N делит сторону AC?

37. Точка P делит сторону BC ΔABC в отношении $BP : PC = 2 : 3$. Точка Q делит отрезок AP в отношении $AQ : QP = 4 : 3$. В каком отношении прямая BQ делит сторону AC?

38. Точки C_1, B_1 и A_1 делят стороны AB, AC, BC ΔABC в отношении $AC_1 : C_1B = 1 : 4$, $CB_1 : B_1A = 2 : 1$, $BA_1 : A_1C = 1 : 1$. Пусть P – точка пересечения отрезков AA_1 и CC_1, а Q – точка пересечения AA_1 и BB_1. В каком отношении точки P и Q делят отрезок AA_1?

39. Точки C_1, B_1 и A_1 делят стороны AB, AC, BC треугольника ABC в отношениях $AC_1 : C_1B = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 1 : 2$, $BA_1 : A_1C = 1 : 1$. Пусть P – точка пересечения AA_1 и CC_1, а Q – точка пересечения AA_1 и BB_1. В каком отношении точки P и Q делят отрезок AA_1?

40. В ΔABC на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 3 : 5$. Найти отношение площадей ΔABD и ΔADC.

41. В ΔABC на сторонах BC и AC взяты точки M и N так, что $BM : MC = 1$ и $AN : NC = 2 : 5$. Найти отношение площадей ΔABC и ΔBMN.

42. На сторонах AB и BC ΔABC взяты точки M и N так, что:

а) $AM : MN = 2 : 3$; $BN : NC = 1 : 1$;

б) $AM : MN = 3 : 5$; $BN : NC = 2 : 3$;

в) $AM : MN = 7 : 3$; $BN : NC = 5 : 4$.

Площадь ΔMBN равна 1. Найти площадь ΔABC.

43. Точки F и N делят стороны ΔABC в отношениях $AF : FC = 3 : 1$ и $CN : NB = 2 : 3$. Прямые AN и BF пересекаются в точке M. Найти отношение площадей ΔAMB и ΔANB.

44. В ΔABC точка L делит пополам сторону BC, точка K делит пополам отрезок BL. На прямых AK и AL вне ΔABC отложены отрезки $LD = AL$ и $KF = \frac{1}{3}AK$. Найти отношение площадей ΔABC и четырехугольника $KLFD$.

45. Точки P, Q и R лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, причем $AP : PB = BQ : QC = AR : RC = 1 : 2$. Найти отношение площадей ΔPQR и ΔABC.

46. В условиях предыдущей задачи проведены отрезки AQ, BR и CP, которые пересекаются в точках M, N и K. Найти отношение площадей ΔMNK и ΔABC.

47. В ΔABC точка M – середина стороны BC, точка K лежит на стороне AC, причем $AC = 4AK$. Прямые AM и BK пересекаются в точке O. Найти длину MK, если известно, что $AM = 5$ см, $BK = 10$ см, $\angle AOB = 135°$.

48. В ΔABC точка D – середина стороны AB, точка E лежит на стороне BC, причем $BC = 3BE$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O. Найти AB, если известно, что $AE = 5$ см, $OC = 4$ см, $\angle AOC = 120°$.

49. В ΔABC стороны $AC = 5$, $AB = 6$, $BC = 7$. Биссектриса $\angle C$ пересекает сторону AB в точке D. Найти площадь ΔADC.

50. В ΔABC стороны $AB = 4$, $BC = 6$, $\angle ABC = 30°$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Найти площадь ΔABD.

51. Периметр треугольника равен 25, а его биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, равные 7,5 и 2,5. Найти стороны треугольника.

52. В прямоугольном ΔABC с прямым углом B биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Известно, что $BD = 4$, $DC = 6$. Найти площадь ΔADC.

53. В ΔABC проведены биссектрисы BD и AF. Найти отношение площадей ΔABC и ΔCDF, если $AB = 6$, $BC = 4$ и $AC = 3$.

54. В ΔABC биссектриса $\angle BAC$ пересекает сторону BC в точке M. Известно, что $AB = BC = 2AC$, $AM = 4$. Найти площадь ΔABC.

55. В ΔABC биссектриса $\angle ABC$ пересекает сторону AC в точке K. Известно, что $BC = 2$, $KC = 1$, $BK = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Найти площадь ΔABC.

56. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, если биссектриса угла при основании делит боковую сторону в отношении 3 : 2, считая от вершины.

57. В ΔABC стороны $AC = 4$ см, $BC = 3$ см, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ см^2. Медиана, проведенная к стороне AB, меньше ее половины. Найти отношение отрезков, на которые сторона AB делится биссектрисой.

58. Длина основания AC равнобедренного ΔABC равна 5 см, а длина биссектрисы AD равна 6 см. Найти длину боковой стороны AB.

59. В ΔABC со сторонами $AB = 15$ см, $BC = 17$ см и $AC = 10$ см проведен отрезок $A'C'$ параллельно AC, причем точка A' лежит на AC, а C' – на BC. Найти:

а) $A'B$, если $BC' = 13$ см;

б) $A'C'$, если $C'C = 3$ см.

60. Стороны первого треугольника равны 71, 84 и 105 см. Найти стороны победного ему треугольника, если известно, что его периметр больше периметра первого треугольника на 156 см.

61. Стороны треугольника относятся как 4 : 5 : 6. Найти стороны треугольника, подобного данному, если меньшая сторона второго треугольника равна 0,8 м.

62. Стороны треугольника относятся как 2 : 5 : 4. Найти стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 55.

63. Известно, что в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найти неизвестные стороны треугольников.

64. Известно, что в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$, стороны AB и BC в 2,5 раза больше сторон A_1B_1 и B_1C_1. Найти AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.

65. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так. что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другои – на боковых сторонат. Найти сторону квадрата.

66. В ΔABC проведена прямая DE параллельно стороне AC (точка D лежит на стороне AB, точка E – на стороне BC). Найти отношение $AD : DB$, если известно, что $AB = 16$ м, $AC = 20$ м, $DE = 15$ м.

67. В ΔABC сторона $AB = 15$ м, $AC = 10$ м, AD – биссектриса угла A. Из точки D проведена прямая, параллельная AB и пересекающая AC в точке E. Найти AE, EC и DC.

68. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 и 12 см. Найти гипотенузу треугольников, подобных данному, если:

а) один из катетов равен 10 см;

б) разность катетов равна 20 см;

в) площадь равна 21 см^2.

69. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) отношение сторон $AB : AC = 5 : 4$. Найти площадь ΔMBN, где CM и AN – биссектрисы, если площадь треугольника ABC равна 162 см^2.

70. Прямые, параллельные основанию AC ΔABC, делят сторону AB на три равные части. Найти отношение площадей, отсекаемых фигур.

71. Прямые, параллельные основанию AC ΔABC, разбивают его на три равновеликие фигуры. В каком отношении эти прямые разбивают сторону AB (считая от вершины B)?

72. Точки K и M лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC, причем $AK : KB = 3 : 2$; $BM : MC = 3 : 1$. Через точку B проведена прямая l, параллельная AC. Прямая KM пересекает прямую l в точке P, а прямую AC – в точке N. Найти BP и CN, если $AC = a$.

73. Дан ΔABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $AC = 2CN$. Точка M находится на стороне BC, причем $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

74. Точки K и M расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC, причем $BK : KA = 1 : 4$; $BM : MC = 3 : 2$. Прямая MK пересекает прямую AC в точке N. Найти отношение $AC : CN$.

75. В остроугольном ΔABC проведены высоты AE и CD. Найти AB, если $BD = 18$; $BC = 30$; $AE = 20$.

76. В остроугольном ΔABC проведены высоты AP и CQ. Периметр ΔABC равен 15, периметр ΔBPQ равен 9, а радиус описанной около ΔBPQ окружности равен 9/5. Найти длину AC.

77. В ΔABC стороны $AB = BC = 6$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 1$. Найти длину AC.

78. В ΔABC, углы которого образуют арифметическую прогрессию с разностью 15°, проведены высоты AN, BP и CM. Найти площадь ΔMNP, если $S_{\Delta ABC} = 1$.

III. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

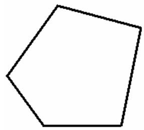
Квадрат. Прямоугольник.
Ромб. Параллелограмм. Трапеция

Определения и теоремы

Более сложной, по сравнению с треугольником, геометрической фигурой является многоугольник, у которого более трех вершин.

Определение. ***Многоугольником*** называется геометрическая фигура, ограниченная замкнутой ломаной без самопересечений. Каждое звено ломаной называется стороной многоугольника. Каждая вершина ломаной является вершиной многоугольника. Угол, образованный двумя соседними звеньями ломаной, носит название угла многоугольника.

Определение. Многоугольник называется ***выпуклым***, если он расположен по одну сторону от любой прямой, содержащей одну из его сторон.



Выпуклый пятиугольник

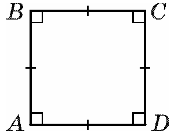
Невыпуклый пятиугольник

Определение. Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Теорема I. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$. В частности, сумма внутренних углов четырехугольника равна $360°$.

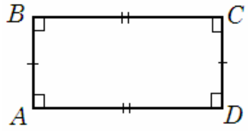
В общем случае многоугольник является геометрической фигурой, которую очень трудно исследовать, и поэтому в классе всех многоугольников выделяют несколько более или менее простых типов фигур, для которых удается доказать ряд полезных утверждений.

Определение. ***Квадратом*** называется четырехугольник, у которого все стороны равны между собой и все углы равны $90°$.



$ABCD$ – квадрат: $AB = BC = CD = DA$,

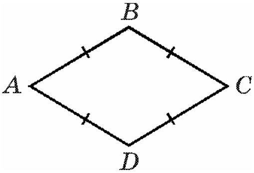
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.



Определение. ***Прямоугольником*** называется четырехугольник, у которого все углы равны *90°*.

$ABCD$ – прямоугольник:

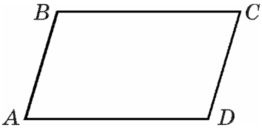
$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.



Определение. ***Ромбом*** называется четырехугольник, у которого все стороны равны.

$ABCD$ – ромб:

$AB = BC = CD = DA$.

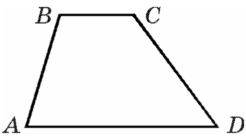


Определение. ***Параллелограммом*** называется четырехугольник, две пары противоположных сторон которого параллельны.

$ABCD$ – параллелограмм:

$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

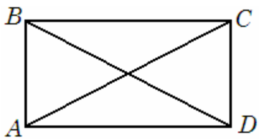
Определение. ***Трапецией*** называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются *основаниями*, а две другие стороны – *боковыми сторонами* трапеции. Трапеция называется *равнобокой*, если ее боковые стороны равны.



$ABCD$ – трапеция:

$BC \parallel AD$, $AB \nparallel CD$.

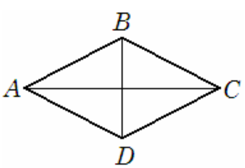
Определение. ***Диагональю*** многоугольника называется отрезок, соединяющий любые две вершины многоугольника, не являющиеся соседними.



Теорема II. Диагонали прямоугольника равны:

$ABCD$ – прямоугольник $\Rightarrow$ $AC = BD$.

Теорема III. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба лежат на биссектрисах углов ромба:



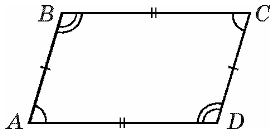
$ABCD$ – ромб $\Rightarrow$ $AC \perp BD$,

$\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA$,

$\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB$.

Теорема IV. Квадрат является прямоугольником. Квадрат является ромбом. Прямоугольник является параллелограммом. Ромб является параллелограммом.

Теорема V. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда две стороны параллелограмма равны и параллельны, или когда противолежащие стороны попарно равны:

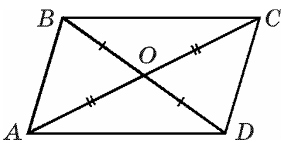


$$ABCD \text{ – параллелограмм } \Rightarrow$$
$$AB \parallel CD, \quad AB = CD,$$
$$BC \parallel AD, \ BC = AD.$$

Теорема VI. В параллелограмме противолежащие углы равны, сумма двух соседних углов равна 180°:

$$ABCD \text{ – параллелограмм } \Rightarrow \angle A = \angle C, \ \angle B = \angle D,$$
$$\angle A + \angle B = \angle A + \angle D = \angle C + \angle B = \angle C + \angle D = 180°.$$

Теорема VII. В параллелограмме диагонали точкой их пересечения делятся пополам:

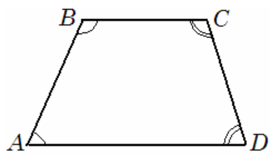


$$ABCD \text{ – параллелограмм},$$
$$AC \cap BD = 0 \ \Rightarrow AO = OC, BO = OD.$$

Теорема VIII. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон:

$$ABCD \text{ – параллелограмм}, \ AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

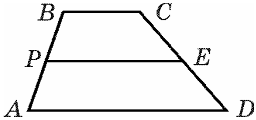
Теорема IX. В трапеции сумма углов при боковой стороне равна 180°.



$$ABCD \text{ – трапеция}, \ BC \parallel AD,$$
$$\angle A + \angle B = \angle D + \angle C = 180°.$$

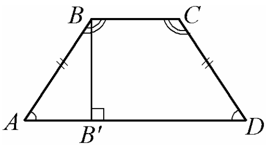
Определение. ***Средней линией*** трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Теорема X. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме оснований.



$$BC \parallel AD, AP = PB, DE = CE \ \Rightarrow$$
$$PE \parallel AD, \quad PE = \frac{AD + BC}{2}.$$

Теорема XI. Трапеция является равнобокой тогда и только тогда, когда углы при основании равны:

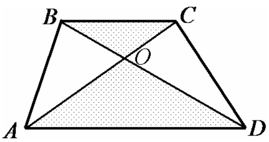


$$AB = CD \Leftrightarrow \angle A = \angle D.$$

В равнобокой трапеции диагонали равны.

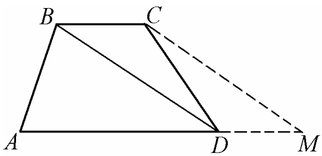
В равнобокой трапеции $B'D = L_{\text{сред. линии}}$, т.е. $B'D = \dfrac{BC + AD}{2}$.

Теорема XII. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника, два из которых (прилежащие к основаниям) подобны, два (прилежащие к боковым сторонам) равновелики.



$ABCD$ – трапеция,

$\Delta BOC \sim \Delta AOD$, $S_{ABO} = S_{DCO}$.



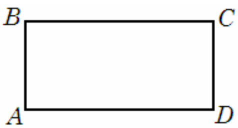
В некоторых задачах для любых трапеций используют дополнительное построение $CM \parallel BD$. Тогда получаем

$$BD = CM, \quad BC = DM,$$

$$AM = 2L_{\text{сред.линии}},$$

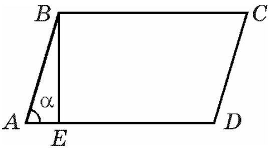
$$AM = BC + AD.$$

Напомним формулы площадей четырехугольников.



Площадь прямоугольника равна произведению смежных сторон:

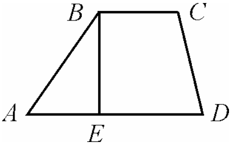
$$S = AB \cdot AD.$$



Площадь параллелограмма определяется по формуле:

$$S = AD \cdot BE = AB \cdot AD \sin\alpha,$$

где BE – *высота* параллелограмма, проведенная к стороне AD.



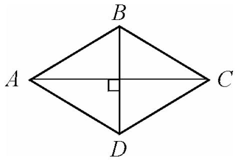
Площадь трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ вычисляется по формуле:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE,$$

где BE – также *высота* к основанию AD.

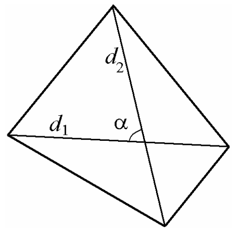
Площадь ромба равна половине произведения диагоналей:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD .$$



Площадь любого выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус ушла между ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\alpha .$$



Площадь правильного n-угольника

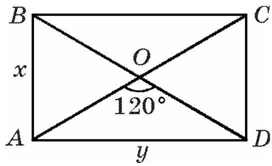
$$S = \frac{na^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} .$$

Примеры решения задач

Задача 3.1. Площадь прямоугольника равна $9\sqrt{3}$ см^2, а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна 120°. Найти стороны прямоугольника.

Решение. Дан прямоугольник $ABCD$, $AC = BD$ – как диагонали прямоугольника; $AC = BD = d$.

По формуле для площади



$$S_{ABCD} = 4S_{\Delta AOD} =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \sin\ 120° = \frac{1}{2} d^2 \sin 120° ;$$

Так как $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и по условию

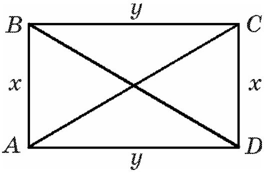
$S_{ABCD} = 9\sqrt{3}$, то $9\sqrt{3} = \frac{d^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $d^2 = 36$, $d = 6$.

ΔBAD – прямоугольный. Обозначив $AB = CD = x$, $AD = BC = y$ и использовав теорему Пифагора, получаем: $x^2 + y^2 = d^2 = 36$.

Так как $S_{ABCD} = xy$, то $9\sqrt{3} = xy$. Получаем систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ xy = 9\sqrt{3} . \end{cases}$

Откуда находим *ответ:* 3 см, $3\sqrt{3}$ см.

Задача 3.2. Периметр прямоугольника равен 46 см, а его диагональ – 17 см. Найти площадь прямоугольника.



Решение. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали $AC = BD = d$, обозначим стороны $AB = CD = x$, $AD = BC = y$. Периметр прямоугольника $P_{ABCD} = 2x + + 2y = 46$, откуда $x + y = 23$. Так как $\Delta BAD = \Delta BCD$ и являются прямоугольными треугольниками, то $AB^2 + AD^2 = BD^2$. Получаем систему

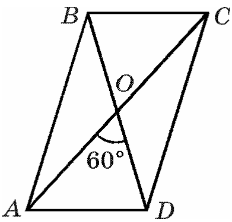
$$\begin{cases} x^2+y^2=d^2, \\ x+y = 23, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+y^2= 17^2, \\ x+y = 23. \end{cases}$$

Возводим второе уравнение системы в квадрат: $(x + y)^2 = 23^2$, тогда $x^2 + 2xy + y^2 = 23^2$, $xy = \dfrac{23^2 - (x^2 + y^2)}{2} = \dfrac{23^2 - 17^2}{2} = 120$.

Ответ: 120 см^2.

Задача 3.3. Найти площадь параллелограмма, если его диагонали равны 3 и 5 см, а острый угол между ними равен 60°.

Решение. В параллелограмме $ABCD$ диагонали $AC = d_1 = 5$ см; $BD = d_2 = 3$ см, $\angle AOD = 60°$ – по условию. Тогда

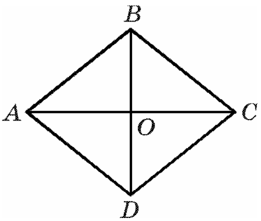


$$S_{ABCD} = 4S_{\Delta AOD} =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}\right) \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin 60° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ см^2.



Задача 3.4. Периметр ромба равен 48 см, а сумма длин его диагоналей равна 26 см. Найти площадь ромба.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей ромба. Стороны ромба равны, т. е. $AB = BC = CD = AD = 12$ см.

Пусть $OB = x$. Тогда $OC = 13 - x$. По теореме Пифагора

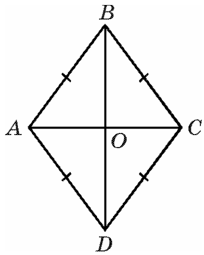
$$x^2 + (13 - x)^2 = 12^2, \quad 2x^2 - 26x + 25 = 0,$$

т.е. $26x - 2x^2 = 25$. Так как $BD = 2x$ и $AC = 26 - 2x$, то

$$S_{ABCD} = \frac{2x(26 - 2x)}{2} = 26x - 2x^2 = 25.$$

Ответ: 25 см^2.

Задача 3.5. Сумма длин диагоналей ромба равна 5 см, а его площадь 2 см^2. Найти длину стороны ромба.



*Решение***.** Отметим, что стороны у ромба равны по определению; диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Обозначим $AC = d_1$, $BD = d_2$ – диагонали.

Известно, что площадь ромба

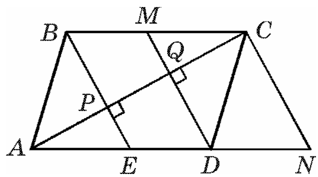
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1 d_2 = 2 \text{ см}^2.$$

По условию $d_1 + d_2 = 5$ см. Получаем систему уравнений $\begin{cases} d_1 + d_2 = 5, \\ d_1 d_2 = 4. \end{cases}$ Откуда следует, что $d_1 = 1$, $d_2 = 4$. Так как в точке пересечения диагонали ромба делятся пополам, то $BO = OD = \frac{1}{2}$ см, $AO = OC = \frac{4}{2}$ см. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{17}}{2}$ см.

Задача 3.6. В параллелограмме $ABCD$ стороны $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, точка E – середина стороны AD. Найти площадь параллелограмма, если известно, что отрезки AC и BE перпендикулярны.



Решение. Проведем DM и CN параллельно BE (точка M лежит на BC, N – на продолжении AD). Точки P и Q – точки пересечения BE и MD с

AC. Треугольники ABE и MDC равны ($AB = CD$, $\angle BAE = \angle MCD$, $\angle ABE = \angle CDN$ как углы со взаимно параллельными и противоположно направленными сторонами). Отсюда следует, что $MC = ED = \frac{1}{2}BC$. По теореме Фалеса, примененной к углам CAD и ACB, $\frac{AP}{PQ} = \frac{AE}{ED} = 1$, $\frac{PQ}{QC} = \frac{BM}{MC} = 1$, т. е. $AP = PQ = QC$. Обозначим эти отрезки через y.

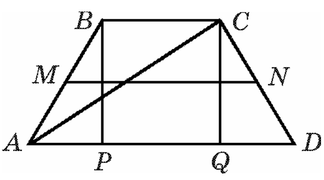
Треугольники APE и BPC подобны по трем углам, причем коэффициент подобия равен $\frac{AP}{PC} = \frac{1}{2}$, поэтому $\frac{BP}{PE} = \frac{2}{1}$. Пусть $PE = x$, тогда $BP = 2x$. Треугольник ABE равен треугольнику DCN, поэтому $S_{ABCD} = S_{EBCN}$. Площадь параллелограмма $EBCN$ равна $CP{\cdot}BE = 6xy$. Следовательно, $S_{ABCD} = 6\,xy$. Из прямоугольных ΔAPB и ΔBPC получаем: $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4, \\ 4x^2 + 4y^2 = 9, \end{cases}$ откуда $y^2 = \frac{5}{3}$, $x^2 = \frac{7}{12}$.

Таким образом,

$$S_{ABCD} = 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{12}} = \sqrt{35}.$$

Ответ: $\sqrt{35}$ см^2.

Задача 3.7. В равнобочной трапеции высота равна 12 см, а средняя линия – 16 см. Найти длину диагонали этой трапеции.

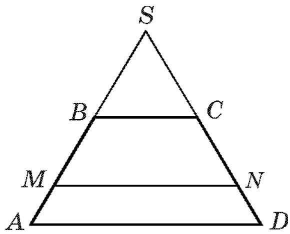


Решение. Пусть MN – средняя линия трапеции; BP и CQ – высоты. Треугольники ABP и QCD равны по гипотенузе ($AC = CD$) и катету ($BP = CQ$). Следовательно, $AP = QD$. Кроме того, $BC = PQ$.

Сумма оснований трапеции $BC + AD = 2AP + 2PQ = 2AQ$. Отсюда следует, что $AQ = MN$. Диагональ AC находим из прямоугольного треугольника ACQ: $AC = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$.

Ответ: 20 см.

Задача 3.8. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям и делит площадь трапеции пополам. Найти MN, если $BC = a$, $AD = b$.



Решение. Пусть $BC = a$, $AD = b$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке S. Треугольники ASD, MSN, BSC подобны. Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон. Обозначим площадь ΔBSC через σ, а длину MN через x. Тогда $S_{\Delta ASD} = \sigma \frac{b^2}{a^2}$, $S_{\Delta MSN} = \sigma \frac{x^2}{a^2}$. Так как $S_{\Delta ASD} - S_{\Delta MSN} = S_{\Delta MSN} - S_{\Delta BSC}$, то

$$\sigma\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) = \sigma\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \Leftrightarrow b^2 - x^2 = x^2 - a^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

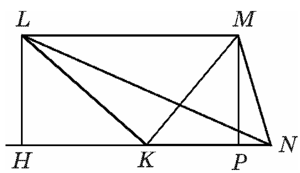
Задача 3.9. Диагональ равнобочной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, а периметр – 42 см. Найти площадь трапеции.

Решите самостоятельно.

Ответ: 96 см^2.

Указание. Провести диагональ. Доказать, что отсекаемый остроугольный треугольник является равнобедренным.

Задача 3.10. Длины основания KN, диагонали KM и боковой стороны KL трапеции $KLMN$ равны a, длина диагонали LN равна b. Найти длину боковой стороны MN.



Решение. Пусть LH и MP – высоты трапеции. Пусть $HK = x$. По теореме Пифагора $LH = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Из прямоугольного треугольника HLN получаем:

$$LH^2 + HN^2 = LN^2 \Leftrightarrow (a^2 - x^2) + (a + x)^2 = b^2 \Leftrightarrow 2ax = b^2 - 2a^2.$$

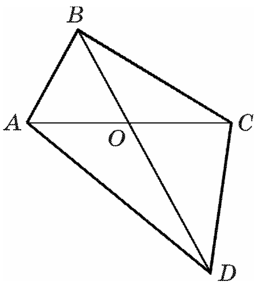
Треугольники HLK и KMP равны по катету и гипотенузе, поэтому $KP = HK = x$. В прямоугольном треугольнике MNP сторона $MP = \sqrt{a^2 - x^2}$, $PN = a - x$, поэтому

$$MN^2 = MP^2 + PN^2 =$$
$$= a^2 - x^2 + (a - x)^2 = 2a^2 - 2ax = 2a^2 - (b^2 - 2a^2),$$
$$MN = \sqrt{4a^2 - b^2}.$$

Ответ: $\sqrt{4a^2 - b^2}$.

