МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.А. Прокофьев

Пособие по геометрии для подготовительных курсов

(стереометрия)

Москва 2004

УДК 514(075)

Рецензенты: *д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики МИЭТ Кожухов И. Б.*, *учитель математики школы №853 г. Зеленограда Фадеичева Т. П.*

Прокофьев А.А.

Пособие по геометрии для подготовительных курсов (стереометрия). – М.: МИЭТ, 2004, 240 стр.

Пособие содержит необходимые теоретические сведения, примеры решения типовых задач и большое количество задач для самостоятельного решения. Задачи, собранные под одним заголовком, как правило, расположены в порядке возрастающей трудности. В начале каждого пункта расположены основные типовые и опорные задачи. В пособии содержатся задачи разных уровней сложности. Многие из них взяты из вариантов вступительных экзаменов в различные вузы (МГУ, МФТИ, МИЭТ и др.) для того, чтобы учащиеся могли оценить уровень своих знаний и степень подготовки к сдаче вступительного экзамена. Пособие будет полезно школьникам старших классов, учителям средних школ, а также тем, кто готовится к поступлению в высшие учебные заведения.

Прокофьев Александр Александрович

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для слушателей подготовительных курсов, а также для школьников, готовящихся к поступлению в высшие учебные заведения, и призвано в интенсивной форме организовать повторение стереометрии, сосредоточить главные усилия учащихся на узловых вопросах программы, познакомить с характером и уровнем требований, предъявляемых к поступающим в Вузы.

Пособие написано в соответствии с программой по геометрии для поступающих в Вузы. В теоретической части определяются понятия, формулируются основные факты и теоремы, которые выпускник должен знать по этому разделу, а также даются примеры основных приемов решения задач. Во второй части содержится большое количество задач для аудиторной и самостоятельной работы. Вторая часть пособия содержит 10 параграфов. Внутри каждого параграфа задачи близкие по теме объединяются общим заголовком, а задачи близкие по содержанию или методу решения объединены одним номером. Задачи, собранные под одним заголовком, как правило, расположены в порядке возрастающей трудности, причем основные типовые и опорные задачи расположены в начале каждого пункта.

Читателю рекомендуются уделить внимание задачам на построение, поскольку задачи этого типа в большей мере способствуют развитию пространственного воображения и усвоению большинства идей и методов геометрии в пространстве. Задач на доказательство в пособии существенно меньше, чем задач на вычисление, но их выполнение также очень полезно, поскольку они отражают те или иные основные свойства фигур, знание которых будет полезно при решении задач на вычисление.

Ко всем задачам пособия даны ответы, а к некоторым еще и указания. В теоретической части при решении задач и проведении доказательств использованы значки:

□ – указывает на начало решения или доказательства;

�– указывает на завершение решения или доказательства.

Автор выражает благодарность Кожухову И.Б. и Фадеичевой Т.П. за то, что они взяли на себя труд по прочтению рукописи, и полученные от них ценные советы.

Автор надеется, что данное пособие окажет существенную помощь абитуриентам при подготовке к вступительным экзаменам.

Желаю успеха!

ГЛАВА 1. Введение в стереометрию

§1.1. Основные понятия

Стереометрия – раздел геометрии, изучающий свойства тел и фигур, взаимное положение линий, плоскостей, поверхностей и тел в трехмерном пространстве.

Основными неопределяемыми понятиями в стереометрии являются: ***точка***, ***прямая*** и ***плоскость***. Точки обозначают прописными буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$; прямые – либо двумя прописными буквами латинского алфавита $AB, MN, \ldots$ либо строчными буквами $a, b, c, \ldots$; плоскости – либо тремя прописными буквами латинского алфавита ABC, MNP, $\ldots$ либо буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Плоскости на рисунках изображают в виде параллелограмма или в виде произвольной области (см. рис. 1а и 1б), прямые изображаются так же, как в планиметрии.

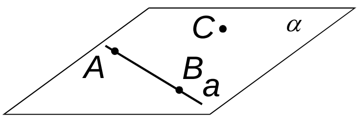


Рис. 1а

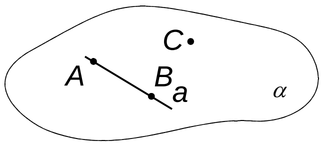


Рис. 1б

Фигурой называется всякое множество точек, прямых и плоскостей в пространстве. В свою очередь, прямая, плоскость – множества точек. ***Пространство*** – множество всех точек.

Геометрическая фигура называется ***пространственной***, если не все точки ее лежат в одной плоскости. Примером пространственной фигуры может служить геометрическое ***тело*** – часть пространства, занимаемая предметом. Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства ***поверхностью***.

Две геометрические фигуры называются ***равными***, если их можно совместить так, чтобы они совпали всеми своими частями. Предполагается, что при перемещении в пространстве геометрические фигуры не изменяются.

В геометрических предложениях такие слова, как ***«лежать», «принадлежать», «совпадать», «проходить», «пересекать», «параллельны», «перпендикулярны»*** выражают отношения между точками, прямыми и плоскостями. Обычно используют обозначения:

$\in$ – ***знак принадлежности***. Так, запись $A \in a$ (или $A \in \alpha$) означает, что точка A принадлежит прямой a (или плоскости α).

$\subset$ – ***знак включения***. Так, запись $a \subset \alpha$ означает, что множество точек прямой a включается во множество точек плоскости α.

$\cap$ – ***знак пересечения***. Например, запись $\alpha \cap \beta$ означает пересечение плоскостей α и β. Оно может равняться пустому множеству, если плоскости α и β не пересекаются.

$\equiv$ – ***знак совпадения*** (тождества). Например, запись $a \equiv b$ означает, что прямые a и b совпадают, а запись $a \cap b \equiv A$ означает, что прямые a и b пересекаются в точке A.

§1.2. Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом

В стереометрии, так же, как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем. Некоторые свойства фигур не подлежат доказательству и принимаются в качестве исходных. Этого требует введение нового геометрического объекта – плоскости. Так как в разных школах при изучении геометрии в основном используются учебники А. В. Погорелова «Геометрия 7 - 11» или Л. С. Атанасяна «Геометрия 10 - 11», приведем формулировку аксиом, используемых названными авторами.

Аксиоматика А. В. Погорелова

Основные свойства плоскостей выражаются аксиомами:

1. ***Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.***
2. ***Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.***
3. ***Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.***

Замечание. В приведенных аксиомах, выражающих свойства плоскостей, ничего не говорится о существовании плоскостей. Предполагается, что в пространстве бесконечно много различных плоскостей, и в любой плоскости выполнены все аксиомы планиметрии. Однако, планиметрические аксиомы ($1'$ и $2'$) о прямых в стереометрии имеют более широкий смысл – в них говорится о прямых и точках пространства.

$1'$. ***Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.***

$2'$. ***Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.***

Из этих аксиом вытекают следствия:

1. ***Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.***

2. ***Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.***

В этом случае говорят, что ***прямая лежит в плоскости*** или ***плоскость проходит через прямую***. Из этой аксиомы следует, что плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.

3. ***Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.***

4. ***Плоскость разбивает пространство на два полупространства. Если точки X и Y принадлежат одному полупространству, то отрезок XY не пересекает плоскость. Если же точки X и Y принадлежат разным полупространствам, то отрезок XY пересекает плоскость.***

Задача 1. Даны три различные попарно пересекающиеся плоскости α, β, γ. Докажите, если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.

Доказательство. □ Пусть (см. рис. 2) $\alpha \cap \beta \equiv a$, $\beta \cap \gamma \equiv b$, $\alpha \cap \gamma \equiv c$ и $a \cap b \equiv A$. Докажем, что $A \in c$.

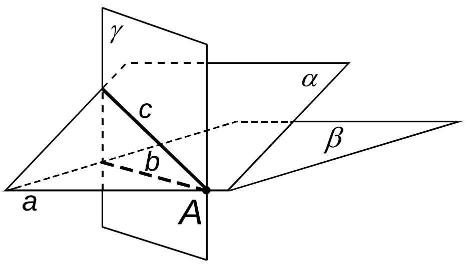


Рис. 2

Поскольку $A \in a$ и $A \in b$, то точка A принадлежит всем трем плоскостям α, β, γ. Тогда по аксиоме 2 плоскости α и γ имеют общую точку, следовательно, они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Но по условию $\alpha \cap \gamma \equiv c$. Значит, $A \in c$. �

Аксиоматика Л. С. Атанасяна

Основные свойства плоскостей выражаются следующими аксиомами:

1. ***Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну.***

2. ***Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.***

В этом случае говорят, что *плоскости пересекаются по прямой*.

3. ***Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости***.

Из этих аксиом вытекают следствия:

1. ***Через прямую и точку, лежащую вне этой прямой, можно провести плоскость и притом только одну.***

2. ***Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.***

3. ***Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.***

4. ***Через любую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей.***

Как видно из двух приведенных аксиоматик и следствий из аксиом, плоскость задается однозначно следующим набором элементов:

а) даны три точки, не лежащие на одной прямой (см. рис. 3а);

б) дана прямая и не принадлежащая ей точка (см. рис. 3б);

в) даны две пересекающиеся прямые (см. рис. 3в).

Кроме этого, как будет видно из дальнейшего, две параллельные прямые в пространстве однозначно задают плоскость (см. рис. 3г).

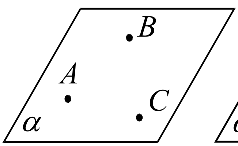


Рис. 3а

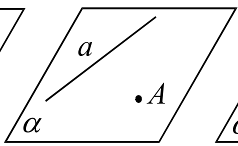


Рис. 3б

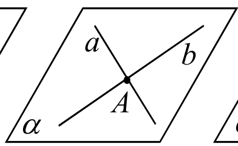


Рис. 3в

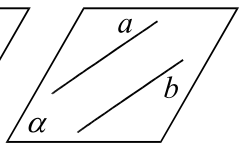


Рис. 3г

ГЛАВА 2. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

§2.1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве либо лежат в одной плоскости, либо нет. Прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие общую точку, называются ***пересекающимися.***

Две прямые в пространстве называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Теорема 1. (Пространственная теорема о параллельных прямых). ***Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.***

Теорема 2. (Признак параллельности прямых). ***Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу или совпадают.***

Доказательство. □ Пусть прямые b и c такие, что $b \parallel a$, $c \parallel a$ (см. рис. 1). Докажем, что $b \parallel c$.

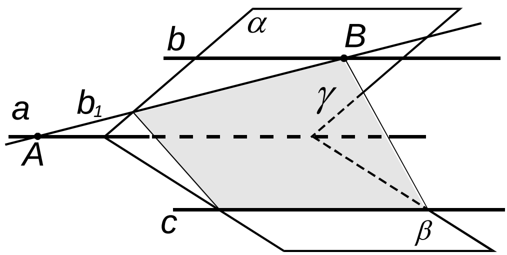


Рис. 1

Случай, когда прямые a, b и c лежат в одной плоскости, рассматривался в планиметрии. Поэтому рассмотрим случай, когда они не лежат в одной плоскости. Будем считать также, что прямые a, b и c различны.

Пусть плоскости α и β таковы, что $b \subset \alpha$, $a \subset \alpha$, а $c \subset \beta$, $a \subset \beta$. Плоскости α и β различны. Выберем на прямой b точку B и проведем плоскость γ через прямую c и точку B. Она пересечет плоскость α по прямой b_1. Допустим, что b_1 пересекает прямую a в точке A. В этом случае $\alpha \cap \gamma \equiv b_1$, $\alpha \cap \beta \equiv a$, $\beta \cap \gamma \equiv c$ и $a \cap b_1 \equiv A$, следовательно $A \in c$ (см. задачу 1 главы 1), т. е. прямая c не параллельна прямой a, что противоречит условию теоремы. Значит, b_1 не пересекает a, но тогда $b_1 \parallel a$ и, следовательно,

$b_1 \equiv b$ (по предыдущей теореме). Получаем, что прямая b лежит в одной плоскости γ с прямой c и не пересекает ее, значит $b \parallel c$. �

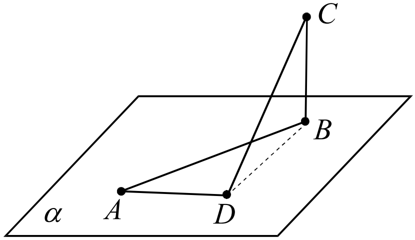


Рис. 2

Пусть точки A, B, C, D (см. рис. 2) не лежат в одной плоскости. Фигура, образованная отрезками AB, BC, DC и AD, ***называется пространственным четырехугольником***.

Замечание. Точки A, B, C и D, в общем случае, задают несколько различных пространственных четырехугольников. Поэтому кроме вершин необходимо указывать и отрезки, являющиеся сторонами пространственного четырехугольника.

Справедливы следующие утверждения (докажите их самостоятельно):

1. ***Середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма***.

2. ***Два отрезка, соединяющие середины противоположных сторон пространственного четырехугольника, и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам***.

Две прямые в пространстве, не лежащие в одной плоскости, называются ***скрещивающимися*** (см. рис. 3).

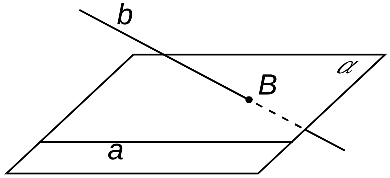


Рис. 3

Теорема 3 (признак скрещивающихся прямых). ***Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются***.

Две скрещивающиеся прямые не образуют угол в обычном смысле, так как у них нет общей точки. ***Углом между скрещивающимися прямыми*** называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым. Этот угол не зависит от выбора точки, через которую проходят пересекающиеся прямые (докажите самостоятельно это утверждение).

§2.2. Взаимное расположение прямой и плоскости

Возможны следующие случаи расположения в пространстве прямой линии и плоскости:

а) прямая лежит в плоскости (или плоскость проходит через прямую);

б) прямая и плоскость имеют одну общую точку, т. е. прямая ***пересекает*** плоскость. Точку их пересечения называют ***следом прямой на данной плоскости***;

в) прямая не имеет общих точек с плоскостью, т. е. ***прямая параллельна плоскости***.

Параллельность прямой и плоскости

Теорема 4. (Признак параллельности прямой и плоскости.) ***Если прямая*** a ***не лежит в плоскости*** α ***и параллельна прямой*** a_1***, лежащей в плоскости*** α (см. рис. 4)***, то она параллельна плоскости*** α **.**

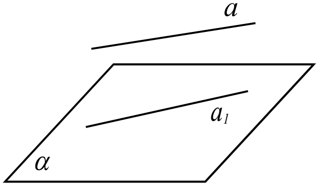


Рис. 4

Теорема 5. ***Если две плоскости*** α ***и*** β , ***проходящие соответственно через параллельные прямые*** a ***и*** b , ***пересекаются, то прямая их пересечения*** c ***параллельна обеим данным прямым*** a ***и*** b (***если, конечно, прямая*** c ***не совпадает ни с*** a ***, ни с*** b) (см. рис. 5).

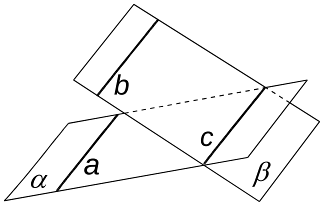


Рис. 5

Теорема 6. ***Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения плоскостей параллельна данной прямой*** (см. рис. 5)**.**

Следствие: если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна линии их пересечения.

Теорема 7. ***Если одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости, то и другая прямая параллельна той же плоскости или лежит в ней.***

Теорема 8. ***Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость и притом только одна, параллельная другой прямой.***

Перпендикуляр и наклонная к плоскости

Прямая называется ***перпендикулярной плоскости*** (или ***перпендикуляром к плоскости***), если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (перпендикулярность в данном случае понимается в смысле «*угол между скрещивающимися прямыми равен* $90°$»). Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная ей, называется ***наклонной*** к этой плоскости.

Теорема 9. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости.) ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в данной плоскости, то она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости, т. е. она перпендикулярна плоскости***.

Прямоугольной (ортогональной) проекцией точки на плоскость называется след перпендикуляра, проведенного через эту точку к данной плоскости. След перпендикуляра на плоскости называется ***основанием перпендикуляра***, а след наклонной – ***основанием наклонной***.