Задача 3.11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найти отношение площадей треугольников ABC и BAD, если $AO : OC = 3:4$, $BO : OD = 2:5$.

Решение. Пусть $S_{\Delta BOC} = S$. Из отношения $\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{3}{4}$



следует, что $S_{\Delta AOB} = \frac{3}{4}S$. Так как $\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{OD}{OB} = \frac{5}{2}$, то $S_{\Delta AOD} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}S = \frac{15}{8}S$.

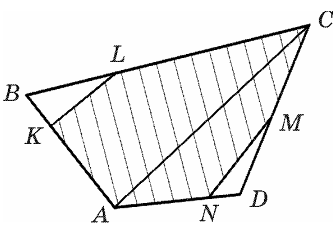
Таким образом,

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{S + 3/4S}{3/4S + 15/8S} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: 2 : 3.

Задача 3.12. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки K на AB, L на BC, M на CD и N на AD так, что $AK : KB = 2$, $BL : LC = 1 : 3$, $CM : MD = 1$, $ND : NA = 1 : 5$. Найти отношение площадь S_{AKLCMN}.

Решение. Площади треугольников ABC и KBL относятся как



$\frac{AB \cdot BC}{KB \cdot BL}$, так как

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B,$$

$$S_{\Delta KBL} = \frac{1}{2} KB \cdot BL \sin B$$

(т. е. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BKL}} = \frac{AB \cdot BC}{1/3AB \cdot 1/4BC}$, см. также теорему I § 2), следовательно, $S_{\Delta KBL} = \frac{1}{12} S_{\Delta ABC}$. Аналогично, $S_{\Delta NDM} = \frac{1}{12} S_{\Delta ADC}$. Площадь

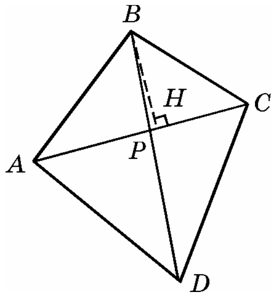
$$S_{AKLCMN} = (S_{\Delta ABC} - S_{\Delta KBL}) + (S_{\Delta ADC} - S_{\Delta NDM}) =$$
$$= \frac{11}{12}(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD}) = \frac{11}{12} S_{ABCD} = \frac{11}{12}.$$

Ответ: $\frac{11}{12}$.

Задача 3.13. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Площади треугольников $S_{\Delta ABP} = S_1$, $S_{\Delta BCP} = S_2$, $S_{\Delta CDP} = S_3$. Найти площадь $S_{\Delta ADP}$.

Решение. Треугольники ABP и BPC имеют общую высоту BH, поэтому отношение их площадей равно отношению оснований:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AP}{PC}.$$

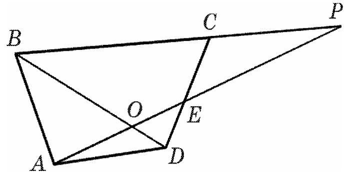


Аналогично, сравнивая площади треугольников ADP и CDP, имеем $\frac{S_{\Delta ADP}}{S_3} = \frac{AP}{PC} = \frac{S_1}{S_2}$. Отсюда получаем *ответ*:

$$S_{\Delta ADP} = \frac{S_1 S_3}{S_2}.$$

Задача 3.14. В трапеции $ABCD$ точка E лежит на боковой стороне CD. Точка O – пересечение BD и AE. Найти площадь ΔDOE, если $DE : CE = 1 : 2$, $AO = 2 \cdot OE$ и $S_{\Delta AOB} = 1$.

Решение. Пусть $\angle AOB = \angle DOE = \alpha$. Так как



$$\frac{S_{\Delta DOE}}{S_{\Delta AOB}} = \frac{\frac{1}{2} OE \cdot OD \sin\alpha}{\frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\alpha} = \frac{OD}{2OB},$$

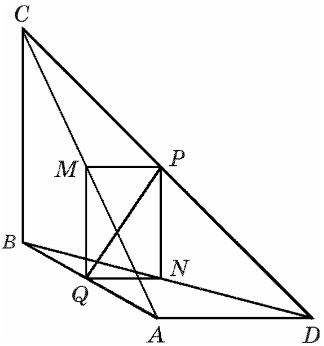
то для решения задачи достаточно найти отношение $\frac{OD}{OB}$. Продолжим AE до пересечения с BC в точке P. Треугольники AED и

ECP подобны с коэффициентом подобия $k = \dfrac{ED}{EC} = \dfrac{1}{2}$. Обозначим $OE = x$. Тогда $AO = 2x$, $AE = 3x$, $EP = 6\,x$. Треугольник AOD подобен треугольнику BOP с коэффициентом подобия $k' = \dfrac{AO}{OP} = \dfrac{2\,x}{OP} = \dfrac{2\,x}{7\,x} = \dfrac{2}{7}$, поэтому $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AO}{OP} = \dfrac{2}{7}$. Таким образом,

$$S_{\Delta AOD} = S_{\Delta AOB} \cdot \frac{OD}{OB} = \frac{2}{7}, \qquad S_{\Delta OED} = S_{\Delta AOD} \cdot \frac{OE}{AO} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{7}$.

Задача 3.15. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1 м. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.



Решение. Пусть P и Q – середины CD и AB, а M и N – середины диагоналей. Соединим точки M, P, Q и N. Отрезки MP и QN равны и параллельны AD (как средние линии в треугольниках ACD и ABD).

Аналогично, отрезки MQ и PN равны и параллельны. Поэтому $MPNQ$ – параллелограмм. Угол между соседними сторонами этого параллелограмма равен углу между BC и AD, т. е. $MPQN$ – прямоугольник. Диагонали прямоугольника равны, т. е. $PQ = MN$.

Ответ: 1 м.

Задачи для самостоятельного решения

1. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 4. Найти:

а) площадь квадрата;

б) длину диагонали квадрата;

в) расстояние от точки пересечения диагоналей до точки, делящей одну из сторон квадрата на части в отношении 1 : 2.

2. Найти площадь квадрата, если его диагональ равна 4 м.

3. Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза?

4. Как изменится площадь квадрата и его периметр, если диагональ квадрата уменьшить в три раза?

5. Длины сторон прямоугольника равны 4 и 8. Найти:

а) площадь прямоугольника;

б) длину диагонали прямоугольника;

в) синус угла между диагональю и большей из сторон;

г) синус угла между диагоналями прямоугольника.

6. Как изменится площадь прямоугольника, если одну из сторон увеличить на 50 %?

7**.** Определить периметр прямоугольника, если его диагональ равна $2\sqrt{10}$ м, а площадь 12 м^2.

8. Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр 74 дм, а площадь 3 м^2?

9. Чему равны стороны прямоугольника, если они относятся как 4 : 9, а его площадь 144 м^2?

10. Площадь прямоугольника, одна из сторон которого в 1,5 раза больше другой, составляет $^{24}/_{49}$ площади квадрата со стороной 175 см. Найти диагональ прямоугольника.

11. Площадь прямоугольника со сторонами x и y составляет 30 % от площади квадрата со стороной x и 120 % от площади круга радиуса $\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$. Найти x.

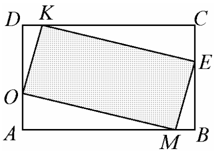
12. В прямоугольнике $ABCD$, площадь которого равна 30, на сторонах AB и AD выбраны соответственно точки E и F так, что $AE : EB =$ $= 5 : 1$, $AF : FD = 2 : 3$. Найти площадь ΔFOD, где O – точка пересечения отрезков DE и CF.

13. Вычислить длину изгороди вокруг прямоугольного участка площадью 266 см^2, одна сторона которого на 5 см больше другой.

14. Сторона квадрата $ABCD$ равна 4. Через вершину D проведена прямая l, пересекающая сторону BC и проходящая на расстоянии 2 от середины стороны AB. В каком отношении прямая l делит сторону BC?

15. Точка M делит диагональ AC квадрата $ABCD$ со стороной a в отношении $AM : MC = 3 : 1$, точка N лежит на AB, причем $\angle NMD$ – прямой. Найти длину AN.

16. Площадь прямоугольника равна 16 см^2, а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна $150°$. Найти стороны прямоугольника.



17. В прямоугольник со сторонами 3 и 4 м вписан другой прямоугольник, стороны которого относятся как 1 : 3. Найдите площадь вписанного прямоугольника.

18. Сторона ромба равна 8 м, а острый угол равен 30°. Найти: а) площадь и б) диагонали ромба.

19. Найти площадь ромба, если его высота равна 10 м, а острый угол 30°.

20. Найти площадь ромба, если его диагонали 24 и 7 м.

21. Периметр ромба равен 20 см, сумма длин диагоналей равна 14 см. Найти площадь ромба.

22. Высота ромба в 2 раза меньше большей диагонали. Найти отношение меньшей диагонали к стороне.

23. Диагонали ромба равны 28 и 21. Найти высоту ромба.

24. Высота ромба равна 12 см, а меньшая диагональ – 15 см. Найти площадь ромба.

25. Найти площадь ромба, если его сторона имеет длину 4 см, а острый угол равен $45°$.

26. Найти длину стороны ромба площадью 12 см^2, если длины его диагоналей относятся как 3 : 4.

27. Найти углы ромба, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону пополам.

28. Периметр ромба равен 8, высота равна 1. Найти тупой угол ромба.

29. Стороны параллелограмма равны 7 и 9 м, а площадь его равна 126 м^2. Найти обе высоты.

30. Стороны параллелограмма равны 5 и 8 м, а один из углов равен 150°. Найти площадь параллелограмма.

31. Диагонали параллелограмма, равные 5 и 12, пересекаются под углом 30°. Найти площадь параллелограмма.

32. Площадь параллелограмма равна 96 м^2, а высоты его равны 6 и 8 м. Найти периметр параллелограмма.

33. Площадь параллелограмма равна 64 $м^2$, а расстояние от точки пересечения диагоналей до сторон равны 2,5 и 5 м. Найти стороны параллелограмма.

34. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 4, угол D равен 45°, сторона BC равна $4\sqrt{2}$. Найти диагональ AC.

35. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 21, угол ABD равен 45°, диагональ BD равна $3\sqrt{2}$. Найти сторону BC.

36. Периметр параллелограмма равен 48 см, а его высоты относятся как 5 : 7. Определить длины сторон параллелограмма.

37. Найти синус острого угла параллелограмма, если длины его высот равны 3 и 4, а периметр равен 28.

38. Диагонали параллелограмма равны 25 и 15 см. Угол между сторонами равен 45°. Найти площадь параллелограмма.

39. Диагонали параллелограмма пересекаются под углом 45° и имеют длины 6 и $\sqrt{72}$. Найти длину большей высоты параллелограмма.

40. Отношение сторон параллелограмма равно 5 : 8, угол между ними равен 60°. Площадь параллелограмма равна $80\sqrt{3}$. Найти периметр параллелограмма.

41. Диагонали параллелограмма равны 17 и 19 см. Одна из сторон 2 см. Найти другую сторону параллелограмма.

42. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна 5 см, синус тупого угла ADB равен 4/5. Найти площадь параллелограмма, если сторона AB равна $\sqrt{41}$ см.

43. Угол B параллелограмма $ABCD$ – тупой. Длина сторон AB = = 3 см, BC = 8 см. Площадь параллелограмма составляет $\sqrt{5}/3$ от произведения сторон $AB \cdot BC$. Найти диагональ AC.

44. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $5\sqrt{3}$ $см^2$, а угол при вершине A равен 60°. Высота BH, проведенная к стороне AD, равна $\sqrt{3}$ см. Найти диагональ BD.

45. Периметр параллелограмма равен 90 см, острый угол 60°. Диагональ параллелограмма делит тупой угол в отношении 1 : 3. Найти стороны параллелограмма.

46. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, равна 2 и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма $30°$. Найти диагональ, проведенную из вершины тупого угла.

47. Стороны параллелограмма равны 8 и 3. Биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три части. Найти каждую из них.

48. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки, равные a и b. Найти стороны параллелограмма.

49. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найти периметр треугольника CBT, если $AB = 21$, $BM = 35$, $MD = 9$.

50. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, точка K – пересечение отрезка AM и диагонали BD. Известно, что $BM : MC = 1 : 4$, а площадь $\Delta BMK = 1$. Найти площадь четырехугольника $KMCD$.

51. На диагоналях AC и BD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки P и Q так, что $AP : PC = 1 : 5$, $DQ : QB = 2 : 7$. Площадь $\Delta PQC = 1$. Найти площадь параллелограмма.

52. На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, M, L так, что $AK : KB = 2 : 1$, $BM : MC = 1 : 1$, $AL : LD = 1 : 3$. Найти отношение площадей треугольников: $S_{\Delta KBL} : S_{\Delta BML}$.

53. В некоторой равнобедренной трапеции длина боковой стороны равна длине средней линии. Периметр трапеции равен 48. Найти длину боковой стороны.

54. Диагонали трапеции равны 6 и 8, а ее площадь 24. Найти среднюю линию трапеции.

55. Диагонали трапеции равны 30 и 40, а ее средняя линия равна 25. Найти площадь трапеции.

56. В прямоугольной трапеции длина диагонали равна длине боковой стороны. Найти длину средней линии трапеции, если длины ее высоты и боковой стороны равны соответственно 2 и 4.

57. В трапеции $ABCD$ отношение оснований $AD : BC = 5 : 3$. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Площадь ΔBOC равна 12. Найти площади ΔAOD и ΔCOD.

58. Основания трапеции равны a и b. Определить длину отрезка прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям.

59. Основания трапеции равны a и b. Определить, как относятся площади частей, на которые трапеция делится средней линией.

60. Высота равнобедренной трапеции, проведенная из вершины меньшего основания, делит ее большее основание на отрезки 4 и 8 см. Найти основания трапеции.

61. В равнобедренной трапеции высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти среднюю линию трапеции.

62. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол $30°$ с одним из оснований. Найти нижнее основание, если на нем лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

63. Найти площадь равнобочной трапеции, если длины ее диагоналей равны 8 см и они взаимно перпендикулярны.

64. Диагональ равнобочной трапеции равна 10, а площадь 48. Найти высоту трапеции.

65. Найти площадь трапеции с основанием 7 и 13 см и боковыми сторонами 8 и 10 см.

66. Найти площадь равнобедренной трапеции, основания которой имеют длины 12 и 20 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

67. Большее и меньшее основания равнобедренной трапеции равны соответственно 15 и 9, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

68. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найти площадь трапеции, если известно, что длина одной из диагоналей равна 5.

69. Найти отношение большего основания трапеции к меньшему, если средняя линия делится диагоналями на три равные части.

70. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание равно 8 см, периметр трапеции равен 112 см. Найти площадь трапеции.

71. Найти площадь трапеции с основаниями 5 и 9 см и диагоналями 12 и 12 см.

72. Основания трапеции $ABCD$ равны $BC = 3$ см и $AD = 5$ см. Угол при вершине A равен $60°$, а угол при вершине D равен $30°$. Найти площадь трапеции.

73. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Основание $AD = 18$ см, $AO = 10$ см, $OC = 5$ см. Найти длину основания BC.

74. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длины $AC = a$, $BC = b$. Найти площадь трапеции $ABCD$.

75. В трапеции углы при одном из оснований имеют величины $20°$ и $70°$, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2. Найти меньшее основание, если длина средней линии трапеции 4.

76. Основания трапеции $ABCD$ равны $BC = 1$, $AD = 2$. Параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая AB в точке P, AC в точке L, BD в точке R и CD в точке Q, причем $PL = LR$. Найти PQ.

77. В трапеции $ABCD$ основания $AD = 10$ и $BC = 6$. Точка E – середина CD. Найти отношения площадей $S_{ABCE} : S_{\Delta AED}$.

78. В трапеции $ABCD$ точки F и G делят боковые стороны $AF : FB = 1 : 2$ и $CG : GD = 1:1$. Основания $AD = 12$, $BC = 5$. Найти отношение площадей $S_{FBCG} : S_{AFGD}$.

79. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$, $BC = \sqrt{39}$, $\angle BAD = 30°$, $\angle ADC = 60°$. Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину отрезка этой прямой, находящейся внутри трапеции.

80. В трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 3$. На продолжении BC взята точка M так, что AM отсекает от трапеции треугольник, площадь которого равна 3/4 площади трапеции. Найти длину CM.

81. В трапеции $ABCD$ точка E лежит на боковой стороне CD. Отрезки BD и AE пересекаются в точке O. Найти площадь $S_{\Delta DOE}$, если $DE : EC = 1 : 2$, $AO = 2\cdot OE$, а площадь $S_{\Delta AOB} = 1$.

82. В трапеции $ABCD$ точка M лежит на боковой стороне AB, отрезки BD и CM пересекаются в точке O. Известно, что $AM = MB$, $CO = 4OM$, $S_{\Delta BOM} = 1$. Найти площадь $S_{\Delta COD}$.

83. Точка M лежит на боковой стороне AB трапеции $ABCD$. Отрезки CM и BD пересекаются в точке O. Известно, что площадь $S_{\Delta DCO} = 7$, $AM = 2MB$, $CO = 2OM$. Найти площадь $S_{\Delta BMO}$.

84. В трапеции $ABCD$ точки F и E делят основание AD в отношении $AF : FE : ED = 1 : 4 : 1$. Прямые BE и FC пересекают диагонали AC и BD в точках M и N, при этом $DC = 60$ и $AD = 24$. Найти длину MN.

85. В трапеции $ABCD$ основания $AD = 30$, $BC = 24$, сторона $AB = 3$, $\angle BAD = 60°$. Диагонали пересекаются в точке E. Найти площадь $S_{\Delta CED}$.

86. В трапеции $ABCD$ основание $BC = 3$, боковые стороны $AB = CD = 3$. Диагонали образуют угол $60°$. Найти длину AD.

87. В трапеции $ABCD$ основание $AD = \sqrt{7}$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Известно, что $AK = 1$, $KD = 2$, $\angle BAC = \angle DAC$. Найти площадь $S_{\Delta ABC}$.

88. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $\angle BAD = \angle ADC = \pi/2$, основание $AB = 1{,}5AC$, $\angle DCA = \angle BCA$, $AD = 4$. Найти площадь S_{ABCD}.

89. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найти отношение площадей:

а) ΔAOB и ΔBOC, если $AO : OC = 3 : 5$;

б) ΔBCD и ΔAOB, если $AO : OC = 1 : 2$ и $BO : OD = 3 : 1$.

90. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины AB и CD, равна 1 м. Найти длину отрезка, соединяющего середины BC и AD.

91. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны 1 м и 2 м. Найти площадь этого четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

92. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Найти величину угла при вершине A четырехугольника, если углы DBC и CDB равны соответственно $57°$ и $63°$.

93. Величины углов выпуклого многоугольника относятся как $1 : 3 : 4 : 5 : 7$. Найти величину меньшего угла.

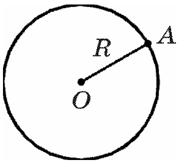
94. Найти углы правильного n-угольника, если: а) $n = 6$, б) $n = 10$.

IV. ОКРУЖНОСТЬ

Хорда. Касательная. Секущая. Вписанный угол. Центральный угол

Определения и теоремы

Определение. ***Окружностью*** называется множество всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки, называемой центром, равно данному числу, называемому *радиусом.*



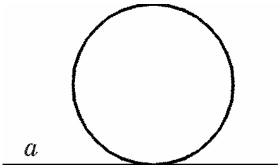
Другими словами, расстояние от любой точки окружности до центра равно радиусу.

O – центр, A – точка окружности,

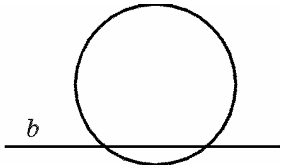
R – радиус $\Rightarrow$ $OA = R$.

Определение. Множество всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не превосходит данного числа, называется ***кругом*** с центром в данной точке и радиусом, равным данному числу.

Определение. ***Касательной*** к данной окружности называется прямая, имеющая ровно одну общую точку с данной окружностью.



прямая a – касательная



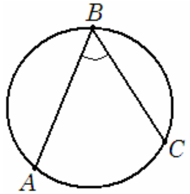
прямая b – секущая

Определение. ***Секущей*** к данной окружности называется прямая, имеющая две различные общие точки с данной окружностью.

Определение. ***Хордой*** окружности называется отрезок, концы которого лежат на данной окружности.

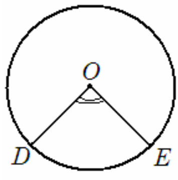
Определение. Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром*** ($d = 2R$).

Определение. ***Дугой*** окружности называется часть окружности, заключенная между двумя точками данной окружности.



Определение. ***Углом, вписанным в окружность,*** называется угол, вершина которого лежит на данной окружности, а стороны являются хордами окружности.

$\angle ABC$ – вписанный угол.



Определение. ***Центральным углом окружности*** называется угол, вершина которого находится в центре данной окружности.

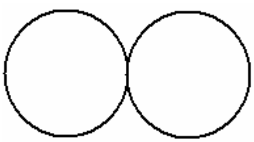
O – центр окружности,

$\angle DOE$ – центральный угол

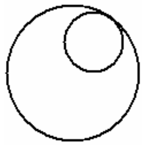
З а м е ч а н и е. Говорят, что вписанный (или центральный) угол опирается на дугу окружности, если точки пересечения сторон угла с окружностью являются концами этой дуги ($\angle ABC$ опирается на дугу AC, $\angle DOE$ опирается на дугу DE).

Определение. ***Угловой величиной дуги*** окружности называется величина центрального угла, опирающегося на эту дугу.

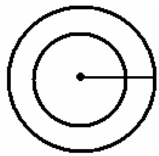
Определение. Две окружности называются ***касающимися***, если они имеют ровно одну общую точку.



Окружности касаются внешним образом



Окружности касаются внутренним образом

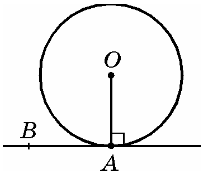


Концентрические окружности

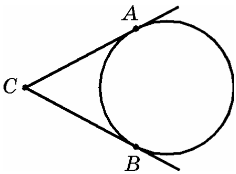
Определение. Две окружности, имеющие общий центр, называются ***концентрическими***.

Для решения задач на окружность и круг оказываются полезными следующие теоремы.

Теорема I. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

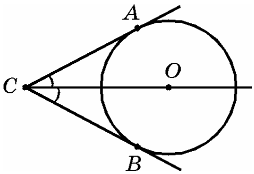


AB – касательная,
A – точка касания,
O – центр окружности,
$OA \perp AB$.



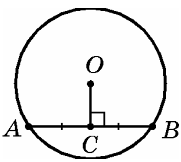
Теорема II. Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны.

CA и CB – касательные,
$CA = CB$.



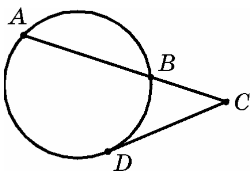
Теорема III. Центр окружности, касающейся обеих сторон угла, лежит на биссектрисе этого угла.

Окружность касается CA и CB,
O – центр окружности,
$\angle ACO = \angle BCO$.



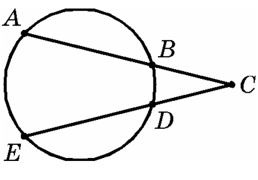
Теорема IV. Основание перпендикуляра, опущенного из центра окружности на хорду, лежит на середине хорды.

O – центр окружности, AB – хорда,
$OC \perp AB \Leftrightarrow AC = CB$.



Теорема V. Произведение секущей на его внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведенной из этой точки к окружности.

AC – секущая, CD – касательная,
$AC \cdot BC = CD^2$.

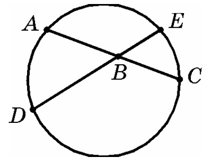


Теорема VI. Произведение отрезка секущей, проведенного из данной точки к данной окружности, на его внешнюю часть не зависит от положения секущей.

$AC \cdot BC = EC \cdot DC$.

Теорема VII. Произведения отрезков, на которые делятся хорды точкой их пересечения, равны.

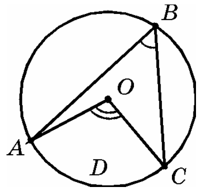
$$AB \cdot BC = DB \cdot BE.$$



Теорема VIII. Величина угла, вписанного в окружность, равна половине угловой величины дуги окружности, на которую опирается этот угол, и, следовательно, равна половине вели-чины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

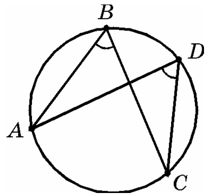
O – центр окружности,

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \cup ADC .$$



Теорема IX. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны.

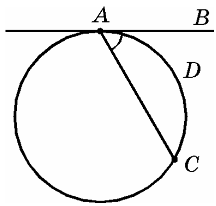
$$\angle ABC = \angle ADC .$$



Теорема X. Величина угла между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равна половине угловой величины дуги, отсекаемой от окружности хордой.

AB – касательная,

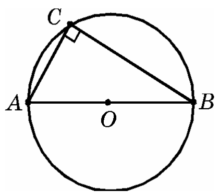
$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cup ADC .$$



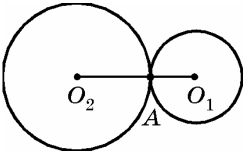
Теорема XI. Вписанный угол является прямым углом тогда и только тогда, когда он опирается на диаметр.

$\angle C = 90° \Leftrightarrow AB$ – диаметр,

O – центр окружности.

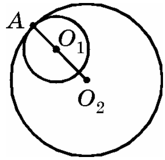


Теорема XII. Точка касания двух окружностей и центры этих окружностей лежат на одной прямой. Расстояние между центрами окружностей, касающихся внешним образом, равно сумме радиусов этих окружностей. Расстояние между центрами окружностей, касающихся внутренним образом, равно разности радиусов окружностей.



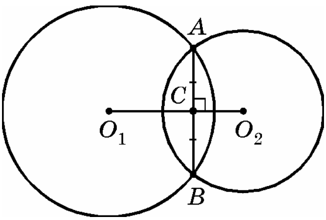
$O_1O_2 = R_2 + R_1$

A – точка касания,
O_1, O_2 – центры,
точка A лежит на прямой O_1O_2,
R_1, R_2 – радиусы.



$O_1O_2 = R_2 - R_1$

Теорема XIII. Центры двух пересекающихся окружностей лежат на серединном перпендикуляре к их общей хорде.

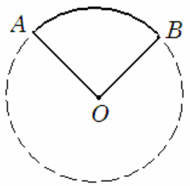


O_1, O_2 – центры окружностей,
A и B – точки пересечения окружностей,
$O_1O_2 \cap AB = C \Rightarrow$
$\Rightarrow O_1O_2 \perp AB,\ AC = CB.$

Длина l окружности радиуса R и ***площадь*** S круга вычисляются по формулам:

$$l = 2\pi R, \qquad S = \pi R^2.$$

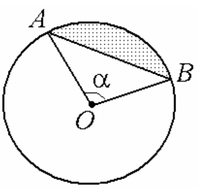
Длина дуги вычисляется по формуле $l_{\breve{AB}} = R\alpha$, где α – радианная мера $\angle AOB$ (α радиан $= \dfrac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ}$).



Определение. ***Сектором*** называется часть круга, ограниченная дугой и радиусами, проведенными к концам дуги.

AOB – сектор.

Площадь сектора $S_{\text{сект}} = \dfrac{1}{2}R^2\alpha$, где α – радианная мера $\angle AOB$.



Определение. Часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой, называется ***сегментом***.

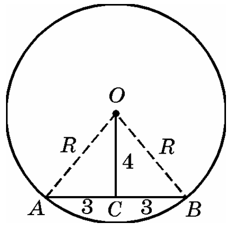
Площадь сегмента $S_{\text{сегм}} = \dfrac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$, где α – радианная мера $\angle AOB$.

Теорема XIV. В остроугольном треугольнике центр описанной окружности лежит внутри треугольника, в тупоугольном – вне треугольника, а в прямоугольном – на середине гипотенузы этого треугольника.

Примеры решения задач

Задача 4.1. На хорду AB из центра круга опущен перпендикуляр OC. Найти радиус круга, если $AB = 6$ см, $OC = 4$ см.

Решение. Пусть точка O – центр круга; $OC \perp AB$ – по условию; $AB = 6$ – хорда. Соединим точки O и A, точки O и B. Получаем треугольник AOB, у которого $OA = OB$ – радиусы окружности. Треугольник AOB – равнобедренный; $OC = 4$ – высота.



Из прямоугольного ΔAOC по теореме Пифагора $R = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

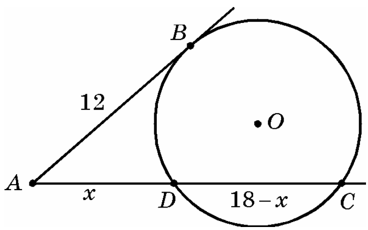
Ответ: 5 см.

Задача 4.2. Из точки A к окружности проведены касательная AB и секущая, пересекающая окружность в точках C и D ($AC > AD$). Найти длину CD, если $AB = 12$ см, $AC = 18$ см.

Решение. Из общей точки A к окружности проведены касательная AB и секущая AC.

Обозначим $AD = x$, тогда $DC = AC - AD = 18 - x$.

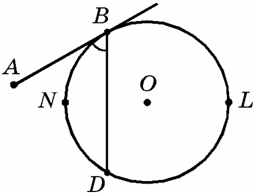
По соответствующей теореме о секущей и касательной, проведенных из общей точки к окружности, следует, что $AB^2 = AC \cdot AD$. Тогда $12^2 = 18x$, отсюда $x = 8$ см. Теперь находим



$DC = AC - AD = 18 - 8 = 10$.

Ответ: 10 см.

Задача 4.3. Найти острый угол между касательной и хордой, проведенной из точки касания, если хорда делит окружность в отношении 2 : 7.

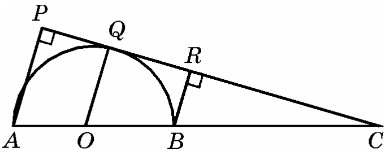


Решение. Хорда BD делит окружность в отношении 2:7. Следовательно, дуга DNB составляет $\frac{360°}{9} \cdot 2 = 80°$, а дуга DLB = 280°. По теореме об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup DNB = \frac{1}{2} \cdot 80° = 40°.$$

Ответ: 40°.

Задача 4.4. Концы диаметра окружности удалены от касательной на 12 см и 18 см. Найти длину диаметра этой окружности.

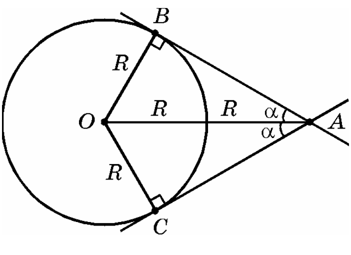


Решение. Пусть A и B – концы диаметра, O – центр окружности и CQ – касательная. Опустим из точек A и B перпендикуляры AP и BR на касательную CQ. Треугольники APC и BRC подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{AP}{BR} = \frac{3}{2}$, поэтому $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$.

Пусть радиус полукруга равен r. Тогда $AB = 2r$, $BC = 2AB = 4r$, $OC = 5r$. Треугольники OQC и BRC подобны. Коэффициент подобия равен $\frac{OC}{BC} = \frac{5}{4} = \frac{OQ}{BR}$, т.е. $\frac{r}{12} = \frac{5}{4}$, отсюда $r = 15$, $d = 2r =30$.

Ответ: 30 см.

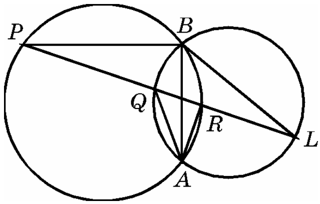
Задача 4.5. Точка лежит вне круга на расстоянии диаметра от его центра. Найти угол между касательными, проведенными из этой точки к данному кругу.



Решение. По теоремам о касательных, проведенных из внешней точки к окружности, следует, что $|BA| = |CA|$, $OB = OC = R$, $OB \perp BA$, $OC \perp AC$. Треугольники OBA и OCA равны, OA – биссектриса $\angle BAC$. Так как ΔOCA – прямоугольный, то $\sin\angle OAC = \dfrac{|OC|}{|OA|} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$. Тогда $\angle OAC$ =30°, откуда $\angle BAC$ = 60°.

Ответ: $\angle BAC = 60°$.

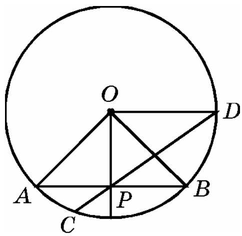
Задача 4.6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая пересекает отрезок AB, а также данные окружности последовательно в точках P, Q, R и L. Величина $\angle QAR = \alpha$. Найти $\angle PBL$.



Решение. $\angle BPR = \angle BAR$ как вписанные и опирающиеся на одну дугу BR. Аналогично $\angle QAB = \angle QLB$ (дуга QB). Но $\angle QAB + \angle BAR = \alpha$, поэтому $\angle BPL + \angle PLB = \alpha$, а искомый угол дополняет эту сумму до $180°$.

Ответ: $180° - \alpha$.

Задача 4.7. Найти угол между двумя хордами, если точка их пересечения удалена от центра окружности на $\dfrac{3}{5}R$ и делит одну из хорд пополам, а другую в отношении 4 : 9.



Решение. Пусть $AP = PB$ и $CP : PD = 4 : 9$. Тогда $\Delta AOP = \Delta OPB$ по трем сторонам, поэтому $\angle AOP = \angle OPB = 90°$. По теореме Пифагора

$$PB^2 = \sqrt{OB^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - \frac{9}{25}R^2} = \frac{4}{5}R.$$

Обозначим $CP = 4x$ и $PD = 9x$. По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд

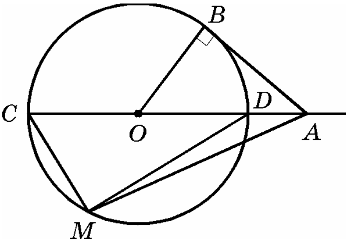
$$CP \cdot PD = AP \cdot PB \Rightarrow 36x^2 = \frac{16}{25}R^2 \Rightarrow x = \frac{2}{15}R$$

и $PD = 9x = \dfrac{6R}{5}$. В ΔOPD стороны $OD = R$, $OP = \dfrac{3}{5}R$, $PD = \dfrac{6}{5}R$, поэтому $\cos\angle OPD = \dfrac{OP^2 + PD^2 - OD^2}{2OP \cdot PD} = \dfrac{5}{9}$.

Так как $\angle DPB = 90° - \angle OPD$, то $\sin \angle DPB = \cos\angle OPD = \dfrac{5}{9}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{5}{9}$.

Задача 4.8. Из одной точки вне окружности проведены к этой окружности касательная и секущая наибольшей длины. Угол между ними равен arcsin 0,8. Найти длину секущей, если радиус окружности равен 8 см.



Решение. Максимальная секущая проходит через центр круга. Докажем это. Пусть AC – секущая, проходящая через центр круга, и AM – другая секущая. Так как

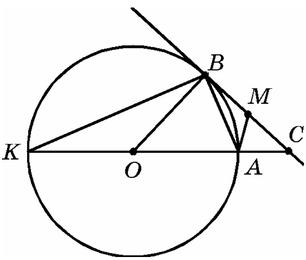
$$\angle AMC = \angle CMD + \angle DMA = \\ = 90° + \angle DMA,$$

то ΔAMC – тупоугольный. Сторона AC лежит против тупого, т. е. большего угла треугольника, поэтому $AC > AM$, что и требовалось доказать.

Пусть AB – касательная. Тогда ΔAOB – прямоугольный. Гипотенуза $AO = \dfrac{OB}{\sin\angle OAB} = 10$ и $AC = CO + OA = 18$.

Ответ: 18 см.

Задача 4.9. В окружности радиуса $R = 4$ см проведены хорда KB и диаметр AK, образующий с хордой угол величиной $\dfrac{\pi}{8}$. Через точку B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение AK в точке C. Найти длину медианы AM в ΔABC.



Решение. Так как ΔAKB прямоугольный, то $\angle KAB = 90° - \angle AKB = \dfrac{3\pi}{8}$, поэтому $\angle BAC = \pi - \dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{5\pi}{8}$. Вписанный $\angle AKB$ опирается на дугу AB, значит,

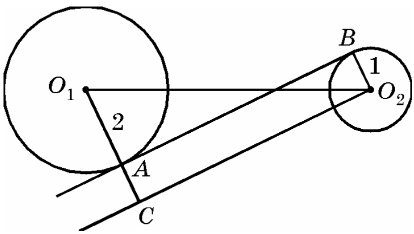
$\angle BOC = 2\cdot\angle AKB = \frac{\pi}{4}$, откуда $\angle OCB = = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Мы получили, что ΔOBC прямоугольный и равнобедренный, поэтому $OB = BC =$ $= 4$ см, $OC = 4\sqrt{2}$ см. Отрезок $AC = OC - OA = 4(\sqrt{2}-1)$ см, $MC = \frac{BC}{2} = 2$ см. Применив теорему косинусов к ΔACM, получаем

$$AM^2 = AC^2 + MC^2 - 2\cdot AC\cdot MC\cdot\cos\angle ACB = 36 - 24\sqrt{2},$$

$$AM = \sqrt{36-24\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2}-1).$$

Ответ: $2\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2}-1)$.

Задача 4.10. Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 см и 2 см равно 5 см. Найти длину той их общей касательной, от которой центры окружностей лежат по разные стороны.

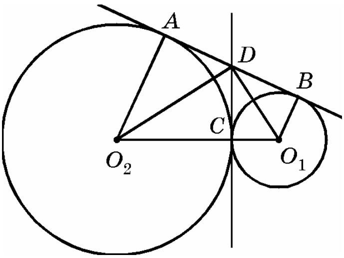


Решение. Пусть O_1 и O_2 – центры кругов радиуса 2 см и 1 см, A и B – точки касания общей касательной. Через O_2 проведем прямую, параллельную AB, которая пересекает продолжение O_1A в точке C. Треугольник O_1CO_2 – прямоугольный, причем $O_1O_2 = 5$ см и $O_1C =$ $= 3$ см. По теореме Пифагора $O_2C = 4$ см и, поскольку ABO_2C – прямоугольник, то $AB = O_2 = 4$ см.

Ответ: 4 см.

Задача 4.11. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C. Радиусы окружностей равны 2 см и 7 см. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку C, пересекается с другой их общей касательной в точке D. Найти расстояние от центра меньшей окружности до точки D.

Решение. Докажем, что ΔO_1DO_2 прямоугольный. Пусть A и B – точки касания. Треугольники CDO_1 и BDO_1 равны по гипотенузе и катету, поэтому $\angle BDO_1 = \angle CDO_1$. Аналогично $\angle ADO_2 =$ $= \angle CDO_2$.



Так как $\angle CDO_2$ и $\angle CDO_1$ являются половинами углов $\angle ADC$ и $\angle CDB$, которые в сумме составляют 180°, то

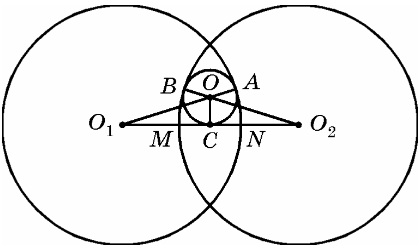
$$\angle O_2DC + \angle CDO_1 = \angle O_2DO_1 = 90°.$$

Отрезок CD – высота в прямоугольном ΔO_2DO_1, поэтому $DC^2 = O_2C \cdot CO_1 = 14$ см (см. теорему XIX, § 1), откуда $DC = \sqrt{14}$. При этом $O_1D = \sqrt{DC^2 + CO_1^2} = \sqrt{14+4} = 3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$ см.

Задача 4.12. Две окружности радиуса 32 см с центрами в точках O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найти радиус окружности, которая касается изнутри обеих окружностей и отрезка O_1O_2.

Решение. Пусть третья окружность касается первых двух в точках A и B и прямой O_1O_2 в точке C, M и N – точки пересечения первых двух окружностей с отрезком O_1O_2.



Так как $O_1N = \dfrac{2}{3}O_1O_2 = 32$ см, то $O_1O_2 = 48$ см. Из равенства треугольников O_1OC и O_2OC (по гипотенузе и катету) следует, что $O_1C = O_2C = 24$ см.

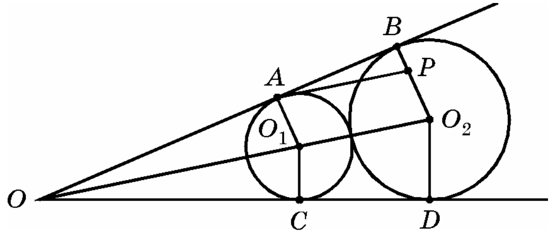
Обозначим через r искомый радиус. В ΔOCO_2 стороны $OO_2 = 32 - r$, $OC = r$, $CO_2 = 24$ см, откуда

$$O_1O_2 = (32 - r)^2 = r^2 + 24^2 \Rightarrow r = 7.$$

Ответ: 7 см.

Задача 4.13. В угол величины α вписаны две касающиеся друг друга и сторон угла окружности. Найти отношение радиусов этих окружностей.

Решение. Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей, A, B, C и D – точки касания окружностей и сторон угла. Радиусы этих окружностей обозначим соответственно r и R. Проведем отрезок AP параллельно O_1O_2. Поскольку OO_1 – биссектриса $\angle AOC$, то $\angle BAP = \angle AOO_1 = \dfrac{\alpha}{2}$.

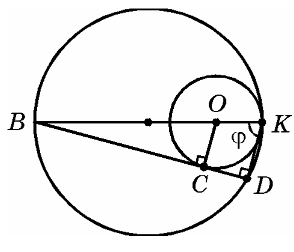


В ΔABP стороны $AP = O_1O_2 = r + R$ и $BP = O_2B - O_2P = O_2B - O_1A = R - r$. Поскольку ΔABP прямоугольный, то $\dfrac{BP}{AP} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, отсюда

$$\frac{R-r}{R+r} = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\frac{R}{r}-1}{\frac{R}{r}+1} = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 4.14. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке K. Через точку K проведен диаметр KB большей окружности. Хорда BD большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Найти длину CD, если $KB = 2R$ и $\angle BKD = \varphi$.



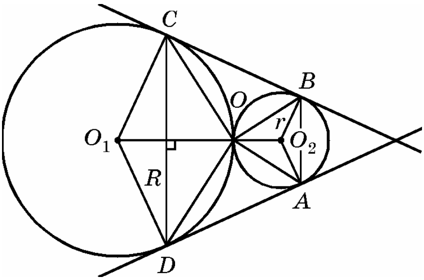
Решение. Пусть O – центр меньшей окружности. Треугольники BKD и BOC подобны (оба прямоугольные, так как $\angle BDK$ вписанный и опирается на диаметр, а OC – радиус, проведенный в точку касания; кроме того, у этих треугольников общий острый угол). Отсюда следует, что $\angle BOC = \varphi$. Радиус меньшей окружности обозначим через r.

Поскольку $\frac{OC}{BO} = \cos\varphi$ и $OC = r$, то $\frac{r}{2R - r} = \cos\varphi$, откуда $r = \frac{2R\cos\varphi}{1+\cos\varphi}$. Искомый отрезок

$$CD = BD - BC = 2R\sin\varphi - r\,\mathrm{tg}\varphi = \frac{R\sin 2\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Ответ: $CD = \frac{R\sin 2\varphi}{1+\cos\varphi}$.

Задача 4.15. Окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом, AD и BC – общие касательные к этим окружностям. Показать, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, и найти ее радиус.



Ответ: $\frac{2Rr}{R+r}$.

Указание. Доказать, что OD, OA, OB и OC являются биссектрисами углов CDA, DAB, ABC и DCD и, как следствие, точка O равноудалена от сторон трапеции $ABCD$. Далее найти высоту ΔCOB.

Задачи для самостоятельного решения

1. Центральный угол AOB на 30° больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB. Найти каждый из этих углов.

2. Хорда AB стягивает дугу, равную 115°, а хорда AC – дугу в 43°. Найти угол BAC.

3. Окружность разделена на три части в отношении 3 : 8 : 4. Найти величины углов треугольника, вершины которого лежат в точках деления окружности.

4. Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найти ED, если:

а) $AE = 5$, $BE = 2$, $CE = 2{,}5$;

б) $AE = 16$, $BE = 9$, $CE = ED$.

5. Вычислить длину окружности, если радиус равен: а) 10 м; б) 35 м.

6. Вычислить радиус окружности, если ее длина равна: а) 1 м, б) 25π см.

7. Найти длину маятника стенных часов, если угол его колебания составляет 38°, а длина дуги, которую описывает конец маятника, равна 24 см.

8. В окружности с радиусом, равным 16, определить длину дуги, содержащей 45°.

9. Определить радиус окружности, если длина дуги равна 6, а градусная мера 135°.

10. По данной хорде K определить длину ее дуги, если она содержит: а) 60°; б) 90°; в) 120°.

11. По данной длине дуги l определить ее хорду, если дуга содержит: а) 60°; б) 90°; в) 120°.

12. Определить радиус окружности, если она длиннее своего диаметра на 107 см.

13. Из двух концентрических окружностей одна равна 167 см, а другая – 117 см. Определить ширину кольца.

14. Определить площадь круга, если радиус равен: а) 10 м; б) 4 дм.

15. Определить радиус круга, если его площадь равна: а) 2π см^2; б) 50 м^2.

16. Найти площадь круга, диаметр которого равен 10 см.

17. Определить:

а) площадь круга, если длина окружности равна 8 см;

б) определить длину окружности, если площадь круга равна 18 см^2.

18. Определить площадь сектора, если радиус равен 6, а дуга содержит: а) 90°; б) 60°.

19. Определить площадь сегмента, если радиус равен 6, а дуга содержит: а) 90°; б) 60°.

20. Радиусы концентрических окружностей относятся как 7 : 4, а ширина кольца равна 12 см. Определить радиус меньшей окружности.

21. В большем из двух концентрических кургов проведена хорда длины 32 см, касающаяся меньшего круга. Определить радиусы кругов, если ширина образовавшегося кольца равна 8 см.

22. Два кольца между тремя концентрическими окружностями равновелики. Радиус большей окружности равен 3, радиус меньшей равен 1. Найти радиус средней окружности.

23. Найти острый угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, если хорда делит окружность в отношении 1 : 3.

24. Через точку окружности проведены касательная и хорда. Величина угла между хордой и касательной равна 60°. Найти отношение длин дуг, на которые хорда делит окружность.

25. Окружность разделена на три части, которые относятся между собой как $5 : 6 : 7$ и через точки деления проведены касательные. Определить углы треугольника, образованного этими касательными.

26. Найти длину общей касательной к двум окружностям радиусов 4 и 9 см, касающихся внешним образом.

27. Точка лежит внтури круга радиуса 6 см и делит проходящую через нее хорду на отрезки 5 и 4 см. Найти расстояние от этой точки до центра круга.

28. В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды, равные 36 и 48 см, а расстояние между ними 42 см. Найти радиус окружности.

29. Точка P удалена от центра окружности радиуса 11 на расстояние 7. Через P проведена хорда длины 18. Найти отношение отрезков, на которые P делит хорду.

30. На хорду AB из центра круга опущен перпендикуляр OC. Найти AB, если $OC = 12$ см, а радиус круга 13 см.

31. Из точки A к окружности проведены касательная AB и секущая, пересекающая окружность в точках C и D ($AC > AD$). Найти длину CD, если $AB = 15$ см, $AD = 9$ см.

32. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 см и касательная, составляющая 2/3 внутреннего отрезка секущей. Найти длину касательной.

33. Через точку A, лежащую на окружности, проведены диаметр AB и хорда AC, причем длина AC равна 8 и $\angle BAC = 30°$. Найти хорду CM, перпендикулярную AB.

34. В круге проведены две взаимно перпендикулярные хорды длины 6, удаленные от центра на расстояние 1. На какие отрезки точка пересечения хорд делит эти хорды?

35. Хорда CD, перпендикулярная диаметру AB окружности, делит его в отношении 1 : 3. Найти углы $\angle CAD$ и $\angle CBD$.

36. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1:3$. Найти острые углы треугольника.

37. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в ее середине, проходит через точку A, а отрезки AB и AC пересекает в точках D и E соответственно. Найти косинус $\angle BAC$, если $BC = 12$, $AD = 3{,}5$, $EC = \frac{9}{\sqrt{5}}$.

38. В треугольнике ABC стороны $AB = BC = 6$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 1$. Найти длину стороны AC.

39. В треугольнике ABC длина стороны $AB = 1$. На AB как на диаметре построена окружность, делящая сторону AC точкой D пополам, а BC – точкой E в отношении $BE : EC = 7 : 2$. Найти длину AC.

40. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найти радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней окружностей равны соответственно 6 и 4 см.

41. К окружности радиуса 10 м через точку A проведены две касательные AB и AC, равные 12 м. Найти хорду BC.

42. К окружности через точку A проведены две касательные AB и AC, равные 12 м. Расстояние между точками касания B и C равно 4 м. Найти радиус окружности.

43. В прямой угол вписан круг радиуса 1 см. Найти площадь фигуры, заключенной между сторонами угла и круга.

44. Центр окружности радиуса 1 м лежит на стороне угла 60°, а сама окружность касается другой стороны. Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного сторонами угла и окружностью.

45. Найти площадь сегмента круга радиуса 1 м, ограниченного хордой и дугой 90°.

46. Полуокружность радиуса R разделена на три равные части и точки деления соединены с одним из концов диаметра, стягивающего эту полуокружность. Найти площадь, ограниченную двумя хордами и заключенной между ними дугой.

47. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найти отношение площади круга и площади сектора.

48. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги 60 и 120°. Найти отношение площадей большего и меньшего кругов.

49. Из точки, данной на окружности, проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Отрезок, соединяющий середины этих хорд, равен 6 см. Найти радиус окружности.

50. Из точки, взятой на окружности, проведены взаимно перпендикулярные хорды с длинами 16 и 30. Найти длину окружности.

51. В окружности радиуса 17,5 см проведены диаметр AB, хорды AC и BC, перепендикуляр CD к диаметру AB. Найти длины хорд AC и BC, если $AC : AD = 5 : 3$.

52. Точка находится внутри круга радиуса 5 на расстоянии 3 от центра и делит проходящую через нее хорду в отношении $2 : 3$. Найти длину хорды.

53. Через середину хорды длины 4 проведена хорда длины 5. Найти длины отрезков, на которые вторая хорда делится первой.

54. Точка находится внутри круга радиуса 6 и делит проходящую через нее хорду на отрезки длиной 5 и 4. Найти расстояние от точки до окружности.

55. В окружности, радиус которой 25 см, проведены по одну сторону от ее центра две параллельные хорды длиной 40 и 30 см. Найти расстояние между этими хордами.

56. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти длину отрезка их общей касательной,заключенного между точками касания.

57. Два круга радиуса R и r касаются внешним образом. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Найти длину последней касательной.

58. Радиусы двух окружностей равны 27 и 13 см, а расстояние между их центрами равно 50 см. Найти длину их общей внешней (окружности лежат по одну сторону от касательной) и внутренней (окружности лежат по разные стороны от касательной) касательных.

59. Центр двух окружностей находится на расстоянии $\sqrt{80}$. Радиусы окружностей 4 и 8. Найти длину их общей каса-тельной.

60. Радиус одной из двух касающихся окружностей равен 1, а длина их общей касательной равна 4. Найти радиус второй окружности.