Прямоугольной (ортогональной) проекцией наклонной на плоскость называется отрезок прямой, соединяющей основание наклонной с основанием перпендикуляра, опущенного из конца наклонной на эту плоскость.

Теорема 10. ***Если из одной и той же точки вне плоскости провести к плоскости перпендикуляр и наклонные, то:***

а) ***перпендикуляр короче всякой наклонной;***

б) ***наклонные, имеющие равные проекции, равны между собой***;

в) ***из двух наклонных, имеющих разные проекции, больше та, проекция которой больше.***

На рис. 7 AB, AC и $AD-$ наклонные к плоскости α , AO – перпендикуляр к α . Тогда, из равенства $OB = OC$ следует $AB = AC$; из неравенства для проекций $OD < OC$ следует неравенство для наклонных $AD < AC$.

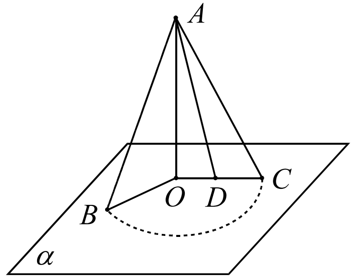


Рис. 7

Теорема 11 (обратная теореме 10). ***Если из одной и той же точки, лежащей вне плоскости, провести к этой плоскости перпендикуляр и наклонные, то:*** а) ***равные наклонные имеют равные проекции;*** б) ***из двух проекций больше та, которая соответствует большей наклонной.***

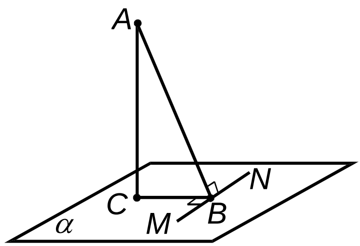


Рис. 8

Теорема 12. (Теорема о трех перпендикулярах). ***Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно наклонной, перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.***

Теорема 13 (обратная теореме 12). ***Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно проекции наклонной к этой плоскости, перпендикулярна самой наклонной.***

На рис. 8 AB – наклонная, AC – перпендикуляр к плоскости α, прямая $MN \subset \alpha$. Тогда, если $MN \perp AB$, то $MN \perp BC$, и наоборот, если $MN \perp CB$, то $MN \perp AB$.

Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между этой прямой и проекцией на данную плоскость. На рис. 8 AB – наклонная, а CB ее проекция на плоскость α, тогда угол между AB и плоскостью α равен $\angle ABC$.

Теорема 14. ***Угол между прямой и плоскостью есть наименьший из всех углов, образованных этой прямой с любой прямой, лежащей в данной плоскости.***

Докажем факт, знание которого оказывается полезным при решении задач.

Задача 1. Доказать, что если из вершины угла, лежащего на плоскости, провести наклонную к плоскости так, чтобы она составляла со сторонами угла равные углы, то проекция этой наклонной на плоскость будет биссектрисой данного угла.

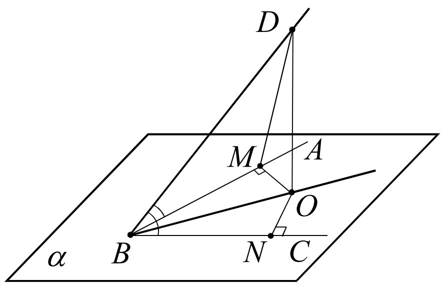


Рис. 9

Доказательство. □ По условию задачи $\angle ABC$ лежит в плоскости α (см. рис. 9) и наклонная DB образует с его сторонами равные углы $\angle ABD = \angle DBC$. Из точки

D опустим перпендикуляр DO на плоскость α, и из точки O проведем $OM \perp AB$ и $ON \perp BC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах наклонные DM и DN будут перпендикулярны сторонам угла AB и BC соответственно. Прямоугольные треугольники DBM и DBN равны по общей гипотенузе DB и равным острым углам $\angle MBD = \angle NBD$. Тогда наклонная $DM = DN$, а значит, равны и их проекции $OM = ON$, но тогда равны $\Delta MOB = \Delta NOB$, а вместе с ними и углы $\angle MBO = \angle NBO$, т. е. OB – биссектриса угла ABC, что и требовалось доказать. �

Связь параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Теорема 15. ***Если плоскость перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.***

Теорема 16 (обратная теореме 15). ***Если две различные прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.***

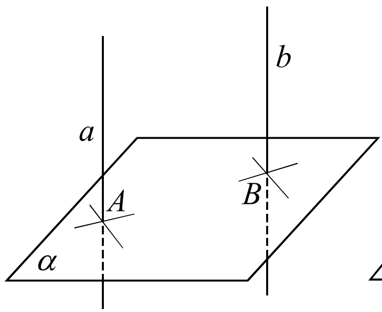


Рис. 10

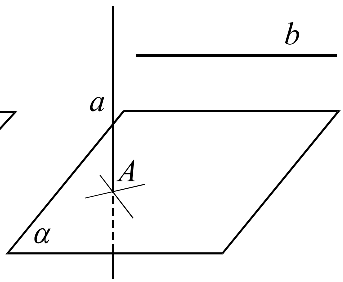


Рис. 11

Таким образом, если $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$ (см. рис. 10), то и $b \perp \alpha$, и, наоборот, если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.

Теорема 17. (Признак параллельности прямой и плоскости). ***Если плоскость*** α ***и прямая*** b (см. рис. 11), ***не лежащая в плоскости*** α, ***перпендикулярны одной и той же прямой*** a, ***то они параллельны.***

Расстояния между объектами в пространстве

Расстояние между точками A ***и*** B равно длине отрезка AB. Расстояние есть неотрицательное число.

Расстояние между двумя фигурами (множествами точек) равно нулю, если фигуры имеют общую точку, и расстоянию между ближайшими точками этих фигур, если такие точки существуют.

Расстояние от точки M ***до прямой*** l, не содержащей M, равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l.

Расстояние от точки M ***до плоскости*** α, не содержащей M, равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из M на плоскость α.

Расстоянием между двумя параллельными прямыми равно длине заключенного между ними отрезка прямой, перпендикулярной к каждой из этих прямых и пересекающей их.

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.

Расстояние между параллельными плоскостями равно расстоянию от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

Задача 2. Доказать, что для любых двух скрещивающихся прямых существует и притом единственная прямая, пересекающая обе прямые и перпендикулярная каждой из них.

Доказательство. □ Пусть a и b – скрещивающиеся прямые (см. рис. 12). Проведем через a плоскость $\alpha \parallel b$. Пусть b_1 – прямоугольная проекция b на α и $A = b_1 \cap a$ (b_1 и a не параллельны). Точка A – прямоугольная проекция на α некоторой точки B прямой b. Так как $AB \perp \alpha$, то $AB \perp a$ и $AB \perp b_1$. Следовательно, $AB \perp b$ ($b_1 \parallel b$). Прямая AB, пересекающая прямые a и b, перпендикулярна им.

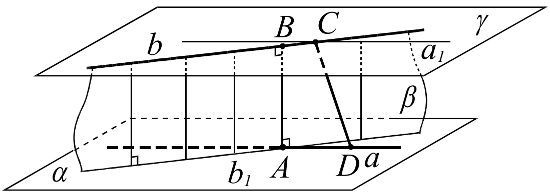


Рис. 12

Докажем единственность. Допустим, что существует другой перпендикуляр CD. Проведем через точку C прямую $a_1 \parallel a$. Тогда $CD \perp a_1$. Следовательно,

CD перпендикулярна плоскости γ, образованной пересекающимися прямыми b и a_1 ($\gamma \parallel \alpha$). В этом случае CD и AB параллельны (два перпендикуляра к одной плоскости) и лежат в одной плоскости. Получаем, что скрещивающиеся прямые BC и AD лежат в одной плоскости, – противоречие. �

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми есть наименьшее расстояние между точками, лежащими на этих прямых, и измеряется длиной отрезка ***их общего перпендикуляра*** (такой отрезок единственный). Оно также равно расстоянию от любой точки одной из скрещивающихся прямых до плоскости, параллельной этой прямой и содержащей другую прямую, или расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые. На рис. 13 изображены скрещивающиеся прямые: b, лежащая в плоскости α, и a, пересекающая α. Прямая AB перпендикулярна a и b; тогда длина отрезка AB есть расстояние между скрещивающимися прямыми a и b.