61. Две окружности радиуса 5 м и 2 м касаются друг друга и некоторой прямой. Найти радиус окружности, касающейся первых двух и этой прямой.

62. В угол величины α вписаны две касающиеся друг друга окружности. Определить отношение радиуса меньшей окружности к радиусу окружности, которая касается первых двух и одной из сторон угла.

63. В угол вписана окружность. На окружности взята точка, удаленная от сторон угла на расстояния 2 см и 8 см. Найти расстояние от этой точки до прямой, соединяющей точки касания сторон угла и этой окружности.

64. Через точку O проведены две прямые, касающиеся окружности в точках M и N. На окружности взята точка K, такая, что O и K лежат по разные стороны от MN. Расстояние от K до OM и MN равно p и q соответственно. Найти расстояние от K до ON.

65. Окружность радиуса 9 касается внешним образом другой окружности в точке M. Общая касательная к этим окружностям, проведенная через M, пересекается с другой их общей касательной в точке N. Найти радиус второй окружности, если длина MN равна 6.

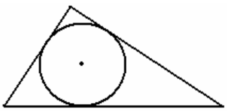
66. Окружность с центром в точке P касается диагонали AC прямоугольника $ABCD$ и продолжения сторон BC и AD. Прямая CD делит AP на отрезки 6 и 2, считая от вершины A. Окружность касается прямой AD в точке K. Найти площадь треугольника $S_{\Delta ACK}$.

67. В окружности радиуса $R=2\sqrt{3}$ проведены хорда AB и диаметр AK, образующий с хордой угол $\pi/12$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение AK в точке C. Найти длину медианы AM треугольника ABC.

68. Две окружности радиусов 3 и 9 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AE, касающиеся данных окружностей ($AC > AE$). Площадь ΔABE равна 1. Найти площадь ΔABC.

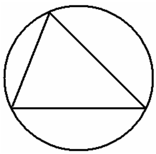
V. КОМБИНАЦИИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ОКРУЖНОСТИ

Определения и теоремы



Определение. Окружность называется *вписанной* в треугольник, если окружность касается всех сторон данного треугольника.

Замечание. В этом случае говорят, что треугольник описан около окружности.



Определение. Окружность называется *читанной* около треугольника, если вершины треугольника лежат на этой окружности.

Замечание. В этом случае говорят, что треугольник вписан в окружность.

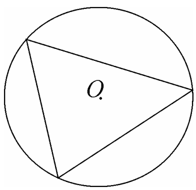
Теорема I. Центр окружности, *описанной* около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Доказательство теоремы основано на *свойстве серединного перпендикуляра*: точка, принадлежащая серединному перпендикуляру, равноудалена от концов отрезка. (Обратно: если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру.)

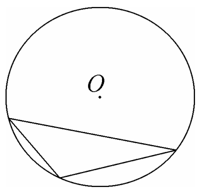
Теорема II. Около любого треугольника можно описать окружность.

Теорема III. Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника, лежит внутри треугольника.

Точка O – центр окружности.



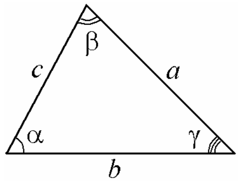
Окружность описана около остроугольного треугольника



Окружность описана около тупоугольного треугольника

Теорема IV. Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, лежит вне треугольника.

Теорема V. Диаметр окружности, описанной около треугольника, равен отношению сторон треугольника к синусам противолежащих углов:



$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

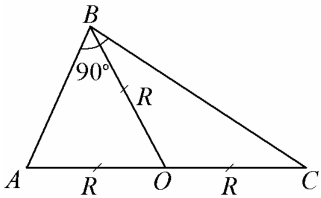
где R – радиус описанной окружности.

Теорема VI. Радиус описанной около треугольника окружности равен

$$R = \frac{abc}{4S},$$

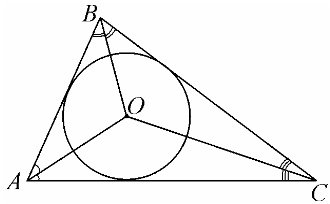
где a, b, c – стороны треугольника, S – его площадь.

Теорема VII. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Радиус R окружности, описанной около прямоугольного, треугольника, равен половине гипотенузы:



$\angle ABC = 90°$; точка O – центр описанной окружности $\Rightarrow$ точка O лежит на AC; $AO = OB = CO = R$.

Теорема VIII. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис углов треугольника.



Точка O – центр вписанной окружности, AO, BO, CO – биссектрисы.

Доказательство теоремы основано на *свойстве биссектрисы угла*: точка, принадлежащая биссектрисе угла, равноудалена от сторон угла. (Обратно: точка, равноудаленная от сторон угла, принадлежит биссектрисе этого угла.)

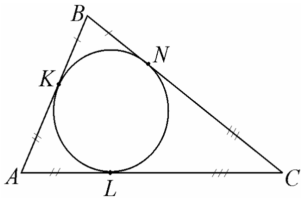
Теорема IX. В любой треугольник можно вписать окружность.

Теорема X. Радиус r окружности, вписанной в треугольник, равен отношению площади S треугольника к его полупериметру p, т.е.

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{a+b+c},$$

где a, b, c – длины сторон треугольника.

Также справедлива формула $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$.



Теорема XI. Длины отрезков, соединяющих произвольную вершину треугольника с точками касания вписанной окружности со сторонами, выходящими из этой вершины, равны.

K, M, L – точки касания окружности со сторонами: $AK = AL$; $BK = BM$; $CM = CL$.

Теорема XII. Центры вписанной и описанной окружностей в равносторонний треугольник совпадают.

Теорема XIII. Если два треугольника подобны с коэффициентом подобии *k,* то отношение радиусов вписанных и описанных окружностей тоже равно *k.*

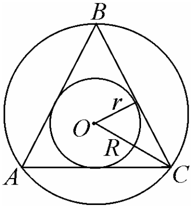
Пусть R_1, R_2, r_1, r_2 – радиусы описанных и вписанных окружностей подобных $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ с коэффициентом подобия *k*, тогда

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{r_1}{r_2}=k\,.$$

В произвольном неравностороннем треугольнике радиусы *r* и *R* вписанной и описанной окружностей связаны с расстоянием между их центрами формулой Эйлера: $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Примеры решения задач

Задача 5.1. Найти радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности равностороннего треугольника со стороной *a.*



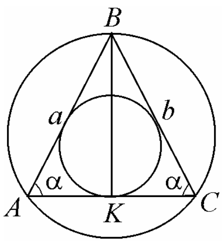
Решение Радиус описанной окружности $R=\dfrac{abc}{4S}$, где *a*, *b*, *c* – стороны треугольника, *S* – его площадь. По условию ΔABC – равносторонний, $AB = BC = AC = a;$ $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$; $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Отсюда $R=\dfrac{a^3}{4\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{4a}{4\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Радиус вписанной окружности $r = \dfrac{2S}{P}$, где P – периметр ΔABC. Тогда

$$r = \frac{2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{3a} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Задача 5.2. Найти радиус вписанной и описанной окружностей равнобедренного ΔABC с углом α при основании и боковой стороной b.



Решение. По формуле для радиуса описанной окружности получаем $R = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S}$. По условию $AB = BC = b$, BK – высота ΔABC, поэтому $AK = \dfrac{1}{2}AC$ и $AK = b\cos\alpha$, $AC = 2b\cos\alpha$. Отсюда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BK}{2} = b^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{b^2}{2}\sin 2\alpha .$$

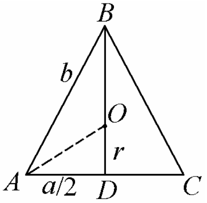
Тогда $R = \dfrac{b \cdot b \cdot 2b\cos\alpha}{4 \cdot \dfrac{b^2}{2}\sin 2\alpha} = \dfrac{b\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$, т.е. $R = \dfrac{b}{2\sin 2\alpha}$. Тот же результат еще проще можно получить по теореме V.

Радиус вписанной окружности находим по формуле $r = \dfrac{2S}{P}$, где P – периметр ΔABC. Получаем

$$r = \frac{2 \cdot \dfrac{b^2}{2}\sin 2\alpha}{b + b + 2b\cos\alpha} = \frac{b^2 \sin 2\alpha}{2b(1+\cos\alpha)} = \frac{b\sin 2\alpha}{2(1+\cos\alpha)}.$$

Ответ: $R = \dfrac{b}{2\sin 2\alpha}$, $r = \dfrac{b}{2}\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Задача 5.3. В равнобедренном треугольнике сторона основания равна a, а радиус вписанной окружности равен r. Найти длину боковой стороны этого треугольника.

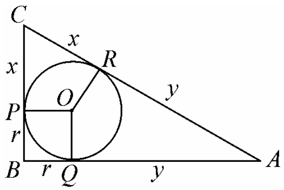


Решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Если точка O – центр вписанной окружности, то так как $\angle OAD = \dfrac{\alpha}{2}$, то $\begin{cases} \dfrac{2r}{a} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}; \\ \dfrac{a}{2b} = \cos\alpha. \end{cases}$ Следовательно,

$$b = \frac{a}{2\cos\alpha} = \frac{a}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{1+\dfrac{4r^2}{a^2}}{1-\dfrac{4r^2}{a^2}} = \frac{a}{2}\frac{a^2+4r^2}{a^2-4r^2}.$$

Ответ: $b = \dfrac{a}{2}\dfrac{a^2+4r^2}{a^2-4r^2}$.

Задача 5.4. Периметр прямоугольного треугольника равен $2p$ см, а его гипотенуза - q см. Найти радиус вписанной окружности и площадь этого треугольника.



Решение. Пусть вписанная окружность касается сторон треугольника AB в точках P, Q и R. Тогда $CP = CR$, $RA = QA$, $PB = BQ$ как касательные, проведенные к окружности из одной точки.

Положим CR-x, $RA=y$, $BP = r$. (Заметим, что $BPOQ$ – квадрат и r – радиус вписанной окружности.) Периметр треугольника ABC равен $2x + 2y + 2r = 2p$, но $AC = x+y$ – гипотенуза, т.е. $x+y = q$. Таким образом,

$$2q + 2r = 2p \Rightarrow r = p - q, \qquad S_{ABC} = pr = p(p-q).$$

Ответ: $r = p - q$, $S_{ABC} = p(p-q)$.

Задача 5.5. Найти радиусы вписанной в ΔABC и описанной около него окружностей, если длины сторон этого треугольника равны 10, 20 и 24 см.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{119}}{3}$ см, $\dfrac{400}{3\sqrt{119}}$ см.

Указание. Для нахождения площади треугольника примените формулу Герона; радиусы окружностей найдите с помощью теорем VI и X.

Задача 5.6. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2:3. Найти длину гипотенузы, сели периметр этого треугольника ранен 36 см.

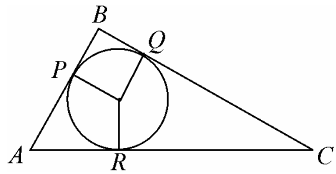
Решение. Через P, Q, R обозначим точки касания описанной окружности сторон треугольника ABC.

По условию $\dfrac{AR}{RC}=\dfrac{2}{3}$. Положим $AR = 2x$, $RC = 3x$, $PB = y$. Так как $AP = AR$, $RC = QC$, $PB = BQ$, то $AP = 2x$, $CQ = 3x$, $BQ = y$. По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$, т.е.

$$(5x)^2 = (2x+y)^2 + (3x+y)^2 \Rightarrow 12x^2 - 10xy - 2y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} - 1 = 0,$$

$$\frac{x}{y} = 1 \quad \text{или} \quad x = y.$$



Таким образом, периметр треугольника ABC равен $5x + 4x + 3x = 12x = 36$, $x = 3$; $AC = 5x = 15$.

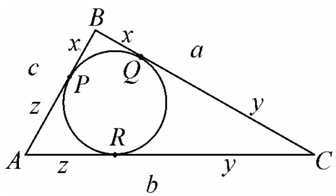
Ответ: 15 см.

Задача 5.7. Стороны треугольника равны a, b и с. Найти отрезки, на которые точка касания вписанной в треугольник окружности делит сторону длины a.

Решение. Пусть $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Окружность касается этих сторон в точках Q, R и P соответственно.

Обозначим $BP = BQ = x$, $QC = CR = y$ и $AP = AR = z$. При этом

$$\begin{cases} x + z = c; \\ y + z = b; \\ x + y = a. \end{cases}$$

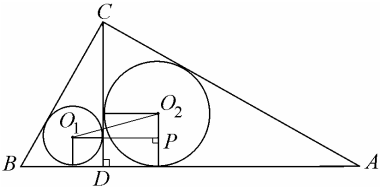


Вычитая из первого уравнения второе, получаем систему для нахождения искомых x и y: $\begin{cases} x - y = c - b; \\ x + y = a. \end{cases}$ откуда

$$x=\frac{a+c-b}{2} \quad \text{и} \quad y=\frac{a+b-c}{2}.$$

Ответ: $\frac{a+c-b}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$.

Задача 5.8. В ΔABC $\angle ACB = 90°$, CD – высота, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в ΔCDB и ΔADC.



Решение. Расстояние можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника O_1O_2P, в котором O_1P – сумма радиусов двух окружностей, а O_2P – разность радиусов.

Гипотенуза $AB = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ см. Вычислим длину высоты CD: $CD\cdot AB = BC\cdot CA$, отсюда $CD = \frac{12}{5}$ см.

Гипотенуза делится на отрезки

$$BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{9-\frac{144}{25}}=\frac{9}{5}\text{ см} \quad \text{и} \quad AD=5-\frac{9}{5}=\frac{16}{5}\text{ см}.$$

Вычислим радиус r_1 окружности, вписанной в $\Delta\, BCD$:

$$r_1=\frac{2S_{\Delta BCD}}{BC+BD+CD}=\frac{\frac{9}{5}\cdot\frac{12}{5}}{3+\frac{9}{5}+\frac{12}{5}}=\frac{108}{180}=\frac{3}{5}\text{ см}.$$

Найдем радиус r_2 окружности, вписанной в $\Delta\, CDA$:

$$r_2=\frac{2S_{\Delta CDA}}{DC+CA+DA}=\frac{\frac{16}{5}\cdot\frac{12}{5}}{\frac{12}{5}+4+\frac{16}{5}}=\frac{192}{240}=\frac{4}{5}\text{ см}.$$

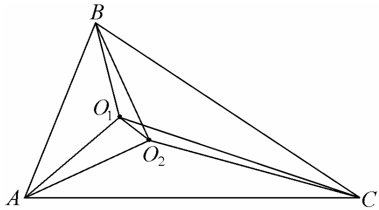
Искомое расстояние

$$O_1O_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2+(r_2-r_1)^2}=\sqrt{2(r_1^2+r_2^2)}=\sqrt{2}\text{ см}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$ см.

Задача 5.9. В остроугольном ΔABC величина угла при вершине A относится к величине угла при вершине C как 7:6. Найти углы ΔABC, если отрезок, соединяющий центры вписанной и описанной окружностей ΔABC виден из вершины B под углом 5°.

Решение. Пусть в ΔABC точка O_1 – центр вписанной, а O_2 – центр описанной окружности. Известно, что отношение углов $\dfrac{\angle BAC}{\angle ACB}=\dfrac{7}{6}$ и угол $O_1BO_2 = 5°$.



Положим $\angle BAC = 7\alpha$ и $\angle BCA = 6\alpha$.

Так как O_1 – центр вписанной окружности, то AO_1, BO_1, CO_1 – биссектрисы соответствующих углов ΔABC. Кроме того, поскольку O_2A, O_2B, O_2C равны, то треугольники AO_2B, BO_2C, AO_2C равнобедренные и углы при основании у них равны. Таким образом,

$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle ACB = 180° - 13\alpha$;

$\angle ABO_1 = \angle ABC : 2 = 90° - 6{,}5\alpha$;

$\angle ABO_2 = \angle ABO_1 + \angle O_1BO_2 = 95° - 6{,}5\alpha$;

$\angle O_2BC = \angle O_2CB = \angle ABC - \angle ABO_2 = (180° - 13\alpha) - (95° - 6{,}5\alpha) =$
$= 85° - 6{,}5\alpha$;

$\angle O_2CA = \angle O_2AC = \angle ACB - \angle O_2CB = 6\alpha - (85° - 6{,}5\alpha) =$
$= 12{,}5\alpha - 85°$.

$\angle O_2AB = \angle CAB - \angle O_2AC = 7\alpha - (12{,}5\alpha - 85°) = 85° - 5{,}5\alpha$.

Но $\angle O_2AB = \angle ABO_2$, тогда $85° - 5{,}5\alpha = 95° - 6{,}5\alpha$, $\alpha = 10°$.

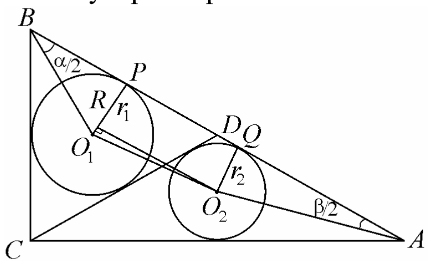
Таким образом, $\angle BAC = 7\alpha = 70°$; $\angle BCA = 6\alpha = 60°$; $\angle ABC =$
$= 180° - 13\alpha = 50°$.

Ответ: 50°; 60°; 70°.

Задача 5.10. В ΔABC из вершины прямого угла C проведена медиана CD. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в ΔACD и ΔBCD, если $BC = 4$, а радиус окружности, описанной около ΔABC, равен 2,5.

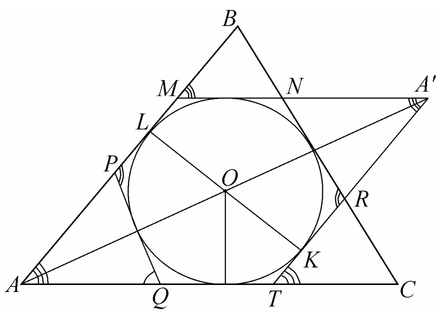
Ответ: $\dfrac{5\sqrt{13}}{12}$.

Указание. Для нахождения сторон ΔABC воспользуйтесь тем, что радиус описанной окружности равен половине гипотенузы. Найти радиусы окружностей по формуле $r = \dfrac{S}{p}$, где S – площадь треугольника, а p – полупериметр.



Отрезки BP и AQ можно найти по формуле $BP = r_1 \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{1}$, $AQ = r_2 \operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}$. Искомый отрезок O_1O_2 находится по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника O_1RO_2, в котором $O_1R = r_1 - r_2$, а $O_2R = PQ = AB - BP - AQ$.

Задача 5.11. В ΔABC вписана окружность. К этой окружности проведены касательные, параллельные сторонам треугольника. Радиусы окружностей, вписанных в образовавшиеся треугольники, равны r_1, r_2 и r_3. Найти радиус окружности, вписанной в ΔABC.



Решение. Через r обозначим радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Продолжим MN и RT до пересечения в точке A'.

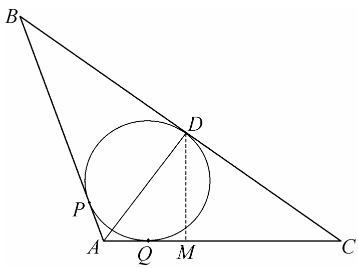
Треугольники APQ и NRA' подобны по трем углам. Из равенства треугольников AOL и OKA' следует равенство отрезков $A'K$ и AL. Из равенства треугольников POL и ORK можно показать, что $PL = KR$ и, следовательно, $AP = A'R$. Таким образом, треугольники APQ и NAR равны. Треугольники ABC, APQ, CRT и MBN подобны, причем радиусы вписанных окружностей этих треугольников пропорциональны соответствующим сторонам, т.е.

$$\frac{r_1}{PQ} = \frac{r_2}{BN} = \frac{r_3}{RC} = \frac{r}{BC}.$$

Обозначим эти отношения через t. Тогда $r_1 = t \cdot PQ$, $r_2 = t \cdot BN$, $r_3 = t \cdot RC$, $r = t \cdot BC$, но $PQ + BN + RC = BC$ (так как $PQ = NR$), поэтому $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

Ответ: $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

Задача 5.12. В ΔABC вписана окружность, касающаяся стороны BC и точке D. Найти длину AC, если известно, что $AD = DC$, $BC = 9$ и $\cos\angle BCA = \frac{2}{3}$.



Решение Через P, Q и D обозначим точки касания, вписанной окружности со сторонами треугольника. Пусть $DC = x$, тогда $BD = 9 - x$.

Отрезки $DC = CQ$, $AP = AQ$ и $BP = BD$ как касательные, проведенные к окружности из одной точки.

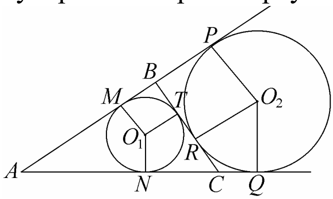
Опустим высоту DM в треугольнике ADC. Тогда $MC = x\cos\angle C = \frac{2}{3}x$, $AC = 2MC = \frac{4}{3}x$; $AQ - AC - QC = \frac{x}{3} = AP$; $BP = BD = 9 - x$; $AB = 9 - x + \frac{x}{3} = 9 - \frac{2}{3}x$. Применив теорему косинусов к треугольнику ABC получаем

$$AB^2 - AC^2 + BC^2 - \frac{4}{3}\,AC \cdot BC, \quad x = 3 \text{ и } AC = \frac{4}{3}x = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 5.13. Радиус окружности, вписанной в $LABC$, равен 1. Около треугольника построена окружность, которая касается продолжения сторон AB и AC, а также стороны BC. Радиус этой окружности равен 3. Во сколько раз периметр ΔABC превосходит длину BC?

Решение. Опустим из центров окружностей O_1 и O_2 перпендикуляры на стороны треугольника ABC (или на их продолжения).



Четырехугольники AMO_1N и APO_2Q подобны с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{O_1M}{O_2P}=\frac{1}{3}\right)$, отсюда

$$(AM+AN)\cdot 3 = AP + AQ. \quad (1)$$

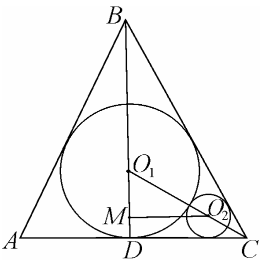
Отрезки $MB = BT$ и $CT = NC$ как касательные, проведенные к окружности из одной точки, поэтому $AM + AN = (AB + AC) - (MB + NC) = AB + AC = BC$. Аналогично, $BP = BR$ и $CQ = CR$ и $AP + AQ = AB + BC + BP + CQ = AB + BC + BC$. Таким образом, равенство (1) имеет вид

$$(AB + AC - BC)\cdot 3 = AB + AC + BC \Rightarrow AB+AC = 2BC,$$

$$AB + AC + BC = 3BC.$$

Ответ: в три раза.

Задача 5.14. В равнобедренном треугольнике с углом при основании $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$ и стороной основания $AC = 6$ см вписана окружность. Вторая окружность касается первой окружности, а также сторон AC и CB. Найти радиус второй окружности.



Решение. Поскольку $\operatorname{tg}\angle ACB = \frac{12}{5}$, то

$$\cos\angle ABC = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\angle ABC}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{144}{25}}} = \frac{5}{13}.$$

Центр вписанной окружности угла лежит на биссектрисе $\angle ACB$.

$$\operatorname{tg}\angle DCO_1 = \operatorname{tg}\frac{\angle ACB}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\angle ACD}{1+\cos\angle ACB}} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{1+\frac{5}{13}}} = \frac{2}{3};$$

$$\sin\angle DCO_1 = \sqrt{\frac{1-\cos\angle ACB}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Площадь $\Delta ABC = DC\cdot BD = DC^2\cdot \mathrm{tg}\angle ACB = 9\cdot\frac{12}{5} = \frac{108}{5}$.

Сторона $BC = \frac{DC}{\cos\angle ACB} = \frac{3\cdot 13}{5} = \frac{39}{5}$.

Радиус вписанной окружности треугольника ABC равен

$$R = \frac{2S}{AC+2BC} = \frac{\frac{216}{5}}{6+\frac{78}{5}} = \frac{216}{108} = 2$$

или из прямоугольного ΔO_1CD:

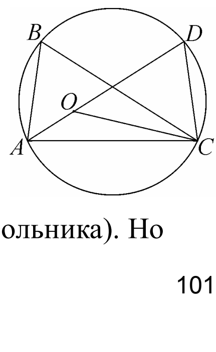
$$O_1D = R = DC\cdot \mathrm{tg}\angle DCO_1 = 3\cdot\frac{2}{3} = 2.$$

Опустим из центра второй окружности O_2 перпендикуляр O_1M на BD. Пусть радиус второй окружности r. В треугольнике MO_1O_2 катет $O_1M = R - r$, $O_1O_2 = R + r$ и $\angle MO_2O_1 = \angle DCO_1$. Таким образом, $\frac{R-r}{R+r} = \mathrm{tg}\angle DCO_1 \Rightarrow \frac{2-r}{2+r} = \frac{2}{3} \Rightarrow 6 - 3r = 4 + 2r$, $r = \frac{2}{5}$ см.

Ответ: $\frac{2}{5}$ см.

Задача 5.15. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Найти длину хорды CD, если центр окружности, вписанной в данный треугольник, удален от точки D на 5 см.

Решение. Пусть O – центр вписанного круга; эта точка O лежит на биссектрисе AD. Соединим O с C и докажем, что треугольник ODC является равнобедренным треугольником.



Действительно,

$$\angle OCD = \angle BCD + \angle OCB = \angle EAD + \angle OCB =$$
$$= \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ACB$$

(OC – лежит на биссектрисе угла ACB), а $\angle DOC = \angle OAC + \angle OCA$ (как внешний угол треугольника). Но

$$\angle OAC = \frac{1}{2}\angle BAC\,,\quad \angle OCA = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Итак, $OD - DC = 5$ см.

Ответ: 5 см.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сторону равностороннего треугольника, если:

а) радиус описанной около него окружности равен 10 см;

б) радиус вписанной в него окружности равен 10 см.

2. Длины сторон треугольника равны: а) 7, 5, 8 см; б) 13, 15, 20 см. Найти:

1) радиусы вписанной и описанной около треугольника окружностей и расстояние между из центрами;

2) длину вписанной и описанной окружностей;

3) площадь вписанного и описанного кругов.

3. В прямоугольном треугольнике катеты равны 40 и 42 см. Определить радиусы вписанной и описанной окружностей и найти расстояния между их центрами.

4. Найти катеты прямоугольного треугольника, если они относятся между собой как 20 : 21, а разность меду радиусами описанной и вписанной окружностей равна 17 см.

5. Определить относительное положение центра описанной около треугольника окружности, если длины сторон треугольника равны:

а) 5, 8, 10;

б) 8, 7, 5;

в) 80, 315, 325.

6. В окружность вписан треугольник ABC так, что AB – диаметр окружности. Найти углы треугольника, если:

а) $\breve{BC} = 134°$;

б) $\breve{AC} = 70°$.

7. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Найти углы треугольника, если $\breve{BC} = 102°$.

8. В окружность радиусом 5 вписан треугольник, один из углов которого равнее: а) 30°; б) 45°. Найти противолежащую сторону треугольника.

9. Найти площадь треугольника, если радиус описанной окружности равен 5, а два угла треугольника равны соответственно 45 и 60°.

10. Найти боковую сторону равнобедренного треугольника, если основание равно 10 см, а радиус вписанного круга 3 см.

11. Диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 4, диаметр описанной окружности равен 10. Найти площадь треугольника.

12. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) радиус вписанного круга составляет 0,4 высоты BD, а периметр треугольника равен 40. Найти длину основания AC.

13. Центр окружности, описанной около треугольника, расположен на одной из его сторон. Площадь треугольника $\frac{18}{169}\frac{\sqrt{11}}{2}$, а длина меньшей стороны $\frac{9}{13}$. Найти длину большей стороны.

14. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найти радиус описанной окружности, если сторона, средняя по длине, равна 4 см.

15. Найти отрезки, на которые точка касания вписанной окружности делит гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 24 и 7 см.

16. Найти отрезки, на которые точка касания вписанной треугольник окружности делит сторону AB, если $AB = 7$ см, $BC = 6$ см и $AC =$ $= 5$ см.

17. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две бóльшие стороны. Найти периметр отсеченного треугольника.

18. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит один из катетов на отрезки 5 и 10. Найти площадь треугольника.

19. Длины катетов прямоугольного треугольника 15 и 20. Найти расстояние от центра вписанного круга до высоты, опущенной на гипотенузу.

20. В прямоугольный треугольник с катетами 13 и 84 см вписан круг. Найти отношение площади круга к площади треугольника.

21. В равнобедренный треугольник с основанием 6 и боковой стороной 10 вписана окружность. Определить расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами.

22. В прямоугольный треугольник LMN ($\angle L = 90°$) вписана окружность радиуса a, касающаяся катета LN в точке P. Длина катета LN равна $6a$. Найти длины сторон треугольника LMN и площадь треугольника PMN.

23. В равнобедренном треугольнике угол между высотой, проведенной к боковой стороне, и основанием равен α. Площадь треугольника равна S. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

24. В прямоугольном треугольнике расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной окружности равно $\sqrt{2}$, а радиус вписанной окружности равен 2,5. Найти периметр треугольника.

25. Определить углы прямоугольного треугольника, зная, что отношение радиусов вписанного и описанного кругов равно 4 : 13.

26. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны 30°, а само основание $3\sqrt{3}$. Найти радиус описанной окружности.

27. Расстояние от боковой стороны равнобедренного треугольника, равной 16 см, до центра описанной окружности равно 6 см. Найти радиус этой окружности.

28. Определить высоту треугольника ABC, опущенную на сторону BC, если радиус описанной около треугольника окружности равен $(2-\sqrt{3})$, а величины $\angle BAC$ и $\angle BCA$ равны соответственно 30 и 75°.

29. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 3$, $BC = 6$, $\cos\angle ABC = \frac{1}{4}$, AD – биссектриса. Найти радиус R окружности, описанной около треугольника $AABD$.

30. В треугольнике ABC с длинами сторон $BC = 7$, $AC = \sqrt{37}$, $AB = 3$ проведена биссектриса AD. Найти длину биссектрисы и радиус окружности, описанной около треугольника ABD.

31. В треугольнике ABC ($AB = BC = 6$) на стороне AB как на диаметре построена окружность, пересекающая BC в точке D так, что $BD:DC = 2:1$. Найти AC.

32. Длина стороны AB треугольника ABC равна 1. На AB как на диаметре построена окружность, делящая AC точкой D пополам, а BC – точкой E в отношении $BE : EC = 7 : 2$. Найти длину AC.

33. В треугольнике ABC угол $\angle C = 60°$. Радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $2\sqrt{3}$. На стороне AB взята точка

D так, что $AD = 2DB$. Известно, что $CD = 2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

34. Длины катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC относятся как 1:2. Окружность, центр которой лежит на AB, проходит через точку A и касается BC в точке D. Найти отношение $BD : DC$.

35. Центр окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC в точке B и проходящей через A, лежит на стороне AC. Найти площадь треугольника ABC, если $BC = 6$, $AC = 9$.

36. В треугольник ABC с длиной стороны $BC = 9$ вписана окружность, касающаяся BC в точке D. Известно, что $AD = DC$, $\cos\angle BCA = \dfrac{2}{3}$. Найти длину стороны AC.

37. И треугольник со сторонами $AB = 10$ и $CB = 20$ и углом $ACB = 30°$ вписана окружность. Через точку M на AC ($AM = 10$) проведена касательная к окружности. Эта касательная пересекается с прямой, параллельной AC и проходящей через точку B, в точке K. Найти площадь четырехугольника $ABKM$.

38. Вершина B треугольника ABC лежит на окружности, касающейся стороны AC в точке A. Окружность пересекает сторону BC еще в точке D. Найти высоту треугольника ABC, проведенную из вершины A, если известно, что $BD = 4$, $AC = 4\sqrt{2}$, а площадь $S_{\Delta ACD} = 6$.

39. В треугольнике ABC стороны $BC = 41$, $AC = 51$, $AB = 58$. Окружность проходит через точки A и В, а ее центр лежит на высоте BD. Найти радиус окружности.

40. На гипотенузе прямоугольного треугольника, площадь которого равна 9, лежит центр окружности радиуса $R = 2$, которая касается катетов. Найти длины катетов.

41. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18 см. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найти отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону.

42. В треугольнике PQL проведена средняя линия AB, параллельная PL. Длина стороны PL равна $\sqrt{2}$, а синус угла PLQ равен $\dfrac{1}{3}$. Окружность, проведенная через A, B и L, касается стороны PQ. Найти ее радиус.

43. В треугольнике ABC стороны $AB = 2$, $BC = \sqrt{2}$, $\angle ABC = 105°$. Вершины A и C служат центрами кругов радиусов 2 и $\sqrt{2}$ соответственно. Найти площадь общей части этих кругов.

44. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вписанная окружность касается боковой стороны BC в точке Q, отрезок AQ пересекает вписанную окружность в точке P. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что $AC = 12$, $PQ = 5$.

45. Сторона AC в треугольнике ABC в 4 раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найти, в каком отношении центр этой окружности делит биссектрису угла B, если $\angle ABC = 60°$.

46. В остроугольном треугольнике ABC из A и C опущены высоты AM и CN. Площади $S_{\Delta ABC} = 56$, $S_{ANMC} = 42$. Радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{16}{\sqrt{3}}$. Найти длину отрезка MN.

47. В треугольнике ABC стороны $AB = 10$, $BC = 17$, $AC = 21$. Окружность касается продолжения сторон AB и AC в точках M и N соответственно и стороны BC. Найти площадь треугольника AMN.

48. Окружность радиуса 1 вписана в треугольник ABC ($\cos\angle ABC =$ $= 0{,}8$). Эта окружность касается средней линии, параллельной AC. Найти длину AC.

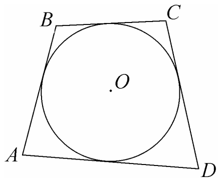
49. В остроугольном треугольнике ABC величина меньшего угла $ABC = 40°$, точка O – центр описанной окружности, K – центр вписанной окружности, угол $OBK = 15°$. Найти отношения длин сторон треугольника.

50. В остроугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности. Наибольшая высота $BD = 6$. Величина наибольшего угла треугольника $\angle BAC = 80°$. Найти длину меньшей стороны треугольника, если $\angle DBO = 10°$.

51. Окружность радиуса 3 вписана в треугольник ABC и касается стороны BC в точке D. Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон AC и AB и стороны BC в точке E. Угол $BCA = \frac{2\pi}{3}$. Найти ED.

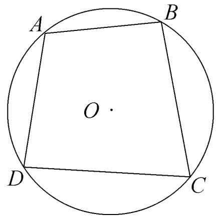
VI. КОМБИНАЦИИ ОКРУЖНОСТИ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Определение. Окружность называется вписанной в четырехугольник, если она касается всех сторон данного четырехугольника.



З а м е ч а н и е. При этом четырехугольник называют описанным около круга.

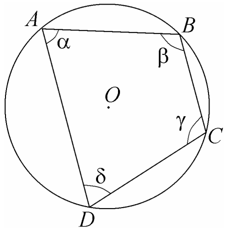
Определение. Окружность называется описанной около четырехугольника, если все вершины четырехугольника лежат на окружности.



З а м е ч а н и е. В данном случае четырехугольник называют вписанным.

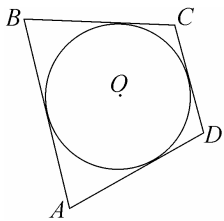
Отметим те признаки, при выполнении которых четырехугольники можно вписать в окружность и описать около окружности.

Теорема I. *Около четырехугольника* можно *описать* окружность тогда и только тогда, когда сумма противолежащих углов четырехугольника равна 180°.



Окружность описана около четырехугольника, тогда $\alpha + \gamma + \beta + \delta = 180°$.

Теорема II. *Окружность* можно *вписать* в четырехугольник тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны.



Окружность *вписана* в четырехугольник, тогда

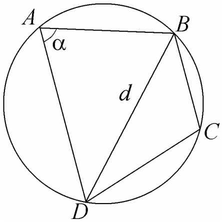
$$AB + CD = AD + BC.$$

Отметим ряд полезных теорем для решения задач на вписанные или описанные около окружности четырехугольники.

Теорема III. Центр *вписанной* в четырехугольник окружности лежит на пересечении биссектрис углов четырехугольника.

Теорема IV. Центр *описанной* около четырехугольника окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам четырехугольника.

Теорема V. Радиус r окружности, вписанной в четырехугольник, равен отношению площади S четырехугольника к его *полупериметру*: $r = \frac{S}{p}$.



Теорема VI. Диаметр ($2R$) окружности, описанной около четырехугольника, равен отношению длины диагонали к синусу противолежащего угла

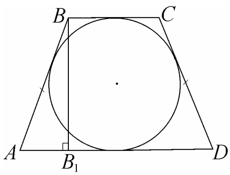
$$2R = \frac{d}{\sin\alpha},$$

где R – радиус описанной окружности.

Замечание. Радиус окружности, описанной около четырехугольника, равен радиусу окружности, описанной около треугольника, образуемого любыми тремя вершинами четырехугольника.

Теорема VII. Параллелограмм, который можно вписать в окружность, прямоугольник.

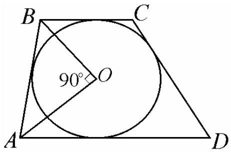
Теорема VIII. Параллелограмм, в который можно вписать окружность, является ромбом.



Теорема IX. Трапеция, около которой можно вписать окружность, равнобедренная.

Замечание. Если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то $h = 2r$,

$$B_1D = AB = CD = L_{\text{сред.линии}} = \frac{BC + AD}{2}.$$



Теорема X. Боковая сторона трапеции видна из центра вписанной окружности под углом 90°.

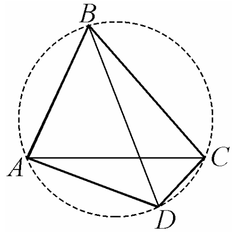
Теорема XI. Площадь вписанного четырехугольника со сторонами a, b, c, d можно найти по формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где p – полупериметр четырехугольника: $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Замечание. Если четырехугольник является одновременно вписанным и описанным, то его площадь вычисляется по формуле $S = \sqrt{abcd}$, где a, b, c, d – стороны четырехугольника.

Теорема Птолемея. Во вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.



Теорема XII. Площадь правильного n-угольника $S = rp$, где p – полупериметр четырехугольника. А также

$$S = nr^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \quad S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}.$$

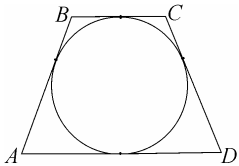
Примеры решения задач

Задача 6.1. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Периметр трапеции равен 48 см. Найти длину боковой стороны.

Решение. По свойству четырехугольника, в который можно вписать окружность,

$$AB + CD = BC + AD = P/2,$$

где P – периметр.

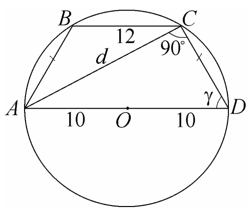


Поскольку $AB = CD$ и $AB + CD = P/2$, то $AB = P : 4 = 12$ см.

Ответ: 12 см.

Задача 6.2. Найти диагональ и боковую сторону равнобочной трапеции с основаниями 20 см и 12 см, если центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

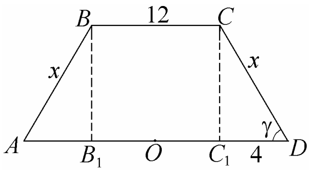
Решение. Трапеция $ABCD$ ($AB = CD$) равнобедренная; центр O окружности, описанной около трапеции, лежит на большем основании, следовательно AD – диаметр окружности; $2R = AD = 20$; $R = 10$ (см).



Обозначим $AC = d$; $\angle CDA = \gamma$. По формуле для радиуса описан» окружности:

$$2R = \frac{d}{\sin\gamma}. \qquad (1)$$

Обозначим $AB = CD = x$; тогда $d = \sqrt{20^2 - x^2}$, так как ΔACD – прямоугольный (вписанный треугольник, опирающий на диаметр окружности).



Проведем высоты CC_1 и BB_1 в трапеции $ABCD$, тогда $BC = B_1C_1 = 12$,

$AB_1 - C_1D = \dfrac{20-12}{2} = 4$ (см).

Находим из прямоугольного ΔCC_1D

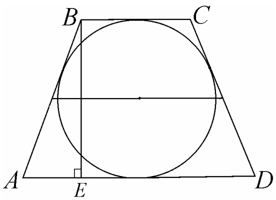
$\sin\gamma = \dfrac{CC_1}{CD} = \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x}$. Подставляем в формулу (1) и получаем

$$20 = \frac{\sqrt{20^2-x^2}}{\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}} = \frac{x\sqrt{400-x^2}}{\sqrt{x^2-16}},\quad 20\sqrt{x^2-16} = x\sqrt{400-x^2}.$$

Возводя это уравнение в квадрат, получаем $400(x^2 - 16) = x^2(400 - x^2)$. Раскрываем скобки, получаем $x^2 = 80$; $x = 4\sqrt{5}$ (см). Тогда диагональ $AC = \sqrt{20^2 - x^2} = \sqrt{400-80} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$ (см).

Ответ: $AC = 8\sqrt{5}$ (см); $AB = CD = 4\sqrt{5}$ (см).

Задача 6.3. Средняя линия равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 68 см. Определить радиус этого круга, если нижнее основание трапеции больше верхнего на 64 см.



Решение. По свойству средней линии трапеции $\dfrac{BC+AD}{2} = 68$ (см).

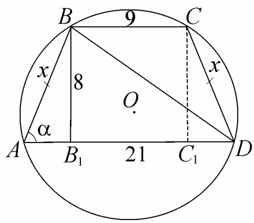
По условию $AD - BC = 64$. Решая эту систему уравнений, получим $AD = 100$; $BC = 36$. По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = BC + AD$, так как $AB = CD$, то $AB = \dfrac{BC+AD}{2}$, $AB = 68$ (см).

Рассмотрим ΔABE ($AD \perp BE$) с $\angle AEB = 90°$. Трапеция $ABCD$ – равнобедренная, значит, $AE = \dfrac{AD-BC}{2} = 32$ (см). По теореме Пифагора для ΔABE имеем: $AB^2 = AE^2 + BE^2$, $BE = \sqrt{68^2 - 32^2} = 60$. Так как $BE = 2R$, то $R = 30$ см.

Ответ: 30 см.

Задача 6.4. В равнобочной трапеции с основаниями 21 см и 9 см высота равна 8 см. Найти радиус описанного круга.

Решение. $ABCD$ – равнобедренная трапеция ($AB - CD = x$). Дополнительно проводим высоту CC_1 из вершины C трапеции. Тогда



$$AB_1 = C_1D = \frac{AB - BC}{2} = 6 \text{ (см)};$$

$$AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ (см)}.$$

Найдем синус угла BAD и косинус $\angle\alpha$:

$$\sin\angle BAD = \frac{BB_1}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{AB_1}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Определим BD – диагональ трапеции $ABCD$ по теореме синусов:

$$AB^2 + AD^2 - 2AB{\cdot}AD\cos\alpha = BD^2;$$

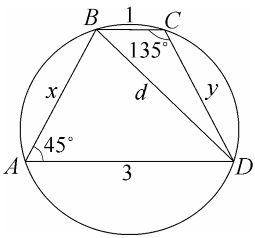
$$BD^2 = (10)^2 + (21)^2 - 2{\cdot}10{\cdot}21\cdot\frac{3}{5};$$

$$BD = \sqrt{289} = 17 \text{ (см)}, \qquad BD = d = 17 \text{ (см)}.$$

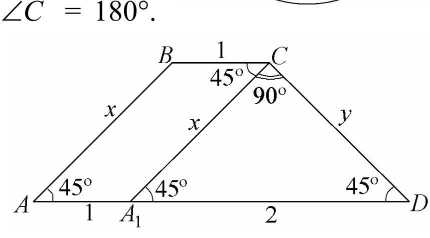
Тогда, используя формулу $2R = \dfrac{BD}{\sin\alpha} = \dfrac{17}{4/5} = \dfrac{17\cdot 5}{4}$, получим $R = \dfrac{17\cdot 5}{8} = \dfrac{85}{8}$.

Ответ: $\dfrac{85}{8}$.

Задача 6.5. Найти радиус окружности, описанной около трапеции с основаниями 3 см и 1 см одним из углов 45°, если известно, что такая окружность существует.



Решение. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Тогда $\angle C = 180° - 45° = 135°$.



Проведем из вершины C прямую $CA_1 \| AB$; получаем параллелограмм $ABCA_1$; тогда

$\angle BAA_1 = \angle BCA_1 = 45°$;

$\angle A_1CD = 135° - 45° = 90°$;

$$|A_1D| = |AD| - |AA_1| = 3 - 2 = 2 \text{ (см)}.$$

В ΔA_1CD угол $A_1CD = 90°$. Тогда по теореме Пифагора

$$A_1D^2 = x^2 + y^2 = 4.$$

Заметим, что $\angle CA_1D = \angle BAD$, так как $AB \parallel CA_1$, а из того, что ΔA_1CD – прямоугольный, получаем $\angle CDA = 45°$, т.е. $x = y$ ($AB = CD$). Тогда $x = y = \sqrt{2}$ ($x^2 + y^2 = 4$; $2x^2 = 4$; $x^2 = 2$).

Известно, что

$$2R = \frac{d}{\sin\alpha} = \frac{BD}{\sin\alpha}. \quad (1)$$

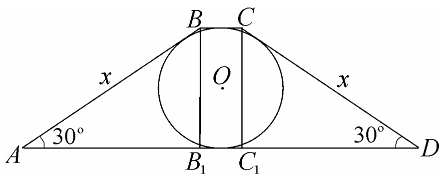
$$BD^2 = 3^2 + AB^2 - 2\cdot 3\cdot AB\cos 45° = 9 + 2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 11 - 6 = 5,$$

$$BD = \sqrt{5} \text{ (см)} = d.$$

Подставив d в формулу (1), получим $2R = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Задача 6.6. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 8 см, угол у основания 30°. Найти длины сторон.



Решение. Дана равнобочная трапеция $ABCD$ ($AB = CD = x$). Так как окружность в нее вписана, то $BC + AD = AB + CD$, $BC + AD = 2x$. Проведем высоту $BB_1 \perp AD$, тогда ΔBB_1A – прямоугольный, $|BB_1| = x\sin 30° = \dfrac{x}{2}$.

Площадь трапеции $ABCD$ находим из того, что

$$S_{ABCD} = \left(\frac{BC + AD}{2}\right)\cdot BB_1 = \frac{2x}{2}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

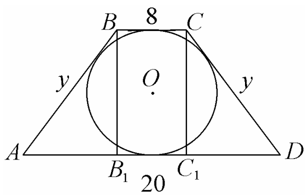
По условию $S_{ABCD} = 8$ см^2, откуда $8 = x^2/2$, $x^2 = 16$ см, $x = 4$ см.

Высота $BB_1 = 2r$, где r – радиус вписанной окружности, тогда $BB_1 = \dfrac{x}{2} = 2r$, $x = 4r$, $r = \dfrac{x}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ (см).

Обозначим $BC = u$, $AD = v$. Так как $BC + AD = 8$, то $u + v = 8$. Проведем высоту $CC_1 = BB_1$. Отсюда $B_1C_1 = BC = u$; $AB_1 + C_1D = = 2|AB_1| = 2x\cos 30° = 2\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (см) и $AD = u + 4\sqrt{3}$. Получаем: $BC + AD = 8$, $u + (u + 4\sqrt{3}) = 8$, $2u + 4\sqrt{3} = 8$, $u + 2\sqrt{3} = 4$. Отсюда $u = 4 - 2\sqrt{3}$, $v = (4 - 2\sqrt{3}) + 4\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $AB = CD = 4$; $BC = 4 - 2\sqrt{3}$; $AD = 4 + 2\sqrt{3}$.

Задача 6.7. В равнобочную трапецию с основаниями 8 см и 20 см вписана окружность. Найти длину окружности.



Решение. В трапеции $ABCD$ обозначим $AB = CD = y$. Так как окружность вписана, то $BC + AD = AB + CD$, т.е. $20 + 8 = 2y$; $y = 14$ (см). Проведем из вершин B и C высоты BB_1 и CC_1 соответственно. Тогда

$$AB_1 = C_1D = \frac{AD - B_1C_1}{2} = \frac{20-8}{2} = 6\,\text{см}.$$

Теперь найдем

$$BB_1 = \sqrt{y^2 - AB_1^2} = \sqrt{14^2 - 6^2} = \sqrt{196 - 36} = 4\sqrt{10}\ \text{(см)}.$$

Но $BB_1 = 2r$, где r – радиус вписанной окружности, т.е. $2r = 4\sqrt{10}$; $r = 2\sqrt{10}$. По формуле длины окружности имеем $l = 2\pi r = 4\sqrt{10}\pi$.

Ответ: $4\sqrt{10}\pi$ (см).

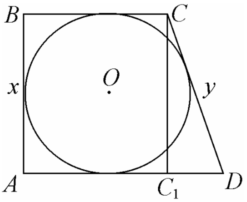
Задача 6.8. В равнобочную трапецию вписана окружность радиуса 2 см. Найти площадь трапеции, если длина ее боковой стороны равна 10 см.

Решение. Трапеция $ABCD$ равнобокая, т. е. $AB = CD = 10$ см. Так как окружность вписана, то проведения высота $BB_1 = 2r$, где r – радиус окружности. Тогда $BB_1 = 2r = 2\cdot 2 = 4$ (см). Так как окружность вписана в трапецию, то $BC+AD=AB + CD = 20$;

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} h = \frac{20}{2} | BB_1 | = 10 \cdot 4 = 40 \text{ см}.$$

Ответ: 40 см.

Задача 6.9. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Основания равны 2 см и 3 см. Найти радиус окружности.



Решение. Так как окружность вписана в трапецию, то $AB + CD = 2 + 3$ (см), т.е. $x + y = 5$, где $AB = x$; $CD = y$. Проведем из вершины C высоту CC_1, тогда

$$C_1D = AD - AC_1 = 3 - 2 = 1 \text{ (см)};$$

$$CC_1 = BA = x.$$

Так как треугольник CC_1D прямоугольный, то

$$CD^2 = CC_1^2 + C_1D^2 \quad \text{или} \quad y^2 = 1 + x^2.$$

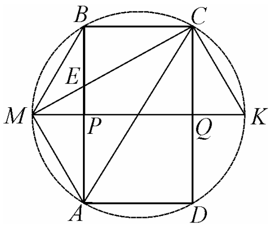
Получаем

$$\begin{cases} x + y = 5; \\ y^2 - x^2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5; \\ (y - x)(y + x) = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5; \\ y - x = \frac{1}{5}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5}; \\ y = \frac{13}{5}. \end{cases}$$

Радиус вписанной окружности $r = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2} = \frac{12/5}{2} = \frac{6}{5}$ (см).

Ответ: $\frac{6}{5}$ (см).

Задача 6.10. Около прямоугольника $ABCD$ описана окружность. Около окружности взята точка M, равноудаленная от вершин A и B. Отрезки MC и AB пересекаются в точке E. Найдите площадь четырехугольника $AMBC$, если $ME = 2$ см и $EC = 16$ см.



Решение. Проведем прямую MK перпендикулярно AB, которая пересекает AB и CD в точках P и Q.

Треугольники MBP и MPA равны как прямоугольные по гипотенузе и катету, поэтому $AP = PB$. Таким образом, MK перпендикулярна хорде AB и проходит через ее середину, т.е. MK – диаметр круга. AC – тоже диаметр, поскольку центр окружности, описанной около прямоугольника, лежит на диагонали.