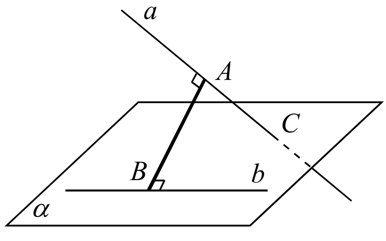


Рис. 13

Полезные факты.

1. ***Каждая точка прямой, проведенной через центр вписанной в треугольник окружности перпендикулярно плоскости треугольника, равноудалена от сторон треугольника***.

2. ***Каждая точка прямой, проведенной через центр описанной около треугольника окружности перпендикулярно плоскости треугольника, равноудалена от вершин треугольника***.

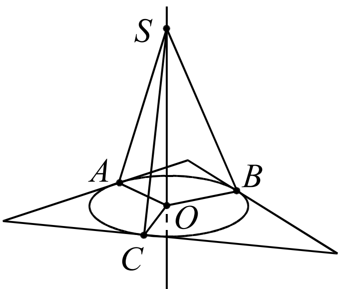


Рис. 14

Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично).

Доказательство. □ Пусть $A, B, C -$ точки касания сторон треугольника с окружностью, $O -$ центр окружности (см. рис. 14), $S -$ произвольная точка на перпендикуляре. Тогда $SA, SB, SC -$ наклонные, а OA, OB, OC – их проекции на плоскость треугольника ($OA, OB,$ OC являются радиусами окружности, соединяющими ее центр с точками касания, поэтому они перпендикулярны сторонам треугольника). Следовательно, (по теореме о трех перпендикулярах) SA, SB, SC перпендикулярны соответствующим сторонам и их длины – расстояния от точки S до сторон треугольника. Из равенства прямоугольных треугольников ASO, BSO, CSO получаем $SA = SB = SC$, т. е. все расстояния от точки S до сторон треугольника равны. �

Задача 3. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии a от противолежащей стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны b и c. Найти проекции сторон ромба на эту плоскость.

Решение. □ Пусть $ABCD$ – ромб, сторона AD которого лежит в плоскости α (см. рис. 15).

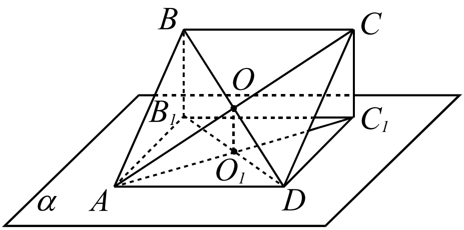


Рис. 15

По условию задачи перпендикуляры к плоскости α $BB_1 = CC_1 = a$; $AC_1 = c$, $B_1D = b$. Требуется найти $DC_1 = AB_1$ и B_1C_1. Из теоремы Пифагора для прямоугольных треугольников ACC_1 и DBB_1: $AC = \sqrt{AC_1{}^2 + CC_1{}^2} = \sqrt{c^2 + a^2}$ и $BD = \sqrt{BB_1{}^2 + B_1D^2} = = \sqrt{a^2 + b^2}$. Диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, поэтому:

$$BC = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + b^2 + 2a^2}.$$

Четырехугольник $BCC_1B_1 -$ прямоугольник, поэтому проекция B_1C_1 стороны BC равна BC. Применяя теорему Пифагора для прямоугольного треугольника ABB_1, находим

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 - BB_1^{\ 2}} = \frac{\sqrt{c^2 + b^2 - 2a^2}}{2}. \blacklozenge$$

§2.3. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Параллельные плоскости

Две плоскости называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек.

Признаки параллельности плоскостей:

Теорема 18. ***Если две различные плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны*** (см. рис. 16).

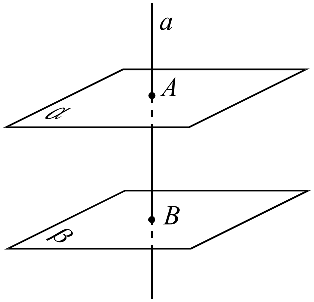


Рис. 16

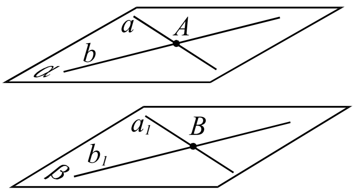


Рис. 17

Теорема 19. ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то такие две плоскости параллельны.*** (Пусть, например, пересекающиеся прямые a, b плоскости α и a_1, b_1 плоскости β (см. рис. 17) таковы, что $a \parallel a_1$, а $b \parallel b_1$, тогда $\alpha \parallel \beta$).

Теорема 20. ***Если две параллельные плоскости*** α и β ***пересекаются третьей плоскостью*** γ***, то прямые их пересечения параллельны*** (см. рис. 18). Другими словами, если $\alpha \parallel \beta$ и плоскость γ тако-

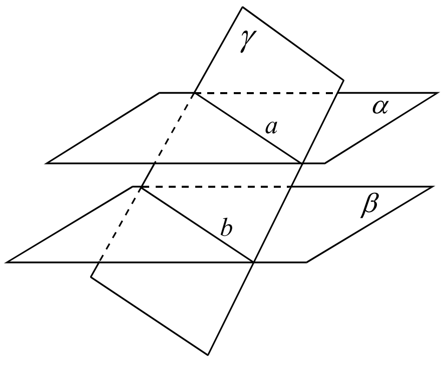


Рис. 18

ва, что $\alpha \cap \gamma \equiv a$ и $\beta \cap \gamma \equiv b$, то $a \parallel b$ (см. рис. 18).

Теорема 21. ***Две плоскости, параллельные одной и той же третьей плоскости, параллельны между собой или совпадают.***

Теорема 22. ***Плоскость, пересекающая одну из параллельных плоскостей, пересечет и другую плоскость.***

Теорема 23. ***Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой плоскости.***

Теорема 24. ***Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны между собой***.

Теорема 25. ***Два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны между собой.***

Двугранные углы и перпендикулярные плоскости

Часть плоскости, лежащая по одну сторону какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости, называется ***полуплоскостью***.

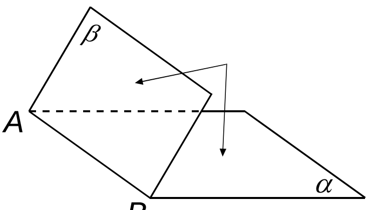


Рис. 19

Двугранным углом называется геометрическая фигура, образованная двумя полуплоскостями, имеющими общую ограничивающую прямую. Эта прямая (AB на рис. 19) называется ***ребром,*** а полуплоскости α и β – сторонами или ***гранями двугранного угла***. Двугранный угол обозначают или двумя буквами, ми, поставленными у ребра, например, AB, или четырьмя буквами $\alpha AB\beta$, из которых две средние обозначают ребро, а крайние – грани.

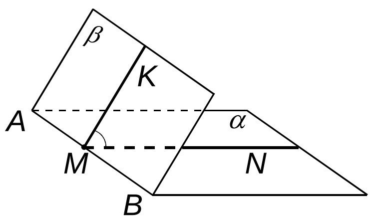


Рис. 20

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный двумя перпендикулярами, восставленными к ребру из произвольной его точки и лежащими на гранях угла (см. рис. 20). На рисунке MN лежит в плоскости α, а MK – в плоскости β, причем $MN \perp AB$ и $MK \perp AB$, поэтому угол KMN – линейный угол двугранного угла $\alpha AB\beta$.

Два двугранных угла называются ***равными,*** если они при вложении совмещаются.

Если совместить по одной грани два неравных двугранных угла, то большим считают тот из них, между гранями которого заключена вторая грань второго двугранного угла. На рис. 21 двугранный угол $\alpha AB\beta$ больше двугранного угла $\alpha AB\gamma$.

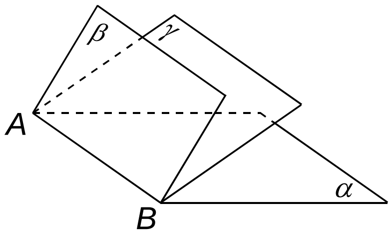


Рис. 21

Теорема 26. ***Если два двугранных угла равны, то и их линейные углы равны. Если два двугранных угла не равны, то большему двугранному углу соответствует и больший линейный угол.***

Теорема 27 (обратная 26). ***Равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы. Если линейные углы не равны, то большему линейному углу соответствует больший двугранный угол.***

Двугранные углы называются ***смежными,*** если у них одна грань общая, а две другие составляют одну плоскость; ***вертикальными,*** если их грани составляют две плоскости.