Треугольники MEP и BCE подобны с коэффициентом подобия 1/8. Пусть $MP = x$, тогда $BC = PQ = 8x$ и $MK = 10\,x$. По теореме Пифагора

$$CK = MB = \sqrt{MK^2 - MC^2} = \sqrt{100x^2 - 18^2}\ ;$$

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{100x^2 - 64x^2} = 6x\ ; \qquad BP = \frac{AB}{2} = 3x\ .$$

Из треугольника MBP по теореме Пифагора

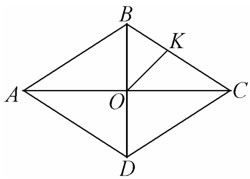
$$MB^2 = BP^2 + MP^2 \Rightarrow 100x^2 = 18^2 - 9x^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

Искомая площадь

$$S_{AMBC} = S_{AMB} + S_{ABC} = \frac{1}{2} MP \cdot AB + \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{486}{5}\text{ см}^2.$$

Ответ: 97, 2 см^2.

Задача 6.11. Найти радиус круга, вписанного в ромб, диагонали которого равны d_1 и d_2.

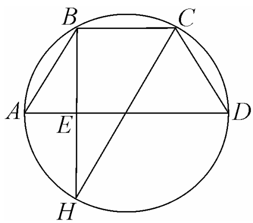


Решение. Радиус OK, проведенный в точку касания окружности со стороной BC, перпендикулярен к этой стороне и является высотой в прямоугольном треугольнике BOC. Так как $OB \cdot OC = OK \cdot BC$, то

$$OK = R = \frac{d_1 d_2}{4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} = \frac{d_1 d_2}{2\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}.$$

Ответ: $R = \dfrac{d_1 d_2}{2\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$.

Задача 6.12. Около равнобочной трапеции с основаниями a и b ($a > b$) и высотой h описана окружность. Найти радиус этой окружности.



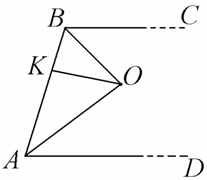
Решение. Проведем прямую $BE \perp AD$ ($AD || BC$) до пересечения с окружностью в точке H. Так как треугольник HBC прямоугольный и вписанный в круг, то CH – диаметр этого круга. Поскольку $BE = h$, $AE = \dfrac{a-b}{2}$, $DE = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$, то из равенства $EH \cdot BE = AE \cdot ED$ найдем:

$$EH = \frac{a^2-b^2}{4h}; \quad BH = h + \frac{a^2-b^2}{4h} = \frac{4h^2+a^2-b^2}{4h}.$$

Окончательно имеем

$$R = \frac{CH}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \left(\frac{4h^2+a^2-b^2}{4h}\right)}.$$

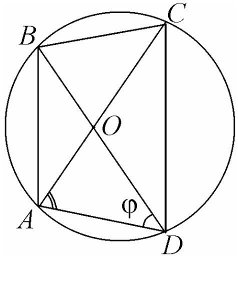
Задача 6.13. Круг, вписанный в трапецию, делит точкой касания одну из боковых сторон на отрезки длиной m и n. Найти радиус круга.



Решение. Пусть O – центр круга, K – точка касания, $AK = n$, $BK = m$ (на рисунке указана часть трапеции). Так как центр O лежит на биссектрисах углов A и B трапеции, то сумма углов $\dfrac{\angle A}{2} + \dfrac{\angle B}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, и поэтому треугольник AOB – прямоугольный, в котором высота OK проведена из вершины прямого угла. Из подобия треугольников AOK и BOK имеем $\dfrac{AK}{OK} = \dfrac{OK}{KB}$ или $\dfrac{n}{OK} = \dfrac{OK}{m}$, $OK = \sqrt{m \cdot n}$.

Ответ: $R = OK = \sqrt{m \cdot n}$.

Задача 6.14. Четырехугольник $ABCD$ вписан в круг радиуса R, причем его диагонали AC и BC взаимно перпендикулярны. Доказать, что $AB^2 + CD^2 = 4R^2$.



Решение. Пусть $\angle ADB = \varphi$, тогда $\angle CAD = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$, так как треугольник AOD прямоугольный ($AC \perp BD$ по условию). Имеем равенства $AB = 2R\sin\varphi$ и $CD = 2R\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2R\cos\varphi$.

Возводя эти равенства в квадрат и складывая, получаем:

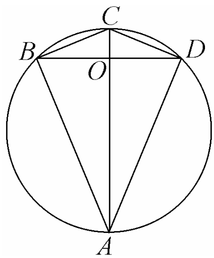
$$AB^2 + CD^2 = 4R^2\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 4R^2,$$

что и требовалось доказать.

В заключение рассмотрим более сложную задачу.

Задача 6.15. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружности. Диагонали AC и BD этого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Найти его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB = 2BC$.

Решение. Так как $AB^2 + CD^2 = 4R^2$ и $BC^2 + AD^2 = 4R^2$ (см. решение задачи 6.14) и $BC + AD = AB + CD$ (свойство сторон четырехугольника, в который можно вписать окружность), то учитывая соотношение $AB = 2BC$ имеем систему уравнений:



$$\begin{cases} 4BC^2 + CD^2 = 4R^2; \\ BC^2 + AD^2 = 4R^2; \\ BC + AD = 2BC + CD, \end{cases}$$

из которой устанавливаем, что $BC = CD$ и $AD = AB$. Из последнего равенства следует, что AC – диаметр описанного круга, а это позволяет найти площадь четырехугольника $ABCD$ как удвоенную площадь треугольника ABC. Имеем $AB + BC = 4R^2$ или

$$4BC^2 + BC^2 = 4R^2,\quad BC = \frac{2R}{\sqrt{5}},\quad AB = \frac{4R}{\sqrt{5}},\quad S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2R}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4R}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $S_{ABCD} = \dfrac{8R}{\sqrt{5}}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти длину окружности, вписанной в квадрат с длиной диагонали 16 см.

2. Диаметр круга равен 20. Определить площадь вписанного в него прямоугольника, стороны которого относятся как 3 : 4.

3. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 15 см. Найти периметр этого четырехугольника.

4. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найти площадь этого четырехугольника.

5. Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на 4 дуги. Найти расстояние от середины одной из больших дуг до ближайшей вершины прямоугольника, если стороны равны 24 см и 7 см.

6. В равнобедренную трапецию можно вписать окружность. Меньшее основание трапеции равно 1, а высота - 3. Найти боковую сторону.

7. Три стороны описанного четырехугольника, взятые в последовательном порядке относятся, как 3 : 4 : 5, а периметр этого четырехугольника равен 48 см. Найти длины сторон этой четырехугольника.

8. Через смежные вершины квадрата со стороной $\sqrt{10}$ проходит окружность так, что касательная к ней, проведенная из третьей вершины квадрата, равна удвоенной стороне квадрата. Найти радиус этой окружности.

9. В квадрат вписана окружность радиуса R, которая касается стороны CD в точке E. Найти длину хорды, лежащей на прямой AE.

10. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна a. Найти сторону вписанного в окружность квадрата.

11. Длины боковых сторон трапеции 6 см и 10 см. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5 : 11. Найти длины оснований.

12. Окружность вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 2 и 8 см. На какие отрезки делит ее боковую сторону точка ее касания с окружностью.

13. Около круга радиуса 4 описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 40. Найти ее площадь.

14. Средняя линия равнобочной трапеции, описанной около круга, равна 170. Определить диаметр круга, если нижнее основание трапеции больше верхнего на 160.

15. Трапеция вписана в круг радиуса 24, причем большее основание трапеции равно большей хорде круга, а все другие стороны трапеции равны между собой. Найти площадь трапеции.

16. Около круга с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной 17 см. Найти основания трапеции.

17. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 8. Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\pi/6$.

18. Трапеция $KLMN$ ($LM||KN$) вписана в окружность, а другая окружность вписана в эту трапецию. Отношение $LM : KN = 1 : 3$. Площадь трапеции равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Найти высоту трапеции.

19. Точка K пересечения диагоналей AC и BD вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ делит диагональ BD пополам, а длины отрезков $AK = 18$ и $CK = 8$. Найти длину BD.

20. В параллелограмм, одна из сторон которого равна $7\sqrt{2}$ м, вписана окружность радиуса $3\sqrt{3}$ м. Найти площадь параллелограмма.

21. Вокруг параллелограмма, одна из диагоналей которого равна $7\sqrt{8}$ описана окружность. Найти площадь круга.

22. В ромб с острым углом α вписан круг. Найти отношение площадей круга и ромба.

23. Высота равнобедренной трапеции равна 14, а оснований 12 и 16. Определить радиус описанной окружности.

24. В равнобедренную трапецию $ABCD$, обе диагонали которой равны основанию AD, можно вписать окружность. Найти углы при основании AD.

25. В трапецию $ABCD$ (основания AD и BC) можно вписать окружность. Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам. Найти угол между диагоналями.

26. Около окружности радиуса R описана прямоугольная трапеция площади S. Вычислить острый угол трапеции.

27. Около окружности радиуса 1 описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

28. В равнобедренную трапецию с периметром 100 см вписана окружность. Найти радиус окружности, если расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами равно 16 см.

29. Трапеция с основаниями $BC = 2$ см и $AD = 10$ см такова, что в нее можно вписать и около нее можно описать окружности. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

30. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 см и 4 см. Найти среднюю линию.

31. Около трапеции с основаниями AD и BC описана окружность радиуса 6. Центр этой окружности лежит на AD. Определить площадь трапеции, если длина BC равна 4.

32. Трапеция $KLMN$ с основаниями LM и KN вписана в окружность, центр которой лежит на KN. Диагональ LN трапеции равна 4 см, а угол MNK равен $60°$. Найти длину LM.

33. В прямоугольной трапеции, высота которой 4 см, на стороне, перпендикулярной основанию, как на диаметре построена окружность. Эта окружность касается противоположной боковой стороны трапеции. Найти площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны основаниям трапеции.

34. В равнобедренную трапецию с основаниями BC и AD вписана окружность с центром в точке O. Найти площадь трапеции, если $OC = 2$ и $OD = 4$.

35. Окружность, проходящая через вершину D и касающаяся сторон AB и HC равнобедренной трапеции $ABCD$, пересекает стороны AD и DC и точках M и N соответственно. Известно, что $AM : DM = 1 : 3$, $CN : DN = 4 : 1$, $AB = 7$, $AD = 6$. Найти длину основания BC.

36. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, причем $KN = 3$, $\angle LMN = 120°$. Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN. Найти площадь треугольника KLN.

37. В трапеции $ABCD$ с основанием $AD = 40$, углами $\angle BAD = \angle ADC = 60°$ и боковыми сторонами $AB = CD = 10$ см вписана окружность, касающаяся AD, BC и AB. Через точку M, расположенную на отрезке AD, отстоящей на 10 см от D, проведена касательная к окружности. Эта касательная пересекает основание в точке K. Найти отношение площадей четырехугольников $ABKM$ и $MDCK$.

38. Около окружности описаны ромб со стороной 3 и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 7. Найти радиус окружности.

39. В трапеции длины диагоналей 10 и $4\sqrt{13}$, а длины оснований 6 и 12. Найти площадь трапеции. Можно ли в эту трапецию вписать окружность? Можно ли около этой трапеции описать окружность?

40. Во вписанном в окружность четырехугольнике $KLMN$ стороны $KL = 2$, $LM = 3$, $\angle KLM = 120°$, а диагональ LN является отрезком биссектрисы угла $AKLM$. Найти длину LN.

41. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ и диагональ $BD = a$. Найти площадь ΔBCD.

42. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке K. Известно, что $AD = 5$, $BC = 10$, $BK = 6$. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

43. Диагонали описанного около окружности четырехугольника взаимно перпендикулярны и обе равны 1 м. Один из углов четырехугольника равен $60°$. Найти стороны.

44. В выпуклом четырехугольнике диагонали перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1 м. Найти длину отрезка, соединяющею середины сторон ……. и AD.

45. В трапецию вписана окружность. Известна длина a одного из оснований и отрезки b и d, на которые разделена точкой касания одна из боковых сторон (b примыкает к a). Найти площадь трапеции.

46. Найти площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, равны R и r.

47. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника $AEBC$ описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная через точку E, пересекает прямую AD в точке F так, что D лежит между A и F. Найти длину отрезка EF, если известно, что $AF = a$, $AD = b$ $(a > b)$.

48. Равнобедренная трапеция описана вокруг окружности. Угол между ее боковыми сторонами равен β. В каком отношении диагональ делит площадь трапеции?

49. В окружность радиуса R вписана трапеция с боковой стороной c и острым углом α. Найти площадь трапеции.

50. Точки A, B, C и D – последовательные вершины прямоугольника. Окружность проходит через точки A и B и касается стороны CD в ее середине. Через точку D проведена прямая, которая касается той же окружности в точке E, а затем пересекает продолжение стороны AB в точке K. Найти площадь трапеции $BCDK$, если известно, что $AB = 10$ и отношение $KE : KA = 3:2$.

51. Найти длину стороны квадрата, две вершины которого лежат на окружности радиуса $R = \sqrt{5}$, а две другие – на касательной к этой окружности.

52. Найти площадь круга, вписанного в правильный шестиугольник, если площадь шестиугольника равна $60\sqrt{3}$ см^2.

53. Вычислить площадь правильного двенадцатиугольника, вписанного в окружность радиуса 5.

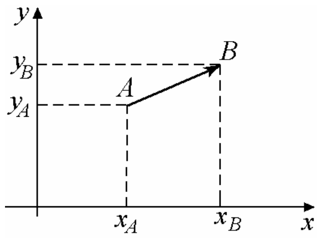
54. Периметр описанного многоугольника равен 60 см, а его площадь – 240 $см^2$. Найти радиус окружности.

55. Около окружности, радиус которой равен 25 см, описан многоугольник, площадь которого 20 $дм^2$. Найти его периметр.

56. По данной площади Q правильного вписанного двенадцатиугольника определить площадь правильного шестиугольника вписанного в ту же окружность.

VII. ВЕКТОРЫ

Основные определения



Вектором в двумерном или трехмерном пространстве будем называть направленный отрезок (упорядоченную пару точек).

Координаты вектора определяются как разность координат *конца вектора* (точка B (x_B; y_B) и *начала вектора* (точка A (x_A; y_A)).

Тогда $\overline{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A\}$.

Вектор может иметь две координаты (на плоскости) или три (в трехмерном пространстве).

Длина вектора $\overline{AB}$ вычисляется по формуле:

если $\vec{a} = \{a_1; a_2\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$;

если $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Векторы называются *коллинеарными,* если лежат на параллельных прямых. Если векторы заданы своими координатами

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\} \text{ и } \vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\},$$

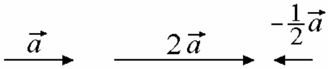
то коллинеарность означает существование такого числа α, для которого выполнено одно из соотношений

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \alpha \quad \text{или} \quad \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \alpha^{-1}.$$

При этом допускается дробь $\frac{0}{0}$, которой можно приписать любое значение. Например, векторы $\{1; 0; -2\}$ и $\{-3; 0; 6\}$ коллинеарны: $\frac{1}{-3} = \frac{0}{0} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$.

Нулевой вектор $0 = \{0; 0; 0\}$ коллинеарен любому вектору.

Коллинеарные вектора называются *сонаправленными,* если лежат по одну сторону относительно прямой (плоскости), проходящей через их начала. Если векторы заданы своими координатами, то сонаправленность означает, что число α, используемое в определении коллинеарности, положительно.

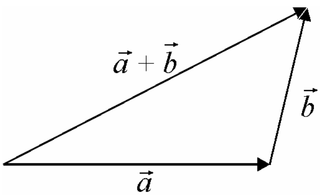


Два вектора равны, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковую длину. (Другими словами, если их координаты соответственно равны).

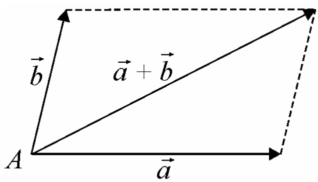
Линейные операции над векторами – это *умножение вектора на число* и *сложение векторов.*

Вектором $\lambda\vec{a}$ называется вектор длина которого равна $|\overrightarrow{\lambda a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|$ и который сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно направленным, если $\lambda < 0$.

При умножении вектора на число все координаты вектора умножаются на это число. Например, если $\vec{a} = \{3; –6; 12)$, то $2\vec{a} = \{6; –12; 24\}$ и $\frac{1}{2}\vec{a} = \{1; –2; 4\}$.



Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ расположить таким образом, что начало второго вектора совпадает с концом первого, то вектор, идущий из начала первого в конец второго, называется вектором суммы ($\vec{a} + \vec{b}$).



Если начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают (точка *A*), то, достроив их до параллелограмма, получим, что вектор диагонали, выходящей из точки *A* – сумма $\vec{a} + \vec{b}$.

При сложении векторов соответствующие координаты складываются. Например, $\vec{a} = \{2; –3; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 2; –4\}$, $\vec{a} + \vec{b} = \{2 + 1; (–3) + 2; 5 + (–4)\} = \{3; –1; 1\}$.

Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – это значит найти числа α и β такие, что $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$. На плоскости любой вектор всегда можно разложить по двум неколлинеарным векторам.

В трехмерном пространстве обычно вектор раскладывают по трем векторам.

Традиционные обозначения: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы, сонаправленные с осями $0x$, $0y$, $0z$ соответственно.

Для решения многих геометрических задач бывает полезным использовать *скалярное произведение* векторов. Приведем два эквивалентных определения скалярного произведения.

Определение А. Скалярным произведением двух векторов

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \text{ и } \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

(или $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ и $\vec{b} = \{b_1, b_2\}$) называется *число*

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

(или $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + \ + a_2b_2$).

Определение Б. Скалярное произведение – это число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos \vec{a}, \vec{b}.$$

Перечислим основные свойства скалярного произведения. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ и для любого числа k имеют место соотношения:

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
2. $(k\vec{a}, \vec{b}) = k(\vec{a}, \vec{b})$.
3. $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$.
4. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 > 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, если $\vec{a} = 0$.

Чаще всего при решении геометрических задач скалярное произведение используется для вычисления углов между прямыми. Используя определения А и Б, нетрудно получить

$$\cos \widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если $\cos \widehat{\vec{a}, \vec{b}} = 0$, т.е. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Примеры решения задач

Задача 7.1. Точки C и D имеют координаты $C\,(3; –5; 4)$ и $D\,(0; 2; –1)$. Найти длину вектора $\overrightarrow{CD}$.

Решение. Так как координаты вектора $\overrightarrow{CD}$ определяются как разность координат точек D и C, то

$$\overrightarrow{CD} = \{0-3;\ 2-(-5);\ -1-4\} = \{-3;\ 7;\ -5\},$$

$$\overrightarrow{CD} = \sqrt{(-3)^2+7^2+(-5)^2} = \sqrt{9+49+25} = \sqrt{83}.$$

Ответ: $\sqrt{83}$.

Задача 7.2. Точка C имеет координаты C (3; –2), а вектора $\overrightarrow{CM} = \{4; 0\}$, $\overrightarrow{NC} = \{1; -5\}$. Найти координаты точек M и N.

Решение. Пусть $M\,(x_M; y_M)$ и $N\,(x_N; y_N)$. Так как $\overrightarrow{CM} = \{x_M - 3;$ $y_M - (-2)\} = \{4; 0\}$, то $\begin{cases} x_M - 3 = 4; \\ y_M + 2 = 0, \end{cases}$ откуда $x_M = 7$, $y_M = -2$.

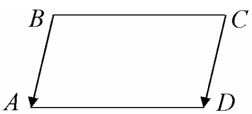
Аналогично, $NC = \{3 - x_N; -2 - y_N\} = \{1; -5\}$,

$$\begin{cases} 3 - x_N = 4; \\ -2 - y_N = -5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = 2; \\ y_N = 3. \end{cases}$$

Ответ: M (7;–2); N (2; 3).

Вывод. Для получения конца отрезка надо к координатам начала прибавить координаты самого вектора; для получения координат начала вектора надо от координат конца отнять координаты вектора.

Задача 7.3. Пусть точки A (3; –7); B (7; –1); C (2; 2) – три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$. Найти координаты точки D.



Решение. Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны. Поскольку $\overrightarrow{BA} = \{3 - 7;\ -7 - (-1)\} = \{-4; -6\} = \overrightarrow{CD}$, то для нахождения координат точки D мы прибавляем координаты начала вектора $\overrightarrow{CD}$ (точка C) и координаты самого вектора. Координаты точки D находим как в предыдущей задаче $D(x_D; y_D)$,

$$\begin{cases} x_D = 2 + (-4); \\ y_D = 2 + (-6), \end{cases} \quad \text{откуда } D\ (–2; –4).$$

Ответ: D (–2; –4).

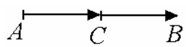
Задача 7.4. Найти числа m и n, при которых векторы $\vec{a}$ $\{m; –1; 0\}$ и $\vec{b}$ $\{3; 2; n)$ коллинеарны.

Решение. Составим пропорцию $\frac{m}{3} = \frac{-1}{2} = \frac{0}{n} = \alpha$, отсюда

$$\begin{cases} m/3 = \alpha, \\ -1/2 = \alpha, \\ 0/n = a. \end{cases} \quad \text{откуда получаем } m = -\frac{3}{2},\ n = 0.$$

Ответ: $m = -\frac{3}{2}$, $n = 0$. 2

Задача 7.5. Заданы точки A (x_A; y_A; z_A) и B (x_B; y_B; z_B). Найти координаты середины отрезка.



Решение. Вектор равен

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\{x_B = x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}.$$

Таким образом, координаты точки C

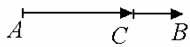
$$\left\{x_A + \frac{x_B - x_A}{2}; y_A + \frac{y_B - y_A}{2}; z_A + \frac{z_B - z_A}{2}\right\},$$

т.е. $C \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Вывод. Координаты середины отрезка – среднее арифметическое между координатами начала и конца.

Задача 7.6. Заданы точки A (3; –13; 7) и B (–11; –6; 28). Найти координату точки C, лежащей на отрезке AB, таком, что $\frac{AC}{CB} = \frac{5}{2}$.

Решение. Длина вектора $\overrightarrow{AC}$ равна $\frac{5}{7}$ длины



вектора $\overrightarrow{AB}$, т.е.

$$\overrightarrow{AC} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{7}\{-14; 7; 21\} = \{-10; 5; 15\}.$$

Прибавив к координатам точки A координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, получим C (–7;–8; 22).

Ответ: C (–7; –8; 22).

З а м е ч а н и е. В общем случае, если точка делит отрезок AB (A (x_A; y_A; z_A) и B (x_B; y_B; z_B)) в отношении $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, то точка C имеет координаты

$$C\left(x_A\frac{\beta}{\alpha+\beta}+x_B\frac{\alpha}{\alpha+\beta};y_A\frac{\beta}{\alpha+\beta}+y_B\frac{\alpha}{\alpha+\beta};z_A\frac{\beta}{\alpha+\beta}+z_B\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$$

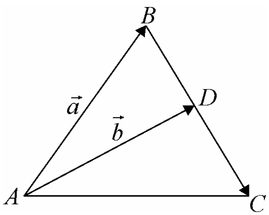
Сравните эту формулу с формулой для середины отрезка ($\alpha = \beta = 1$).

Задача 7.7. Найти координаты вектора длина которого равна 12, коллинеарного вектору $\vec{a} = \{\sqrt{3};-\sqrt{5};1\}$.

Решение. Длина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{3+5+1} = 3$. Таким образом, искомый вектор в 4 раза длиннее. Поскольку при умножении вектора на число λ длина вектора увеличивается в (λ) раз, то искомых векторов два: $4\vec{a}$ и (–4) $\vec{a}$.

Ответ: $\{4\sqrt{3};-4\sqrt{5};4\}$ и $\{-4\sqrt{3};4\sqrt{5};-4\}$.

Задача 7.8. Пусть AD – медиана треугольника ABC. Разложить вектор $\overrightarrow{BC}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.



Решение. Искомый вектор $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$. Вектор $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$.

Таким образом,

$$\overrightarrow{BC} = 2(-\vec{a} + \vec{b}) = -2-\vec{a} + 2\vec{b}.$$

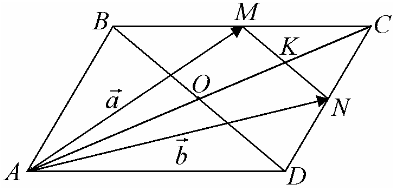
Ответ: $-2-\vec{a} + 2\vec{b}$.

Задача 3.9. Точки M и N – середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Разложить векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BA}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

Решение. Поскольку вектор $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \vec{b}$ и так как MN – средняя линия треугольника BCD, то $BD = 2MN$, то

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN} = -2\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Диагональ AC пересекает MN в точке K, $MK = KN$ и $OK = KC$ (это следует из подобия пар треугольников: BOC, MKC и DOC, NKC с коэффициентом подобия 1/2).



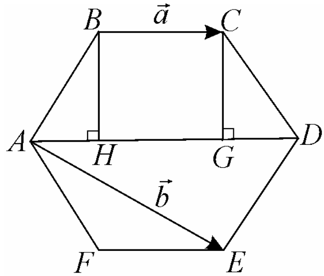
Поскольку точка K – середина OC и длины $|AO| = |OC|$, то отношение $AK : AC = 3 : 4$ и поскольку вектор $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, то $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$. Искомый вектор

$$\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CN} = 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}) = 2\left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{b}\right) = -\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Ответ: $\overrightarrow{BD} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$; $\overrightarrow{BA} = -\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Задача 7.10. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ векторы $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$. Разложить вектор $\overrightarrow{DF}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Диагональ AD отсекает от шестиугольника трапецию $ABCD$. Проведем высоты CG и BH. Сумма углов шестиугольника равна 720°. Шестиугольник правильный, отсюда $\angle FAB = \frac{720°}{6} = 120°$; $\angle DAB = \frac{\angle FAB}{2} = 60°$. Обозначим длину $AB = l$. Из прямоугольного ΔABH $AH = \frac{l}{2}$. Аналогично, $GD = \frac{l}{2}$, отсюда

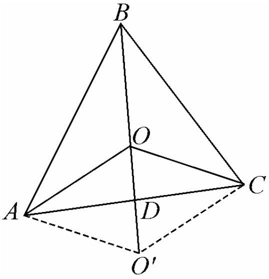


$$AD = AH + HG + GD = \frac{l}{2} + l + \frac{l}{2} = 2l.$$

Вектор $\overrightarrow{AD}$ сонаправлен вектору $\vec{a}$ и в 2 раза длиннее, т.е. $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -2\vec{a} + \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB} = -\vec{a}$. Искомый вектор $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = (-2\vec{a} + \vec{b} - \vec{a}) = -3\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: $-3\vec{a} + \vec{b}$.