Измерение двугранных углов. Двугранный угол измеряется его линейным углом, т. е. за единицу измерения двугранных углов принимается такой двугранный угол, линейный угол которого содержит единицу измерения линейных углов.

Задача 4. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол в 30° с плоскостью треугольника.

Решение. □ Из вершины C треугольника ABC опустим перпендикуляры: CD на гипотенузу AB и CO на плоскость α (см. рис. 22). По теореме о трех перпендикулярах OD как проекция наклонной

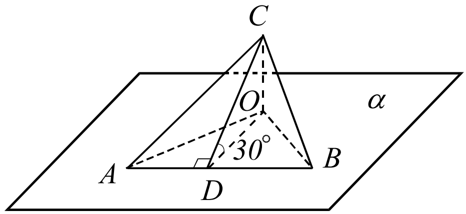


Рис. 22

CD на плоскость α перпендикулярна AB. Тогда $\angle CDO = 30°$ – линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью треугольника ABC и плоскостью α. В прямоугольном треугольнике ABC находим высоту $CD = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Тогда отрезок CO равен $\dfrac{1}{2}CD$, как катет прямоугольного треугольника DCO, лежащий против угла в 30°, т. е. $CO = \dfrac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$. �

Перпендикулярные плоскости

Двугранный угол называется ***прямым***, если его линейный угол прямой. Плоскости, образующие прямой двугранный угол, называются ***взаимно перпендикулярными***.

Теорема 28. (Признак перпендикулярности плоскостей). ***Если плоскость β проходит через перпендикуляр l к плоскости α, то плоскости α и β взаимно перпендикулярны*** (см. рис. 23).

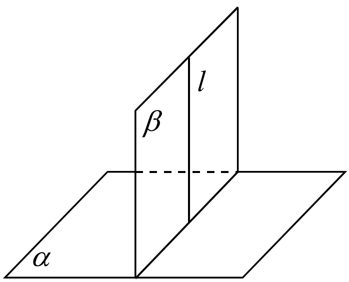


Рис. 23

Теорема 29. ***Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная их линии пересечения, перпендикулярна другой плоскости.***

Теорема 30. ***Если две плоскости взаимно перпендикулярны и из какой-нибудь точки одной из них опущен перпендикуляр на другую, то этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.***

Теорема 31. ***Плоскость, перпендикулярная двум пересекающимся плоскостям, перпендикулярна ребру образованного ими двугранного угла.***

Теорема 32. ***Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, перпендикулярна и его граням.***

§ 2.3. Параллельное проектирование

Для изображения пространственных фигур на плоскости пользуются параллельным проектированием.

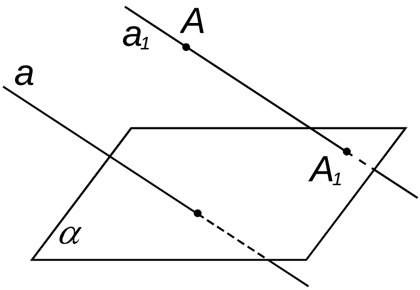


Рис. 24

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее прямая a (см. рис. 24). Возьмем в пространстве произвольную точку A. Если $A \notin a$, то через A проводим прямую $a_1 \parallel a$. Прямая a_1 пересекает плоскость α в некоторой точке A_1. Эта точка называется ***проекцией*** (***на плоскость*** α) точки A ***при проектировании параллельно прямой*** a или, короче, параллельной ***проекцией точки*** A. Если точка $A \in a$, то ее параллельной проекцией A_1 называется точка, в которой a пересекает α. Если же $A \in \alpha$, точка A_1 совпадает с точкой A.

Плоскость α называется ***плоскостью проекций.*** О прямой a говорят, что она задает ***направление проектирования***, потому что при замене прямой a любой другой параллельной ей прямой результат проектирования не изменится (поскольку две прямые, параллельные третьей, параллельны). Все прямые, параллельные прямой a, задают одно и то же направление проектирования и называются ***проектирующими прямыми.***

Проекцией фигуры F называется множество F_1 проекций всех ее точек. Отображение, сопоставляющее каждой точке фигуры F ее параллельную проекцию, называется ***параллельным проектированием*** фигуры F (см. рис. 25). Если проектирующая прямая перпендикулярна плоскости проекции, то проекцию F_1 фигуры F называют ***ортогональной проекцией***.

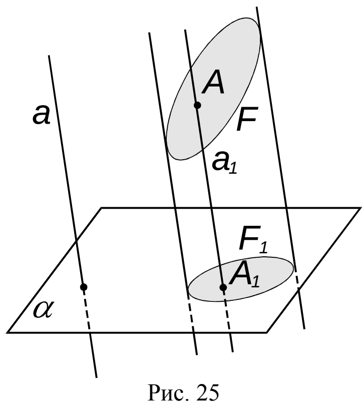


Рис. 25

Основные свойства параллельного проектирования

Теорема 34. (О параллельном проектировании). ***При параллельном проектировании для прямых, не параллельных направлению проектирования, и лежащих на них отрезков выполняются следующие свойства:***

(1) ***Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка – отрезок.***

(2) ***Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.***

(3) ***Отношение длин проекций отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению длин самих отрезков.***

Следствие. При параллельном проектировании середина отрезка проектируется в середину его проекции.

(4) ***Пусть*** $F-$ ***плоская фигура. Если плоскость фигуры*** F ***параллельна плоскости проекции, то параллельная проекция фигуры равна самой фигуре.***

В качестве примера рассмотрим задачу.

Задача 5. Треугольник, не имеющий общих точек с плоскостью α, спроектирован на эту плоскость. Расстояние от вершин треугольника до этой плоскости равно a, b и c. Найти расстояние от точки пересечения медиан треугольника до плоскости α.

Решение. □ Пусть точки A_1, B_1, C_1 (см. рис. 26) – прямоугольные проекции вершин A, B, C данного треугольника ABC на плоскость α. По условию $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

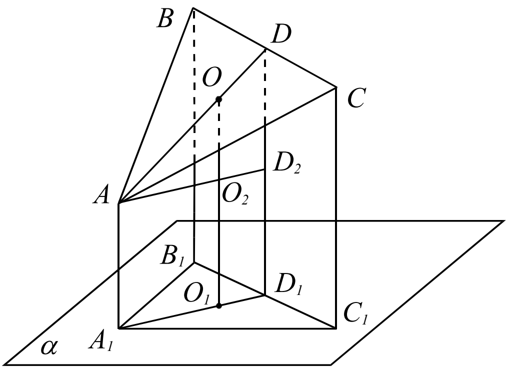


Рис. 26

Пусть $O-$ точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Медиана AD точкой O делится в отношении $AO:OD = 2:1$. Из точки D опустим на плоскость α перпендикуляр DD_1, который разделит сторону B_1C_1 пополам: $C_1D_1 = D_1B_1$, т. е. A_1D_1 – медиана

$\triangle A_1B_1C_1$. $DD_1 = \dfrac{1}{2}(CC_1 + BB_1) = \dfrac{a+b}{2}$ – как средняя линия трапеции CC_1B_1B. В плоскости трапеции A_1ADD_1 проведем прямую $AD_2 \parallel A_1D_1$. $AA_1 = D_2D_1 = a$, так как $A_1AD_2D_1$ – параллелограмм. Из подобия $\triangle AOO_2$ и $\triangle ADD_2$ находим $OO_2 : DD_2 = AO : AD$ или $DD_2 = DD_1 - D_1D_2 = \dfrac{b+c}{2} - a$, $OO_2 : \left(\dfrac{b+c-2a}{2}\right) = 2:3$. Откуда получаем $OO_2 = \dfrac{b+c-2a}{3}$. Учитывая, что $O_2O_1 = AA_1 = a$, находим

$$OO_1 = OO_2 + O_2O_1 = \frac{a+b+c}{3}. \ ◆$$

Теорема 35. ***Площадь ортогональной проекции плоского многоугольника равна площади этого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.***

Замечание. Эта теорема в общем случае справедлива для произвольной плоской фигуры. Так, пусть угол между плоскостями фигуры и проекции равен α. Тогда имеет место формула:

$$S_{\Phi'} = S_{\Phi} \cdot \cos\alpha,$$

где S_{Φ} – площадь фигуры, $S_{\Phi'}$ – площадь ее ортогональной проекции (см. рис. 27).