Задача 7.11. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=\vec{O}$.



Решение. Пусть BD – медиана ΔABC. Тогда OD – медиана ΔAOC, поэтому $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$ (так как OD – половина диагонали OO'). Так как $\frac{OB}{OD}=2$, то $\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OD}$, т.е.

$$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{O},$$

что и требовалось доказать.

Задача 7.12. Разложить вектор $\vec{a}$ $\{1; -5\}$ по вектору $\vec{b}$ $\{2;-3\}$ и $\vec{c}$ $\{-3; 1\}$.

Решение. Ищем числа α и β такие, что $\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}=\vec{a}$, т.е.

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}2\alpha-3\beta\\-3\alpha+\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}.$$

Два вектора равны, если равны их координаты, т.е.

$$\begin{cases}2\alpha-3\beta=1,\\-3\alpha+\beta=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha-3(3\alpha-5)=1,\\\beta=3\alpha-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-7\alpha+15=1,\\\beta=3\alpha-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2,\\\beta=1.\end{cases}$$

Ответ: $\vec{a}=2\vec{b}+\vec{c}$.

Задача 7.13. Разложить вектор $\vec{a}$ $\{4; 8,-1\}$ по векторам $\vec{b}$ $\{1; -1; 0\}$, $\vec{c}$ $\{0; -3; 2\}$, $\vec{d}$ $\{1; 1; 1\}$.

Решение. Ищем числа α, β и γ, такие, для которых $\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}+\gamma\vec{d}=\vec{a}$, тогда

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+0\beta+\gamma=4,\\-\alpha-3\beta+\gamma=8,\\0\alpha+2\beta+\gamma=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=4-\gamma,\\-(4-\gamma)-3\beta+\gamma=8,\\2\beta+\gamma=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=4-\gamma,\\-3\beta+2\gamma=12,\\2\beta+\gamma=-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=4-\gamma,\\ \gamma=-1-2\beta,\\ -3\beta+2(-1-2\beta)=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1,\\ \beta=-2,\\ \gamma=3.\end{cases}$$

Ответ: $\vec{a}=\vec{b}-2\vec{c}+3\vec{d}$.

Задача 7.14. Точка A имеет координаты A (3; 5). На прямой $y = 2-\dfrac{x}{2}$ найти такую точку B, что вектор $\overrightarrow{AB}$ коллинеарен вектору $\vec{a}\,\{-1;2\}$.

Решение. Точки на прямой $y=2-\dfrac{x}{2}$ имеют координаты $B\left(t;2-\dfrac{t}{2}\right)$, где $t\in\mathbb{R}$. При этом вектор $\overrightarrow{AB}=\left\{t-3;-3-\dfrac{t}{2}\right\}=\alpha\vec{a}$, $\alpha\vec{a}=\{-\alpha;2\alpha\}$ (условие коллинеарности), тогда

$$\begin{cases}t-3=-\alpha,\\ -3-\dfrac{t}{2}-2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t+\alpha=3,\\ t+4\alpha=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=3-\alpha,\\ 3-\alpha+4\alpha=-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=6,\\ \alpha=-3.\end{cases}$$

Ответ: B (6; –1).

Задача 7.15. Найдите значение координаты x, при котором вектор $\vec{c}$ $\{x; 0; 2\}$ раскладывается по векторам $\vec{a}$ $\{1; 3; 4\}$ и $\vec{b}$ $\{-2; 5; 6\}$.

Решение. Пусть $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ *,* т.е.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-2\beta=x,\\ 3\alpha+5\beta=0,\\ 4\alpha+6\beta=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha-2\beta,\\ \alpha=5/3\beta,\\ 4(-5/3\beta)+6\beta=2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha-2\beta,\\ \alpha=5/3\beta,\\ -2/3\beta=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=11,\\ \alpha=5,\\ \beta=-3.\end{cases}$$

Ответ: 11.

Задача 7.16. Начало A (x_0; y_0) вектора $\overrightarrow{AB}$ лежит на графике функции $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, где x_0 – точка максимума этой функции, конец B – на графике функции $y=-1\frac{1}{4\sqrt{3}x^{3/2}}$ так, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет наименьшую длину. Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ и в $2\sqrt{6}$ раза длиннее его. Найти координаты вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Решение. Найдем максимум функции $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$:

$$y'=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

При переходе через точку $x_0 = 0$ производная меняет знак с " + " на "–", т.е. $x_0 = 0$ – точка максимума, $y(x_0) = –1$. Тогда A (0; –1) – координаты точки A.

Точка B лежит на графике $y=-1\frac{1}{4\sqrt{3}x^{3/2}}$, т. е. ее координаты имеют вид $B\left(t;-1+\frac{1}{4\sqrt{3}t^{3/2}}\right)$, поэтому $\overrightarrow{AB}=\left\{t;+\frac{1}{4\sqrt{3}t^{3/2}}\right\}$; длина $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{t^2+\frac{1}{48t^3}}$.

Найдем минимум функции $\rho(t)=|\overrightarrow{AB}|^2=t^2+\frac{1}{48t^3}$ при $t > 0$ (по ОДЗ $t = x > 0$)

$$\rho'(t)=2t-\frac{1}{16t^4}=0\Rightarrow\frac{32t^5-1}{16t^4}=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, координаты вектора $\overrightarrow{AB}=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$.

Искомый вектор в $2\sqrt{6}$ раза длиннее, т.е. $\overrightarrow{A_1B_1}=2\sqrt{6}\,\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{A_1B_1}=-2\sqrt{6}\,\overrightarrow{AB}$.

Ответ: $\{\sqrt{6};2\}$, $\{-\sqrt{6};-2\}$.

Задача 7.17. Найти скалярное произведение векторов:

а) $\vec{a} = \{2,-5\}$ и $\vec{b} = \{-1,-3\}$;

б) $\vec{a} = \{2,0,-1\}$ и $\vec{b} = \{3,-5,1\}$.

Решение. а) $(\vec{a},\vec{b}) = 2\cdot(-1) + (-5)\cdot(-3) = -2 + 15 = 13$;

б) $(\vec{a},\vec{b}) = 2\cdot3 + 0\cdot(-5) + (-1)\cdot1 = 6 + 0 - 1 = 5$.

Ответ: а) 13; б) 5.

Задача 7.18. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что $|\vec{a}| = 7\sqrt{3}$ и $|\vec{b}| = 6$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150°. Найти $(\vec{a},\vec{b})$.

Решение. $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos150° = 7\sqrt{3}\cdot 6\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -63$.

Ответ. –63.

Задача 7.19. Пусть длина векторов $|\vec{a}| = 5$ и $|\vec{b}| = 2$. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 120°. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение. Воспользуемся свойствами 1–4 скалярного произведения:

$$(2\vec{a}-3\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}) \overset{\text{свойство 3}}{=} (2\vec{a}-3\vec{b},\vec{a}) + (2\vec{a}-3\vec{b},2\vec{b}) \overset{\text{свойство 1}}{=}$$

$$= (\vec{a},2\vec{a}-3\vec{b}) + (2\vec{b},2\vec{a}-3\vec{b}) \overset{\text{свойство 3}}{=}$$

$$= (\vec{a},2\vec{a}) + (\vec{a},-3\vec{b}) + (2\vec{b},2\vec{a}) + (2\vec{a},-3\vec{b}) \overset{\text{свойство 2}}{=}$$

$$= (\vec{a},2\vec{a}) + (\vec{a},-3\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{b}) + 2(\vec{b},-3\vec{b}) \overset{\text{свойство 1}}{=}$$

$$= (2\vec{a},\vec{a}) + (-3\vec{b},\vec{a}) + 2(2\vec{a},\vec{b}) + 2(-3\vec{b},\vec{b}) \overset{\text{свойство 2}}{=}$$

$$= 2(\vec{a},\vec{a}) + (\vec{b},\vec{a}) - 6(\vec{b},\vec{b}) \overset{\text{свойство 4}}{=}$$

$$= 2|\vec{a}|^2 - 6|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos120° =$$

$$= 50 - 24 + 5\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 50 - 29 = 21.$$

Ответ. 21.

Задача 7.20. Найти косинус угла между векторами $\vec{a} = \{3,-4,5\}$ и $\vec{b} = \{2,4,-3\}$.

Решение. Вычислим

$$(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 2 + (-4)\cdot 4 + 5\cdot(-3) = 6 - 16 - 15 = -25;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}.$$

Теперь находим косинус угла:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{-25}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}} = \frac{-5}{\sqrt{58}}.$$

Ответ: $\frac{-5}{\sqrt{58}}$.

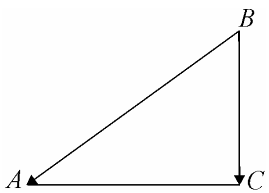
Задача 7.21. При каком значении параметра α векторы $\vec{a}$ = $=\{3, -4, 5\}$ и $\vec{b} = \{7, \alpha, -1\}$ ортогональны (т.е. образуют угол 90°).

Решение. Условие ортогональности векторов: $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, т.е.

$$3\cdot 7 + (-4)\cdot\alpha + 5\cdot(-1) = 0 \Rightarrow 16 - 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 4.$$

Ответ: 4.

Задача 7.22. На плоскости заданы три точки A (2,–1); B (–4, 2) и C (0, 3). Определить тип треугольника (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный).



Решение. Угол острый, если его косинус положителен; прямой, если косинус равен нулю, и тупой, если косинус отрицателен.

Косинус угла ABC – это косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

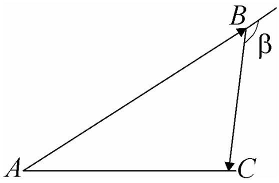
$$\cos\angle ABC = \cos\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}} = \frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}.$$

Поскольку $\overrightarrow{BA} = \{6,-3\}$ и $\overrightarrow{BC} = \{4, 1\}$, то

$$\cos\angle ABC = \frac{6\cdot 4 + (-3)\cdot 1}{\sqrt{6^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{21}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{85}} > 0$$

и угол ABC – острый.

Самой распространенной ошибкой было бы найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$, тем самым мы бы нашли косинус внешнего угла β треугольника ABC.



Найдем косинусы остальных углов:

$$\cos\angle BAC = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}.$$

Так как $\overrightarrow{AB} = \{-6, 3\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{-2,4\}$, то

$$\cos\angle BAC = \frac{12+12}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{20}} = \frac{24}{3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{4}{5} > 0\,.$$

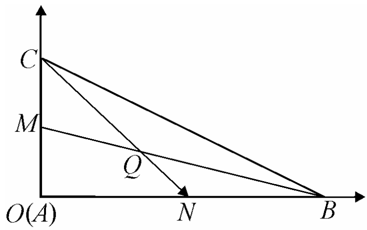
Векторы $\overrightarrow{CA} = \{-2,4\}$ и $\overrightarrow{CB} = \{4, 1\}$, поэтому

$$\cos\angle ACB = \frac{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} = \frac{-8+4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}} = \frac{-2}{\sqrt{85}} < 0\,.$$

Поскольку $\cos\angle ACB < 0$, то угол ACB – тупой, поэтому треугольник ABC – тупоугольный.

Ответ: тупоугольный.

Задача 7.23. Найти угол между медианами острых углов прямоугольного треугольника ABC, один из катетов которого в 2 раза больше другого.



Решение. Расположим ΔABC таким образом, что вершина прямого угла A совпадет с началом координат, а точки B и C попадут на положительные части осей начала координат.

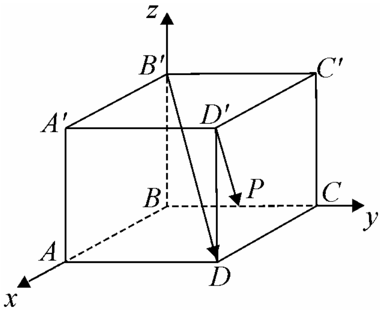
Пусть $AB = 2AC$. Масштаб выберем так, что $AC = 1$ и $AB = 2$. Тогда координаты $C\ (0, 1)$ и $B\ (2, 0)$.

Пусть BM и CN – медианы треугольника ABC. При этом координаты $M\ (0; 0{,}5)$ и $N\ (1; 0)$. Искомый угол α равен углу между векторами $\overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{MB}$. Так как $\overrightarrow{CN} = \{1, -1\}$ и $\overrightarrow{MB} = \{2, -0{,}5\}$, то

$$\cos\angle ACB = \frac{(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{MB})}{|\overrightarrow{CN}||\overrightarrow{MB}|} = \frac{1\cdot 2+(-1)\cdot(-0{,}5)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+1/4}} = \frac{2{,}5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17/2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{5}{\sqrt{34}}$.

Задача 7.24. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Найти угол между диагональю $B'D$ и прямой $D'P$, где P – середина BC.



Решение. Расположим систему координат так, как показано на рисунке.

Пусть длина ребра куба равна 2. Искомый угол равен углу между векторами $B'D$ и $D'P$ (или дополняет его до 180°). Находим координаты этих векторов.

Координаты точек: B' (0, 0, 2); D (2, 2, 0); D' (2, 2, 2) и P (0, 1, 0).

Координаты векторов: $B'D = \{2, 2, -2\}$; $D'P = \{-2, -1, -2\}$. Косинус угла

$$\cos \overrightarrow{B'D}\hat{,}\overrightarrow{D'P} = \frac{(\overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{D'P})}{|\overrightarrow{B'D}||\overrightarrow{D'P}|} = \frac{-4-2+4}{\sqrt{4+4+4}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \frac{-2}{\sqrt{12}\cdot 3} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Поскольку угол между векторами тупой, то угол между прямыми дополняет его до 180°, т.е. косинус искомого угла равен $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть заданы координаты точек A и B. Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

а) A (3;–5) и B (–1; –2); б) A (–3; 7) и B (0; 9);

в) A (2; 1; 3) и B (0; –1; 1); г) A (–4; 5; 0) и B (1; 3; 1).

2. Даны векторы $\overrightarrow{MN} = \{6; -10; 2\}$ и $\overrightarrow{PQ} = \{-3; 0; 6\}$. Найти координаты и длины векторов: а) $-\overrightarrow{PQ}$; б) $\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$; в) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ}$; г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$.

3. Дан вектор $\overrightarrow{MN} = \{4; -1; 3)$. Найти:

а) координаты точки N, если $M\,(0; -1; 2)$;

б) координаты точки M, если $N\,(5; -2; 1)$;

в) координаты середины отрезка MN, если $M\,(1; 1; 2)$;

г) координаты середины отрезка MN, если $N\,(3; 5; -1)$;

д) координаты точки C, лежащей на отрезке MN и делящей его в отношении $MC{:}CN = 1{:}3$, если $M\,(0; 0; -1)$;

е) координаты точки D, лежащей на прямой MN и такой, что $MN{:}ND = 2{:}3$, если $N\,(2; -3/2; 1/2)$.

4. Найти длины диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$, если $A\,(1; -3; 0)$; $B\,(-2; 4; -1)$ и $C\,(-3; 1; 1)$.

5. Треугольник задан координатами своих вершин $A\,(3; 0; -1)$; $B\,(-1; 4; 1)$ и $C\,(5; 2; 3)$. Найти длину медианы AD.

6. Известны координаты вершин треугольника $A\,(-2; 8)$; $B\,(2; 7)$ и $C\,(1; 5)$. Найти координаты точки пересечения медиан этого треугольника.

7. Известны две вершины треугольника $A\,(2; -3; 5)$, $B\,(-2; 1; -3)$ и точка $O\,(1; 2; 3)$ пересечения его медиан. Найти координаты вершины C этого треугольника.

8. Точки M_1 и M_2 – середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2. Найти длину отрезка M_1M_2, если $A_1\,(0; 1; 2)$, $A_2\,(1; 2; 1)$, $B_1\,(-1; -1; 3)$, $B_2\,(1; 0; 0)$.

9. Даны точки $A\,(-1; 2; -2)$ и $B\,(3; -4; 12)$. Найти расстояние от начала координат O до точки D, лежащей на отрезке AB и делящей его в отношении $AD{:}DB = OA{:}OB$. Чем является отрезок OD в треугольнике AOB?

10. Даны вершины треугольника $A\,(4; 5; 0)$, $B\,(3; 3; -2)$ и $C\,(2; 2; 6)$. Найти точку пересечения стороны BC с биссектрисой угла A.

11. Найти координаты точки C, лежащей на оси абсцисс и одинаково удаленной от точек $A\,(1; 2)$, $B\,(2; 3)$.

12. Найти координаты точки M, лежащей на оси абсцисс, если расстояние от M до точки $A\,(1; 2; 1)$ втрое больше расстояния от M до точки $B\,(-7; 1; 2)$.

13. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2; -3\}$ и $\vec{q} = \{4; 2\}$. Разложить вектор $\vec{a} = \{2; 13\}$ по векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

14. На плоскости даны два вектора $\vec{a} = \{3; -5\}$ и $\vec{b} = (1; 4)$. Разложить вектор $\vec{c} = (2; 5)$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

15. Даны векторы $\vec{a} = \{1; 0; -1\}$; $\vec{b} = \{3; 2; 0\}$ и $\vec{c} = \{1; 2; 3\}$. Разложить вектор $\vec{d} = \{2; 2; 3\}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

16. Разложить вектор $\vec{c} = \{11; -6; 5\}$ по векторам $\vec{p} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{q} = \{-1; 1; -2\}$, $\vec{r} = \{2; 1; -3\}$.

17. Из точки A (0; 6) к графику функции $y = -x^2 + 2x + 2$ проведены две касательные. Точки касания обозначены B и C. Разложить вектор $\overrightarrow{OA}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

18. К кривой $y = 4\sqrt{x+2}$ проведена касательная в точке A (x_0, y_0), где $x_0 = 2$. Эта касательная пересекает ось Ox в точке C, а ось Oy – в точке B. Разложить вектор $\overrightarrow{CO}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OA}$.

19. Вершины пирамиды имеют координаты A (–1;2;3), B (1;2;3), C (0;5;3) и D (0;3;10). Разложить вектор d по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, где $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = 2\overrightarrow{AD}$, $\vec{d} = (3; 5; 4)$.

20. Заданы точки A (35; –16; 20); B (–1; –24; –3); C (–20; 16; –4); D (–1; 4; 2). Разложить радиус-вектор точки, координаты которой удовлетворяют уравнению $15x + 23y - 17z - 43 = 0$ по радиусам-векторам точек, координаты которых не удовлетворяют этому уравнению. (Радиусом-вектором точки M называется вектор OM, где O – начало координат.)

21. Даны три последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: A (1; –2; 3); B (3; 2; 1); C (6; 4; 4). Точка M делит сторону CD пополам. Требуется: 1) разложить вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BA}$; 2) найти координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.

22. Точки A, B, C лежат на графике функции $y = -x^2 + 4x$. Точка A является вершиной этой параболы, абсциссы точек B и C соответственно равны –1 и 3. Разложить вектор $\overrightarrow{CB}$ по векторам $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{CO}$, где O – начало координат.

23. Точки M, N, P лежат на графике функции $y = x^2 + 3x - 10$. Абсциссы точек M, N, P соответственно равны: –6; 1; 3. Разложить вектор $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{PO}$, где O – начало координат.

24. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ лежат в одной плоскости и образуют попарно друг с другом углы 120°. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$.

25. В треугольнике ABC дано: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\angle BAC = 60°$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичный вектор, направленный по высоте треугольника, проведенной из A.

26. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC выбраны соответственно точки N и M так, что прямые AN и BM, пересекаясь в точке O, делятся в ней в отношении $BO : OM = 3:1$ и $AO : ON = 2:1$. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{CO} = \vec{c}$. Найти разложение вектора $\overrightarrow{CB}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

27. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны соответственно точки D и E так, что $BD : DA = 3:1$ и $BE : EC = 2:1$. Прямые CD и AE пересекаются в точке O. Пусть $AC = \vec{p}$ и $OB = \vec{q}$. Найти разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ по векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

28. Пусть K и M – середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ и $AK = \vec{a}$, $AM = \vec{b}$. Выразить вектора $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AD}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

29. Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Разложить вектор $\overrightarrow{A_1A_3}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_5}$.

30. Начало $A\ (x_0, y_0)$ вектора $\overrightarrow{AB}$ лежит на графике $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$, где x_0 – точка минимума этой функции, конец B – на прямой $2x + y + 2 = 0$ так, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет наименьшую длину. Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ и в 5 раз длиннее его. Найти координаты вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$.

31. Начало $A\ (x_0, y_0)$ вектора $\overrightarrow{AB}$ лежит на графике функции $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$, где x_0 – точка максимума этой функции, конец B – на графике функции $y = \dfrac{1}{4\sqrt{3}x^{3/2}}$ так, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет наименьшую длину. Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ и в $2\sqrt{6}$ раз длиннее его. Найти координаты вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$.

32. При каких значениях α векторы: а) $(2; -3)$ и $\{\alpha; 1\}$; б) $\{\alpha; 1\}$ и $\{0; -2\}$; в) $\{-2; 5\}$ и $\{\alpha^2 - 3\alpha; -10\}$ коллинеарны?

33. При каких значениях x и y векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, где:

а) $\vec{a} = \{x; -2; 5\}$; $\vec{b} = \{2; y; -8)$;

б) $\vec{a} = \{x;\ 2x;\ 1\}$; $\vec{b} = \{y;\ x^2;\ -4\}$.

34. Найти значение координаты *x,* при котором вектор $\vec{c} = (x;0;-2)$ раскладывается по векторам $\vec{a} = \{1;\ 3;\ 4\}$ и $\vec{b} = \{-2;\ 5;\ 6\}$.

35. Найти значение *y,* при котором вектор $\vec{a} = \{12;\ 3;\ -7)$ раскладывается по векторам $\vec{b} = \{3;\ y;\ -2\}$ и $\vec{c} = \{-2;\ 3;\ 1\}$.

36. Найти вектор, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{2;\ 1;\ -1\}$, длина которого равна 3.

37. Даны векторы $\vec{u} = \{2y - 2x^2;\ 2y;\ -2x^2\}$ и $\vec{v} = \left\{1 + 2y; -\frac{1}{2}y^2; \frac{1}{2}y\right\}$.

Найти те значения *x* и *y*, при которых эти векторы коллинеарны, но не равны.

38. Даны векторы $\vec{u} = \{a^2;\ -b;\ a^2 - b\}$, $\vec{v} = \{b;\ -b^2;\ 2 + 4b\}$. Найти все значения *a* и *b*, при которых эти векторы будут коллинеарны, но не равны.

39. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 4$; $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = \frac{2}{3}\pi$;

б) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$; $|\vec{b}| = 1$; $\widehat{\vec{a},\vec{b}} = \frac{\pi}{6}$;

в) $\vec{a} = \{3;\ -1;\ 5\}$; $\vec{b} = \{1;\ 2;\ -3)$;

г) $\vec{a} = \{5;\ 7;\ 4\}$; $\vec{b} = \{2;\ 3;\ -8\}$;

д) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$;

е) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, где $C\,(-1;\ 2;\ 0)$ и $D\,(2;\ 1;\ 3)$;

ж) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} - 2\vec{r}$; $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$, где $\vec{p} = \{3;\ 4;\ 2\}$, $\vec{q} = \{2;\ 3;\ 5\}$, $\vec{r} = \{-3;\ -2;\ -4)$;

з) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, где $A\,(-2;-3;\ 8)$; $B\,(2;\ 1;\ 7)$; $C\,(1;\ 4;\ 5)$; $D\,(-7;-4;\ 7)$.

40. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a} = \{3;\ 1;\ -2\}$, $\vec{b} = \{-2;\ 3;\ 4\}$;

б) $\vec{a} = \{-1;\ 2;\ -2\}$, $\vec{b} = \{-6;\ -3;\ 6)$;

в) $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$; $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, где $\vec{p} = \{4;\ -2;\ 4\}$, $\vec{q} = \{6;\ -3;\ 2\}$;

г) $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$, где $A\,(1;-2;\ 2)$, $B\,(1;4;0)$, $C\,(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$.

41. Вычислите внутренние углы треугольника *ABC,* где $A\,(1;\ 2;\ 1)$, $B\,(3;-1;\ 7)$, $C\,(7;\ 4;-2)$. Является ли этот треугольник равнобедренным?

42. Найти, при каком значении t векторы $\vec{p} = t \cdot \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{q} = \vec{i} + 2\vec{j} - t \cdot \vec{k}$ перпендикулярны (или ортогональны).

43. Векторы $\overrightarrow{AB}$ = {3; –2; 2} и $\overrightarrow{BC}$ = {–1; 0; –2} являются смежными сторонами параллелограмма. Найти косинус угла между его диагоналями.

44. Известны вершины треугольника ABC: A (2; –3; 0), B (2; –1; 1), C (0; 1; 4). Найти угол между медианой BD и основанием AC.

45. При каком значении α векторы $\vec{a}$ = (1; α; –2} и $\vec{b}$ = {α; 3; –4) ортогональны?

46. При каких x и y векторы $\vec{a}$ = {2; x; 2} и $\vec{b}$ = {1; –2; y} перпендикулярны и имеют равные длины?

47. Вектор $\vec{c}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ = {2; –1; –3}, а вектор $\vec{a}$ перпендикулярен (ортогонален) вектору $\vec{c}$ + $2\vec{b}$, где $\vec{b}$ = {–l; 0; 4}. Найти вектор $\vec{c}$.

48. Вектор $\vec{a}$ = {x; 1; 2} ортогонален вектору $\vec{b}$ = {2; y; –4}, а длина вектора $\vec{b}$ в два раза больше длины вектора $\vec{a}$. Найти x и y.