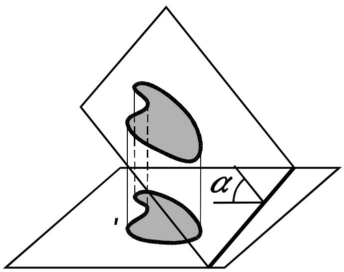


Рис. 27

Изображение различных фигур в параллельной проекции

Рисунки фигур в пространстве делают обычно в параллельной проекции. За ***изображение фигуры*** принимается фигура, подобная какой-либо ее параллельной проекции. Выполнять рисунки (чертежи) следует в соответствии с законами параллельного проектирования, т. е. сохраняя ***аффинные свойствами оригинала***.

Пусть есть две плоскости α и β, и α проектируется на β. ***Аффинные свойства фигуры*** – свойства, сохраняющиеся при параллельном проектировании. Напомним некоторые из них.

Аффинные свойства фигур:

а) свойство фигуры быть точкой, прямой, плоскостью;

б) свойство фигур иметь пересечение;

в) деление отрезка в данном отношении;

г) свойство фигуры быть треугольником, параллелограммом, трапецией;

д) отношение длин параллельных отрезков;

е) отношение площадей двух фигур и др.

Метрические свойства фигур (не сохраняющиеся при параллельном проектировании, но сохраняющиеся при преобразованиях подобия):

а) свойство прямых (плоскостей, прямой и плоскости) образовывать между собой определенный угол (в частности, быть перпендикулярными);

б) отношение длин непараллельных отрезков;

в) отношение величин углов между прямыми (в частности, свойство прямой быть биссектрисой угла); между прямыми и плоскостями; отношение величин двугранных углов и др.

Рассмотрим изображение некоторых фигур.

Треугольник. Каждый треугольник можно параллельно спроектировать так, что в проекции получится треугольник любого вида, т. е. подобный любому заданному треугольнику.

Действительно, пусть даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Проведем через прямую AB плоскость α, пересекающую плоскость треугольника ABC. На ней построим треугольник ABC_2, подобный треугольнику $A_1B_1C_1$ и прилегающий к треугольнику ABC по стороне AB (см. рис. 28). Тогда при проектировании на плоскость α параллельно прямой CC_2 проекцией треугольника ABC служит треугольник ABC_2, подобный треугольнику $A_1B_1C_1$. В

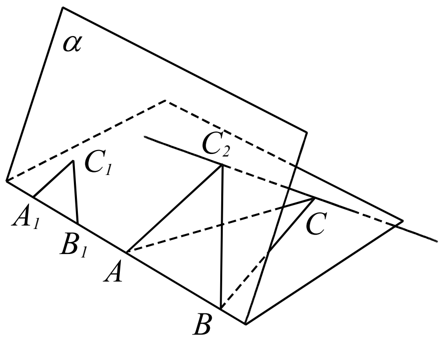


Рис. 28

частности, всякий треугольник можно спроектировать так, чтобы в проекции получился равносторонний треугольник.

При параллельном проектировании медианы треугольника проектируются в медианы проекции.

Параллелограмм. Изображением параллелограмма может служить любой параллелограмм, так как при проектировании сохраняется параллельность прямых. При этом квадрат и ромб, вообще говоря проектируются в произвольный параллелограмм. Изображением прямоугольника может служить любой параллелограмм, так как углы при проектировании не сохраняются.

Трапеция. Изображением трапеции при параллельном проектировании служит трапеция (сохраняется параллельность соответствующих сторон).

Правильный шестиугольник. Изображением правильного шестиугольника служит шестиугольник, в котором сохраняется параллельность соответствующих сторон.

Окружность. Окружность проектируется в эллипс.

Изображение плоской фигуры. Для изображения плоской фигуры можно в данной фигуре выделить какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и построить треугольник с вершинами в этих точках; обозначим их A, B, C (см. рис. 29). Изображением треугольника ABC может быть произвольный треугольник $A_1B_1C_1$. После того, как построено это изображение, никакого произвола в изображении фигуры быть не может. Покажем это.

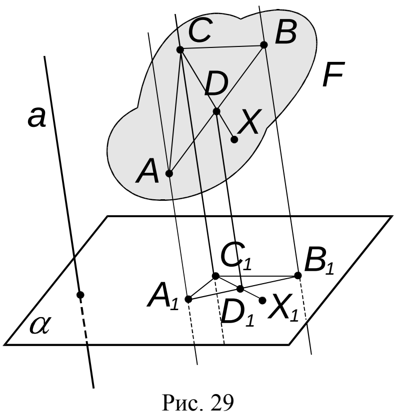


Рис. 29

□ Пусть изображением треугольника ABC служит треугольник $A_1B_1C_1$ (см. рис. 29). Пусть точка X лежит в плоскости ABC и луч CX пересекает отрезок AB во внутренней его точке D.

Проекция точки D – точка D_1, лежащая на отрезке A_1B_1 (пункты 1 и 3 теоремы о свойствах параллельной проекции), и $\dfrac{A_1D_1}{D_1B_1} = \dfrac{AD}{DB}$.

Следовательно, точку D_1 на отрезке A_1B_1 можно построить на рисунке. Далее проводим луч C_1D_1 и на нем отмечаем такую точку X_1, что $\dfrac{C_1X_1}{C_1D_1} = \dfrac{CX}{CD}$. Таким образом, на рисунке построена проекция выбранной точки фигуры X на плоскости ABC. ♦

Изображение пространственной фигуры. Рассмотрим изображение на плоскости некоторых многогранников при условии, что ни одна из плоскостей граней не параллельна направлению проектирования.

Тетраэдр. Пусть $D_0A_0B_0C_0$ – произвольный тетраэдр, точки A, B, C и D – параллельные проекции его вершин на плоскость изображения. Отрезки AB, BC, CA, AD, BD, CD служат сторонами и диагоналями четырехугольника $ABCD$. Фигура, образованная из этих отрезков (или подобная ей), является изображением тетраэдра $D_0A_0B_0C_0$.

Параллелепипед. Пусть $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$ – произвольный параллелепипед. Любые три отрезка AB, AD, AA_1 (см. рис. 30) плоскости изображения π с общим концом A, никакие два из которых не лежат на одной прямой, можно считать изображением ребер A_0B_0, A_0D_0, A_0A_0' параллелепипеда. Тогда изображения остальных граней строятся однозначно, так как все грани параллелепипеда являются параллелограммами и, следовательно, их изображения также будут параллелограммами.

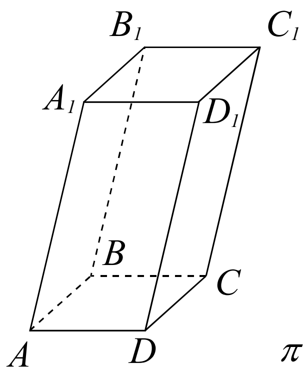


Рис. 30

Пирамида. Изображение основания пирамиды строят по правилам построения изображения многоугольника, а за изображение вершины можно принять любую точку, не принадлежащую сторонам основания.

§ 2.5. Чертеж в стереометрической задаче и задачи на построение в стереометрии

При решении стереометрических задачи необходимо соблюдать ряд требований, предъявляемых к стереометрическим чертежам. Так, всякий стереометрический чертеж должен являться определенной проекцией данной пространственной фигуры. Проекции всех элементов геометрического объекта должны быть построены при помощи одного и того же способа проектирования. Следует отметить, что параллельные проекции лучше других удовлетворяют этим требованиям.

Чертеж должен быть выполнен аккуратно. Все построения должны быть объяснены в тексте. Часто оказывается целесообразным дать еще один чертеж, на котором выделены наиболее существенные детали на данном этапе решения задачи.

Ссылаться при решении задачи на какие-либо особенности чертежа нельзя, так как чертеж не заменяет логического доказательства геометрического факта, а является лишь иллюстрацией к доказательству.

Основными пространственными фигурами, с которыми приходится сталкиваться при решении задач, являются: куб, параллелепипед, призма, пирамида, шар, сфера, конус, цилиндр, а также их части и комбинации.

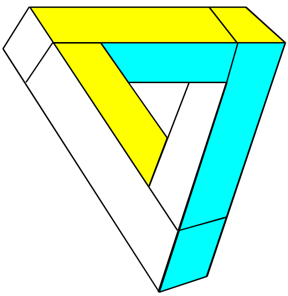


Рис. 31

Пространственные фигуры изображаются на чертеже в виде рисунков, которые выполняются по определенным правилам, основанным на геометрических свойствах фигур.

Несоблюдение приведенных правил может привести к изображению фигур, на самом деле не существующих в природе. Такова, например, фигура, «составленная» из трех брусков, приведенная на рисунке 31.

Построения в стереометрии

Решение задач на построение в пространстве существенно отличается от решения задач на построение в планиметрии. Содержание всякой задачи на построение состоит из трех частей: данных элементов, того, что требуется построить, и тех средств, с помощью которых задача должна быть решена.

Для построения пространственных фигур фактически не существует инструментов, аналогичных циркулю, линейке и др., применяемых при решении задач на построение в планиметрии. При решении задач на построение пространственных фигур обыкновенно описывается и логически обосновывается ход построения, который сопровождается схематическим чертежом. Таким образом, при решении задач на построение в пространстве основным является логическое обоснование построения, а чертеж является лишь иллюстрацией.

Способы и правила построения чертежей пространственных фигур изучаются в начертательной геометрии.

В отличие от планиметрии в стереометрии рассматриваются построения двух видов:

1) ***Построения на проекционном чертеже***, состоящие в изображении на плоскости некоторой проекции реальной фигуры. Этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

2) ***Воображаемые построения в пространстве***, состоящие в доказательстве существования и единственности (или неединственности) искомого объекта. Многие утверждения в стереометрии формулируются с помощью слов «можно провести» или «можно построить». Речь в этих случаях идет о воображаемых построениях в пространстве – о некоторых мысленных операциях, не подкрепляемых реальными действиями (разве что иллюстрируемых на плоских схематических чертежах). Построения в пространстве подчиняются строгим правилам, определяемым аксиомами и их следствиями (теоремами или специальными задачами).

Перечислим основные, стандартные построения, следующие из аксиом и являющиеся однозначными, дающие основные способы задания прямых, плоскостей и точек в пространстве.

(1) Если даны (построены) две различные точки A, B, то может быть построена и прямая $a \equiv AB$.

(2) Если даны (построены) две пересекающиеся прямые a, b, то может быть построена и плоскость $\alpha \equiv (a, b)$, содержащая эти прямые.

(3) Если даны (построены) две пересекающиеся плоскости α, β, то считается построенной прямая их пересечения.

(4) Если даны (построены) пересекающиеся прямая и плоскость, то считается построенной точка их пересечения.

(5) Если даны (построены) две пересекающиеся прямые, то считается построенной точка их пересечения.

(6) Если даны прямая a и точка $A \notin a$, то можно построить плоскость $\alpha \equiv (a, A)$, содержащую A и a.

(7) Если даны три не лежащие на одной прямой точки A, B, C, то можно построить плоскость $\alpha \equiv ABC$, проходящую через эти точки.

(8) Если даны прямая a и точка $A \notin a$, то в пространстве можно построить прямую b, проходящую через A и параллельную a.

(9) Если даны (построены) две параллельные прямые a, b, то может быть построена плоскость $\alpha \equiv (a, b)$, проходящая через них.

Кроме этого, полагается, что в любой из построенных плоскостей считаются осуществимыми все обычные планиметрические построения.

Задача на построение в стереометрии считается решенной, если она сведена к решению простейших задач. Задачи, в которых требуется доказать существование того или иного объекта (фигуры), как правило, решаются сведением задачи к конечному числу элементарных построений, выполняемых в определенном порядке. Единственность нужного объекта, если таковая имеет место, часто доказывается рассуждением «от противного». Не единственность доказывается построением другого объекта, удовлетворяющего условиям задачи.

Рассмотрим некоторые из основных задач на построение в стереометрии.

Задача 6. Построить плоскость, перпендикулярную данной прямой и проходящую через данную точку.

Решение. □ Пусть дана точка A и прямая l (см. рис. 32). Требуется построить плоскость α, проходящую через точку A перпендикулярно прямой l. Рассмотрим два случая.

(1) $A \notin l$. В этом случае через точку A и прямую l проводим плоскость γ и через l проводим произвольную плоскость β, отличную от γ. В плоскости γ из точки A проводим перпендикуляр AO к прямой l, а в плоскости β из точки O восставим перпендикуляр OB к прямой l. Пересекающиеся прямые AO и OB определяют искомую

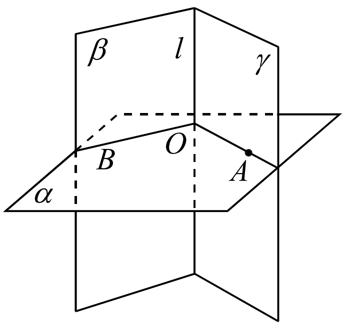


Рис. 32

плоскость α, которая единственна (докажите самостоятельно).

(2) $A \in l$. Через прямую l проводим две произвольные плоскости и в них из точки A восставляем перпендикуляры к прямой l. Эти перпендикуляры определят искомую плоскость α, которая также будет единственной (докажите самостоятельно). ◆

Таким образом, из точки вне (или на) прямой можно провести к этой прямой перпендикулярную плоскость и притом только одну.

Задача 7. Через данную точку провести перпендикуляр к данной плоскости.

Решение. □ Пусть дана точка A и плоскость α (см. рис. 33). Требуется провести через точку A перпендикуляр к плоскости α. Рассмотрим два случая.

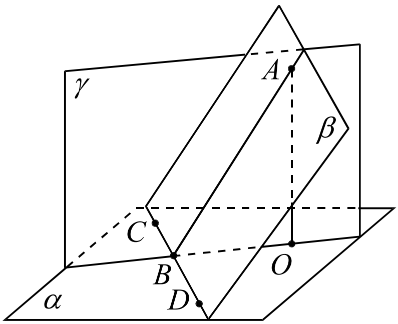


Рис. 33

(1) $A \notin \alpha$. В этом случае в плоскости α проводим произвольную прямую CD и через CD и данную точку A проводим плоскость β, в которой из A к DC проводим $AB \perp DC$. После этого в плоскости α восставим перпендикуляр BK к DC. Пересекающиеся прямые AB и BK определяют плоскость γ, перпендикулярную прямой CD. В плоскости γ проводим перпендикуляр AO к BK, который будет искомым, т. е. $AO \perp \alpha$.

(2) $A \in \alpha$. Пусть на рис. 33 данной в условии задачи точкой будет точка O. В этом случае проводим произвольную прямую CD в плоскости α, не проходящую через точку O. Из точки O проводим $OB \perp CD$ и через CD проводим произвольную плоскость β, отличную от плоскости α. В β восставляем перпендикуляр из точки B к DC и через него и прямую OB проводим плоскость γ, в которой восставляем $OA \perp BO$. Легко доказать, что $AO \perp \alpha$. ◆

Таким образом, через точку к данной плоскости всегда можно провести перпендикуляр и притом только один.

Задача 8. Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

Решение. □ Через некоторую точку данной прямой проведем перпендикуляр к данной плоскости. Данная прямая и проведенный перпендикуляр определяют искомую плоскость. �

Задача 9. Через данную точку провести плоскость, перпендикулярную к двум данным плоскостям.

Решение. □ Из данной точки опускаем перпендикуляры на данные плоскости. Эти перпендикуляры и определяют искомую плоскость. �

Задача 10. Через данную точку вне плоскости провести плоскость, параллельную данной плоскости.

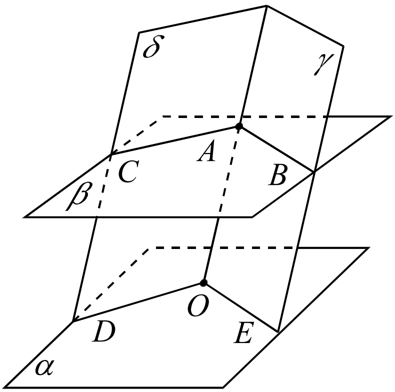


Рис. 34

Решение. □ Пусть дана точка A и плоскость α. Требуется через точку A провести плоскость β, параллельную плоскости α (см. рис. 34).