49. Даны векторы $\vec{a}$ = {2; –1; –1} и $\vec{b}$ = {3; –4; –2}. Найти вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ и такой, что вектор $\vec{c} - \vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{a}$.

50. Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$ = {2; 1; –1} и удовлетворяющий условию ($\vec{b}$, $\vec{c}$) = 3, где $\vec{c}$ = {1; 1; –3}.

51. Даны векторы $\vec{a}$ = {3; –1; 5} и $\vec{b}$ = {1; 2; –3}. Найти вектор $\vec{c}$, если известно, что он перпендикулярен вектору $\vec{k}$ и скалярные произведения ($\vec{a}$, $\vec{c}$) = 9 и ($\vec{b}$, $\vec{c}$) = –4.

Введя подходящим образом систему координат, решите следующие задачи.

52. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC = 8$, $AC = 12$) точка E делит боковую сторону AB в отношении $BE : EA = 3 : 1$. Найти угол между CE и CA.

53. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Найти угол между диагональю куба AC' и диагональю грани $D'C$.

54. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ Длины ребер АЯ = 2, $BC = 3$, $AA' = 4$. Найти угол между диагоналями боковых граней AB' и BC'.

ОТВЕТЫ

Тема I

1. а) 70°; б) 164°;
2. 45°; 135°.
3. а) 49°; б) 80°.
4. $\angle A = 30°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 90°$.
5. 80°; 80°; 20° или 80°; 50°; 50°.
6. 30°, 60°, 90°.
7. 10°, 140°.
8. 60°, 75°, 45°.
9. 20°, 40°, 120°.
10. 48°, 72°, 60°.
11. 30°, 60°, 90°.
12. а) 40°; б) 12,5°.
13. а) 20°; б) 35°.
14. 16°.
15. 50°, 110°, 20°.
16. 70°.
17. а) 28 см; б) 98 см; в) 12 см; г) 18 см.
18. а) 16 см; б) 60 см; в) 60 см.
19. а) 25 см; б) 21 см.
20. 10 м.
21. 10 см; 10 см; 1 см.
22. 40.
23. а) $AB = 10$; б) $AC = \sqrt{351}$.
24. 1) а) 13 см, б) 10 см; 2) а) 8 см; б) 5 см.
25. а) $4\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$.
26. а) $AB = 25$ см; $AC = 15$ см; $BC = 20$ см; б) $AB = 21$ см.
27. а) 27; 36; б) 486.
28. 3360.
29. б) 28; 35; 21.
30. $\sin\angle A = \frac{12}{13}$; $\sin\angle B = \frac{5}{13}$; $\cos\angle A = \frac{5}{13}$; $\cos\angle B = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\angle A = \frac{12}{5}$; $\operatorname{tg}\angle B = \frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\angle A = \frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\angle B = \frac{12}{5}$.
31. $\sin\angle A = \frac{24}{25}$; $\sin\angle C = \frac{7}{25}$; $\cos\angle A = \frac{7}{25}$; $\cos\angle C = \frac{24}{25}$; $\operatorname{tg}\angle A = \frac{24}{7}$; $\operatorname{tg}\angle C = \frac{7}{24}$; $\operatorname{ctg}\angle A = \frac{7}{24}$; $\operatorname{ctg}\angle C = \frac{24}{7}$.
32. $12\sqrt{3}$; 12; 24.
33. 4; $4\sqrt{3}$; 8.
34. $\frac{\sqrt{10}}{3}$.
35. 15 см.
36. 744 см.
37. 20.
38. 10.
39. $\frac{25}{13}$, $\frac{144}{13}$.
40. 45.
41. 28,8.
42. $\sqrt{12}$ см.
43. $\frac{27}{4}$.
44. 2 см.
45. 4 см.
46. 8.
47. $\frac{ah}{\sqrt{4h^2 + a^2}}$.
48. 8 или 2.
49. 24 см.
50. 75 см^2.
51. 12 см.
52. а) 6 см; б) 8 см или 18 см; в) 12 см.
53. 10.
54. 30°.
55. $6 + 2\sqrt{5}$ см; 4 см^2.
56. 78 см^2.
57. а) $b_c = 3$; $h_c = \sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{3}$; $a = 2$; б) $c = 8$; $h_c = 2\sqrt{3}$; $b = 4$; $a = 4\sqrt{3}$.
58. 12; $\frac{60}{13}$; $\frac{25}{13}$; $\frac{144}{13}$.
59. $\frac{169}{12}$; $\frac{65}{12}$; 12; $\frac{25}{12}$.
60. Катеты: $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$; отрезки гипотенузы 1; 4.
61. 202,8.
62. 1.

63. 5 см, 12 см, 30 см^2.
64. 24.
65. 5 и 12.
66. 36.
67. 24 см.
68. $8\sqrt{10}$ см, $9\sqrt{5}$ см.
69. 240.
70. 7,2 см.
71. а) Да; б) нет; в) нет.
72. а) Нет; б) да.
73. 10 см.
74. а) 0, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$;
б) $\frac{71}{104}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{25}{52}$;
в) $\frac{31}{32}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{9}{16}$.
75. а) 12; б) 4.
76. 20.
77. 30°.
78. $8+12\sqrt{2}+4\sqrt{6}$;
$12+4\sqrt{2}+4\sqrt{3}$;
$4\sqrt{6}+8\sqrt{3}-4\sqrt{2}$.
79. а) Тупоугольный;
б) прямоугольный;
в) треугольника не существует;
г) остроугольный;
д) тупоугольный.
80. 1 см.
81. 36 см.
82. $9+3\sqrt{3}$ см.
83. $4\sqrt{2}+4$ см.
84. 16; $\sqrt{113}$; $\sqrt{113}$.
85. 48 см; $3\sqrt{113}$ см; $3\sqrt{113}$ см.
86. 4,8 см; 4,8 см; 3 см.
87. 9,5 см.
88. $\sqrt{185}$.
89. $\frac{3\sqrt{11}-\sqrt{3}}{4}$.
90. $\sqrt{33}$.
91. 13.
92. 2 и $4\sqrt{3}$.
93. $8\sqrt{2}$.
94. 13.
95. $\frac{\sqrt{6}}{3}a(1+\sqrt{3})$.
96. 6.
97. 12,5 м.
98. $\frac{15}{8}$.
99. 10.
100. $\sqrt{13}$.
101. а) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$;
б)
$$\frac{4\sqrt{2}\sqrt{41-10\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}}{4\sqrt{2}+5};$$
$$\frac{5\sqrt{41-10\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}}{4\sqrt{2}+5}.$$
102. 3,5.
103. $\sqrt{13-2\sqrt{11}}$ см.

Тема II

1. а) 84; б) 30.
2. а) 8 см; б) $\frac{8}{5}\sqrt{26}$ см.
3. $\sqrt{2}$ см; $\sqrt{3}$ см;
$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ см;
$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+1)$ см^2.
4. $\sqrt{29}$ или $\sqrt{5}$.
5. а) $2\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3}$;
в) $2\sqrt{3}$; г) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; д) 2;
е) $\sqrt{7}$; ж) $\sqrt{3}$; з) $\sqrt{3}$;
и) 4:1.
6. а) 6; б) $\frac{12}{5}$;
в) $AF=\frac{3\sqrt{5}}{2}; BE=\frac{12\sqrt{2}}{7}$;
г) $BP=\frac{5}{2}; CQ=\frac{\sqrt{73}}{2}$.
7. а) 3 : 1; б) $\sqrt{3}:1$.
8. а) 84; б) 11,2; в) $\frac{5}{13}$;
г) $\frac{\sqrt{505}}{2}$.
9. а) 8; б) $\frac{\sqrt{15}}{8}$;
в) $3\sqrt{15}$; г) $\sqrt{46}$;
д) $\frac{12\sqrt{15}}{7}$.

10. $10\sqrt{2}$.

11. $\frac{32}{3}$ см.

12. 84 см^2, если треугольник остроугольный; 24 см^2, если тупоугольный.

13. 25 м^2.

14. 12 см.

15. 12 см.

16. $11 + \sqrt{109}$ см.

17. 28 см.

18. 4 см; 5 см; 6 см.

19. 150.

20. 7 : 3.

21. 9 : 35.

22. 99:47.

23. 36:41.

24. 5 см и 4 см.

25. 10,5 см и 37,5 см.

26. 2 : 1.

27. $\frac{BQ}{QE} = \frac{6}{5}$; $\frac{AQ}{QD} = \frac{7}{4}$.

28. $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{9}$; $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{25}$.

29. $\frac{1}{7}$.

30. 2 : 1.

31. 3 : 4.

32. 7 : 5.

33. 4 : 3.

34. 1 : 1.

35. 21 : 5.

36. 1 : 4.

37. 8 : 15.

38. 2 : 1 : 3.

39. 5 : 3 : 2.

40. 3 : 5.

41. 28 : 5.

42 а) 5; б) $\frac{20}{3}$; в) 3,6.

43. 5 : 6.

44. 12 : 5.

45. 1 : 3.

46. 1 : 7.

47. $\sqrt{13+6\sqrt{2}}$ см.

48. $2\sqrt{7}$ см.

49. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$.

50. $\frac{12}{7}$.

51. 3,75; 10; 11,25.

52. $12\sqrt{5}$.

53. 7,5.

54. $\frac{18\sqrt{15}}{5}$.

55. $\frac{15\sqrt{7}}{16}$.

56. $\frac{7}{9}$.

57. $\frac{3\sqrt{31}}{7}$ и $\frac{4\sqrt{31}}{7}$.

58. 20 см.

59. а) $\frac{195}{17}$ см; б) $\frac{140}{17}$ см.

60. 113,6 см; 134,4 см; 168 см.

61. 0,8 м; 1 м; 1,2 м.

62. 10; 25; 20.

63. B_1C_1=14 м; AC=4 м.

64. AC=3 м; A_1C_1=1,2 м.

65. $\frac{ah}{a+h}$.

66. 1 : 3.

67. 6 м; 4 м; 6 м.

68. а) $\frac{10}{7}\sqrt{193}$ см или $\frac{5}{6}\sqrt{193}$ см; б) $4\sqrt{193}$ см; в) $\sqrt{\frac{193}{2}}$ см.

69. 50 см^2.

70. 1:3:5.

71. $1:\sqrt{2}-1:\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

72. $\frac{6a}{7}$; $\frac{2a}{7}$.

73. 1 : 9.

74. 5 : 1.

75. 25.

76. $\frac{24}{5}$.

77. $2\sqrt{6}$.

78. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Тема III

1. а) 16; б) $4\sqrt{2}$; в) $\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

2. 8 м^2.

3. Увеличится в 9 раз.

4. Уменьшится в 9 раз; в 3 раза.

5. а) 32; б) $4\sqrt{5}$;
в) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; г) $\frac{4}{5}$.
6. Уменьшится на 25%.
7. 16 м.
8. 12 дм; 25 дм.
9. 8 м; 18 м.
10. $50\sqrt{13}$ см.
11. 6.
12. 3.
13. 66 см.
14. 1 : 3.
15. $a/2$.
16. $2\sqrt{2}(\sqrt{3}\pm 1)$.
17. $\frac{159}{32}$ м^2.
18. а) 32 м^2;
б) $8\sqrt{2-\sqrt{3}}$ м;
$\frac{8}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ м.
19. 200 м^2.
20. 84 м^2.
21. 24 см^2.
22. 1 : 1.
23. 16,8.
24. 150 см^2.
25. $8\sqrt{2}$ см^2.
26. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см.
27. 60°; 120°.
28. 150°.
29. 14 м; 18 м.
30. 20.
31. 30.
32. 56 м.
33. 12,8 м; 6,4 м.
34. 5.
35. 5.
36. 10 и 14 см.
37. 1/2.
38. 100 см^2.
39. 2.
40. 52.
41. $\sqrt{321}$ см.
42. 8 см^2.
43. $\sqrt{105}$ см.
44. $\sqrt{19}$ см.
45. 30 и 15 см.
46. 4.
47. 3; 2; 3.
48. a и $a+b$.
49. 39.
50. 29.
51. 4,32.
52. 8 : 3.
53. 12.
54. 5.
55. 600.
56. $3\sqrt{3}$.
57. $\frac{100}{3}$ и 20.
58. $\frac{2ab}{a+b}$.
59. $\frac{3a+b}{a+3b}$.
60. 4 и 12 см.
61. 10.
62. 9.
63. 16 см^2.
64. 6 или 8.
65. 80 см^2.
66. 256 см^2.
67. 144.
68. 50/3.
69. 2.
70. $682\frac{2}{3}$ см^2.
71. $7\sqrt{95}$ см^2.
72. $2\sqrt{3}$ см^2.
73. 9 см.
74. $3ab/4$.
75. 2.
76. 3/2.
77. 11 : 5.
78. 49 : 53.
79. 13.
80. 4/5.
81. 1/7.
82. 6.
83. 1.
84. 3.
85. $10\sqrt{3}$.
86. 6.
87. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.
88. $11\sqrt{2}$.
89. а) 3 : 5; б) 8 : 3.
90. 1 м.
91. 1 м.
92. 120°.
93. 27°.
94. а) 120°; б) 144°.

Тема IV

1. 60°, 30° или 140°, 110°.
2. 101° или 36°.

3. 36°, 48°, 96°.
4. а) 4; б) 12.
5. а) 20π м; б) 70π см.
6. а) $\frac{1}{2\pi}$ м; б) 12,5 см.
7. ≈36,2 см.
8. 4π.
9. $8/\pi$.
10. а) $\frac{\pi k}{3}$; б) $\frac{\pi k}{2\sqrt{2}}$; в) $\frac{2\pi k}{3\sqrt{3}}$.
11. а) $\frac{3l}{\pi}$; б) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi}$; в) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$.
12. 25 см.
13. $25/\pi$.
14. а) 100π м^2;
б) 16π дм^2.
15. а) $\sqrt{2}$ см; б) $5\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ м.
16. 25π см^2.
17. а) $\frac{16}{\pi}$ см^2;
б) $6\sqrt{2\pi}$ см.
18. а) 9π; б) 6π.
19. а) $9\pi - 18$;
б) $6\pi - 9\sqrt{3}$.
20. 16 см.
21. 12 и 20 см.
22. $\sqrt{5}$
23. 45°.
24. 1 : 2.
25. 80, 60 и 40°.
26. 12 см.
27. 4 см.
28. 30 см.
29. 2.
30. 10 см.
31. 16 см.
32. 6.
33. 8.
34. 2 и 4.
35. 60 и 120°.
36. 30 и 60°.
37. 0.
38. $2\sqrt{6}$.
39. 2/3.
40. 2 см.
41. $\frac{120}{\sqrt{61}}$ м.
42. $\frac{22}{\sqrt{35}}$ м.
43. $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ см^2.
44. $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{12}$ м^2.
45. $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$ м^2.
46. $\frac{\pi R^2}{6}$.
47. $\frac{2}{3}$.
48. 3.
49. 6 см.
50. 34π.
51. 21 и 28 см.
52. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$.
53. 1 и 4.
54. 2.
55. 5.
56. $2\sqrt{Rr}$.
57. $\sqrt{2Rr}$.
58. 48 и 30 см.
59. 8.
60. 4.
61. $\frac{10(7-2\sqrt{10})}{9}$.
62. $\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha/2}{1+\sin\alpha/2}}+1\right)^2$.
63. 4 см.
64. q^2/p.
65. 4.
66. 128/5.
67. $\sqrt{25+14\sqrt{3}}$.
68. 9.

Тема V

1. а) $10\sqrt{3}$ см; б) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см.
2. 1) а) $r=\sqrt{3}$; $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$; $d=\frac{7}{3}$; б) $r=\frac{\sqrt{66}}{2}$; $R=\frac{325}{4\sqrt{66}}$; $d=\frac{19825}{1056}$;
2) а) $2\sqrt{3}\pi$; $\frac{14\sqrt{3}}{3}\pi$;

б) $\sqrt{66}\pi$; $\frac{325}{2\sqrt{66}}\pi$;

3) а) 3π; $\frac{7}{3}\pi$;

б) $\frac{33}{2}\pi$; $\frac{105625}{1056}\pi$.

3. $R = 29$ см; $r = 12$ см; $d = \sqrt{145}$ см.

4. 40 см; 42 см.

5. а) вне треугольника; б) внутри треугольника; в) на стороне треугольника.

6. а) $\angle A = 67°$; $\angle B = 23°$; $\angle C = 90°$; б) $\angle A = 55°$; $\angle B = 35°$; $\angle C = 90°$.

7. а) $\angle A = 51°$; $\angle B = \angle C = 64{,}5°$; б) $\angle A = 129°$; $\angle B = \angle C = 25{,}5°$.

8. а) 5; б) $5\sqrt{2}$.

9. $\frac{25}{4}(3+\sqrt{3})$.

10. 85/8.

11. 24.

12. 16.

13. 5.

14. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

15. 21 и 4 см.

16. 4 и 3 см.

17. 16 см.

18. 150.

19. 1.

20. $\frac{6\pi}{91}$.

21. 4,2.

22. $\frac{5}{2}a$; $\frac{13}{2}a$; $\frac{25}{4}a^2$.

23. $\sqrt{8\operatorname{tg}\alpha}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

24. 12.

25. $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; $\operatorname{arcctg}\frac{5}{12}$.

26. 3.

27. 10.

28. $\frac{1}{2}$.

29. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

30. $\sqrt{\frac{333-45\sqrt{37}}{8}}$; $\sqrt{\frac{333-45\sqrt{37}}{2\sqrt{6}}}$.

31. $2\sqrt{6}$.

32. 2/3.

33. $3\sqrt{2}$.

34. $\sqrt{5}$.

35. $\frac{135}{13}$.

36. 4.

37. $\frac{50(2\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}$.

38. 3.

39. $\frac{84}{20}$.

40. 3 и 6.

41. 10 и 8 см.

42. 3/2.

43. $\frac{7}{6}\pi-\sqrt{3}-1$.

44. $\frac{108}{11}\sqrt{15}$.

45. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

46. 8.

47. 230,4.

48. 3.

49. sin 55°:sin40°:sin85°.

50. 6(tg10° + tg20°).

51. $3\sqrt{3}$.

Тема VI

1. $8\sqrt{2}\pi$.

2. 192.

3. 30 см.

4. 60 см^2.

5. 15 см.

6. 5.

7. 9 см, 12 см, 15 см, 12 см.

8. 5.

9. $\frac{4\sqrt{5}}{5}R$.

10. $\sqrt{\frac{2}{3}}a$.

11. 2 см и 14 см.

12. 1 см и 4 см.

13. 80.

14. 150.

15. $432\sqrt{3}$.

16. 25 см и 9 см.

17. $\sqrt{2S}$.

18. 1.

19. 24.
20. $42\sqrt{6}$ м^2.
21. 98π м^2.
22. $\dfrac{\pi\sin\alpha}{4}$.
23. 10.
24. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.
25. $\arccos(\sqrt{5}-2)$.
26. $\arcsin\dfrac{2R^2}{S-2R^2}$.
27. 1,6.
28. 10 см.
29. $\dfrac{5\sqrt{14}}{42}$.
30. $\dfrac{18\sqrt{5}}{5}$.
31. $32\sqrt{2}$.
32. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
33. 2.
34. 16.
35. $4+2\sqrt{7}$.
36. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.
37. $\dfrac{10}{11}$.
38. 7/6.
39. 72. Можно. Нельзя.
40. 5.
41. $\dfrac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.
42. 55.
43. $\dfrac{1}{6}(3\pm\sqrt{3})$, $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.
44. 1 м.
45. $\dfrac{a(a-b+d)}{a-b}\sqrt{bd}$.
46. $\dfrac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$.
47. $\sqrt{a^2-ab}$.
48. $\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi-\beta}{4}:1$.
49. $c\sin^2\alpha\sqrt{4R^2-c^2}$.
50. 30π см^2.
51. $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.
52. 30π.
53. 75.
54. 8 см.
55. 16 дм.
56. $\dfrac{Q\sqrt{3}}{2}$.

Тема VII

1. а) $\{-4; 3\}$, 5;
б) $\{3; 2\}$, $\sqrt{13}$;
в) $\{-2;-2;-2)$, $2\sqrt{3}$;
г) $\{5; -2; 1\}$, $\sqrt{30}$.
2. а) $\{3; 0; -6\}$, $3\sqrt{5}$;
б) $\{9; -15; 3\}$, $\sqrt{315}$;
в) $\{9; -10; -4)$, $\sqrt{197}$;
г) $\{-5; 5; 3)$, $\sqrt{59}$.
3. а) (4; –2; 5);
б) (1; –1; –2);
в) (3; 0,5; 3,5);
г) (1; 5,5; –2,5);
д) $\left(1;-\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{4}\right)$;
е) (–4; 0; –4) или (8; –3; 5).
4. $\sqrt{33}$ и $\sqrt{113}$.
5. $\sqrt{19}$.
6. $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{20}{3}\right)$.
7. (3; 8; 7).
8. $\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.
9. $\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{7}{8};\dfrac{5}{8}\right)$.
10. $\left(\dfrac{27}{10};\dfrac{27}{10};\dfrac{2}{5}\right)$.
11. (4; 0).
12. (–10; 0; 0) или (–6; 0; 0).
13. $\vec{a}=-3\vec{p}+2\vec{q}$.
14. $\vec{c}=\dfrac{3}{17}\vec{a}+\dfrac{25}{17}\vec{b}$.
15. $\vec{d}+3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$.
16. $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$.
17. $\overrightarrow{AO}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.
18. $\overrightarrow{CO}=-4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OA}$.
19.
$\vec{d}=\dfrac{38}{119}\vec{a}+\dfrac{71}{357}\vec{b}+\dfrac{53}{119}\vec{c}$.

20. $\overrightarrow{OD}=\frac{3}{19}\overrightarrow{OA}-$

$-\frac{1}{19}\overrightarrow{OB}+\frac{25}{76}\overrightarrow{OC}.$

21. $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=$

$=\{4;\,4;\,2\}.$

22. $\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{OA}$.

23. $\overrightarrow{MN}=\frac{49}{13}\overrightarrow{PQ}.$

24. $\vec{a}=-1{,}5\vec{b}-3\vec{c}$.

25. $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2\sqrt{3}}$

26. $\vec{a}=\frac{12}{7}\vec{c}-\frac{4}{7}\vec{b}.$

27. $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\vec{p}+\frac{6}{5}\vec{q}.$

28. $\overrightarrow{BD}=2\vec{b}-2\vec{a}.$

29. $\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{A_1A_5}+(1+$

$+2\cos 72°)\overrightarrow{A_1A_2}.$

30. $\{12;\,6\}$ и $\{-12;-6\}$.

31. $\{-\sqrt{6};\,2\}$ и

$\{-\sqrt{6};-2\}$.

32. а) $-\frac{2}{3}$; б) 0;

в) –1 или 4.

33. а) $x=-\frac{5}{4}$; $y=\frac{16}{5}$;

б) $x=-8$; $y=32$.

34. –11.

35. 6.

36. $\left\{\sqrt{6};\sqrt{\frac{3}{2}};-\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

или

$\left\{-\sqrt{6};-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.

37. {(1; –2),(–1;–2), (1;–1), (–1; –1), (0;0)}.

38. {(l;–2),(l;–l),(–l;–2), (–l;–l), (0;0)}.

39. а) –6; б) $\frac{3}{2}$; в) –14; г) –1; д) 12; е) 2; ж) –41; з) –66.

40. а) $-\frac{11}{\sqrt{406}}$; б) $-\frac{4}{9}$; в) $\frac{-23}{3\sqrt{86}}$; г) 0.

41. $\arccos\left(-\frac{12}{49}\right)$;

$\arccos\left(-\frac{61}{7\sqrt{122}}\right)$;

$\arccos\left(\frac{61}{7\sqrt{122}}\right)$;

является.

42. –6.

43. π/4.

44. π/4.

45. –2.

46. $x=-1$; $y=-2$.

47. {4; –2; –6).

48. $x=2$; $y=4$.

49. (4; –2; –2).

50. $\left\{1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$.

51. {2; –3; 0}.

52. $\arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

53. π/2.

54. $\arccos\frac{8\sqrt{5}}{25}$.

Олег Викторович Нагорнов,
Алексей Викторович Баскаков,
Ольга Борисовна Баскакова,
Наталья Витальевна Серебрякова

ПОСОБИЕ

ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть I. Планиметрия. Векторы

В помощь учащимся
10–11-х классов

Редактор *Е. Н. Кочубей*
Макет подготовлен *Е. Н. Кочубей*

Подписано в печать 29.07.2009. Формат 60×84 1/16.
Изд. № 077-1. П.л. 9,5. Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 4500 экз. Заказ №
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ. 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

МИФИ – базовое высшее учебное заведение России, предназначенное для подготовки инженеров: физиков, математиков, системотехников – инженеров-исследователей, обладающих глубокими знаниями физико-математических дисциплин в сочетании с серьезной инженерной подготовкой.

ФАКУЛЬТЕТЫ	***телефон***
Факультет экспериментальной и теоретической физики (Т)	8(495)324-84-40
Физико-технический факультет (Ф)	8(495)324-84-41
Факультет автоматики и электроники (А)	8(495)324-84-42
Факультет кибернетики (К)	8(495)324-84-46
Факультет информационной безопасности (Б)	8(495)324-84-00
Гуманитарный факультет (Г):	8(495)323-90-62
- Институт международных отношений	8(495)323-95-83
- Финансовый институт	8(495)324-03-78
- Институт инновационного менеджмента	8(495)323-90-88
- Экономико-аналитический институт	8(495)323-92-15
- Институт финансовой и экономической безопасности	8(495)323-95-27

ПРИЕМНАЯ КОМИССИЯ 8(495)324-84-17; 8(495)323-95-12

Адрес МИФИ: *115409, г. Москва, Каширское ш., д.31*

По вопросам повышения квалификации учителей физики, математики и информатики, а также по работе МИФИ со школами в регионах РФ обращаться в **Центр повышения квалификации и переподготовки кадров** по тел.: ***8(495)324-05-08, 8(499)725-24-60*.**