В плоскости α проводим две произвольные пересекающиеся прямые OE и OD и через каждую из этих прямых и заданную точку A проводим соответственно плоскости γ и δ, которые пересекутся по прямой OA. В плоскости γ проводим прямую $AB \parallel OE$, а в плоскости δ – прямую $AC \parallel OD$. Прямые AB и AC определяют плоскость β, которая проходит через точку A и параллельна данной плоскости α. �

Задача 11. Через точку, не лежащую на прямой, провести прямую, параллельную этой прямой.

Решение. □ Пусть дана точка A и прямая l. Требуется провести прямую, параллельную l и проходящую через точку A. Через данную точку A и прямую l проводим плоскость α и в ней через точку A проводим искомую прямую AB, параллельную l. �

Задача 12. Построить общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым.

Решение. □ Пусть даны две скрещивающиеся прямые l и m (см. рис. 35). Задача сводится к построению прямой, пересекающей прямые l и m и перпендикулярной каждой из них.

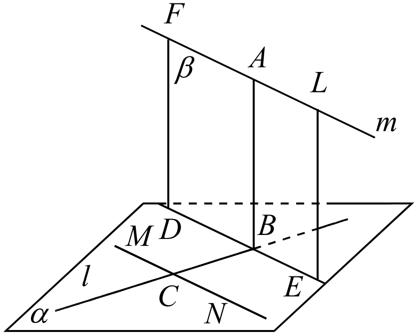


Рис. 35

Для этого через произвольную точку C прямой l проводим прямую $MN \parallel m$. Через прямые MN и l проводим плоскость α ($\alpha \parallel m$). Из произвольной точки F прямой m опускаем на плоскость α перпендикуляр DF. Через прямые DF и m проводим плоскость β. Очевидно, что $\beta \perp \alpha$. Через точку $B \equiv \beta \cap l$ проведем в плоскости β прямую, перпендикулярную прямой m. Пусть они пересекаются в точке A. Тогда отрезок AB, концы которого лежат на данных скрещивающихся прямых l и m, перпендикулярен каждой из них, и его длина равна расстоянию между заданными скрещивающимися прямыми. �

Задача 13. Данный двугранный угол разделить плоскостью на два равных между собой двугранных угла. (Провести биссекторную плоскость.)

Решение. □ Пусть дан двугранный угол $\alpha AB\gamma$ (см. рис. 36), требуется провести плос-

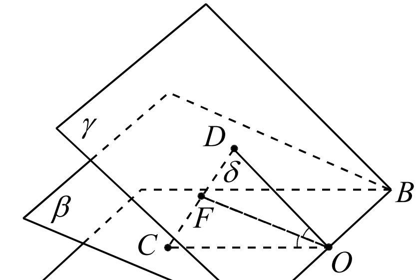


Рис. 36

кость β, делящую двугранный угол пополам.

Из произвольной точки O ребра AB данного двугранного угла восставляем перпендикуляры OC и OD к этому ребру, лежащие в плоскостях α и γ соответственно. Угол COD будет линейным углом данного двугранного угла.

Через прямые OC и OD проведем плоскость δ, которая будет перпендикулярна ребру AB. В плоскости δ построим биссектрису OF линейного угла COD. Через AB и OF проведем плоскость β. Она делит данный двугранный угол на два равных угла: $\alpha AB\beta = \beta AB\gamma$. ◆

Построенная плоскость называется ***биссекторной плоскостью*** двугранного угла $\alpha AB\gamma$.

Задача 14. Через данную прямую провести плоскость, образующую с данной плоскостью заданный угол α.

Решение. □ Пусть дана прямая l и плоскость δ. Требуется через прямую l провести плоскость β, образующую с плоскостью δ угол α. Возможны три случая.

(1) $l \parallel \delta$ (см. рис. 37). В этом случае через произвольную точку A прямой l проводим плоскость $\gamma \perp l$, которая пересечет плоскость α по прямой a. В плоскости γ строим угол $ACB = \alpha$. В плоскости δ через точку C проводим прямую $ED \perp a$. По теореме о трех перпендикулярах $ED \perp AC$. Через пересекающиеся прямые ED и AC проводим плоскость β. Двугранный угол $\delta ED\beta$ искомый, так как его линейный угол $\angle ACB = \alpha$.

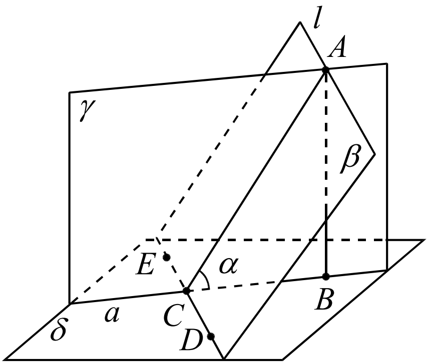


Рис. 37

(2) $l \subset \delta$. Построение аналогично построению, разобранному в пункте (1).

(3) $l \cap \delta \equiv A$ (см. рис. 38). Из некоторой точки B

прямой l опустим на плоскость δ перпендикуляр BO. Через прямые AB и BO проведем плоскость AOB и в этой плоскости построим угол $BDO = \alpha$. Затем радиусом OD в плоскости δ из точки O как из центра строим окружность. К этой окружности из точки A в плоскости δ проводим касательные AC и AE. $OC \perp AC$ и $OE \perp AE$, как радиусы окружности, проведенные в точки касания.

Построим теперь наклонные BC и BE, перпендикулярные касательным AC и AE по теореме о трех перпендикулярах. Через прямые AB и BC проведем плоскость β, а через AB и BE плоскость γ. Плоскости β и γ искомые (см. рис. 38), так как $\angle BCO = \angle BEO = \alpha$, а углы BCO и BEO есть линейные углы двугранных углов, образованных плоскостью δ с плоскостями β и γ, соответственно. �

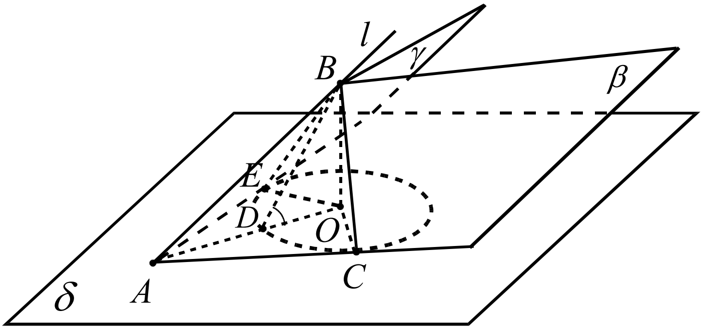


Рис. 38

§2.6. Примеры решения задач по вычислению углов между скрещивающимися прямыми, прямой и плоскостью, между плоскостями

Отметим, что не все теоремы, справедливые на плоскости, верны и в пространстве. Так, на плоскости два угла с взаимно перпендикулярными сторонами равны между собой или составляют в сумме $180°$. В пространстве это утверждение неверно. Например, на рисунке 39 углы $\angle A_1D_1D = 90°$, а $\angle C_1D_1C = 45°$.

На плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой. В пространстве это утверждение не справедливо.

Вычисление угла между скрещивающимися прямыми

Вычисление угла между скрещивающимися прямыми основано на применении теоремы, справедливой на плоскости и в пространстве.

Теорема. ***Если прямые*** a ***и*** b ***параллельны соответственно пересекающимся прямым*** a_1 ***и*** b_1***, то угол между прямыми*** a ***и*** b ***равен углу между прямым*** a_1 ***и*** b_1***.***

Угол между параллельными прямыми считается равным $0°$.

При нахождении угла между скрещивающимися прямыми достаточно часто задача сводится к нахождению в построенном вспомогательном треугольнике угла между двумя сторонами, параллельными данным прямым. Обычно треугольник строится таким образом, чтобы можно было вычислить длины его сторон, а далее, используя теорему косинусов, определить искомый угол.

Задача 15. Найти угол между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба.

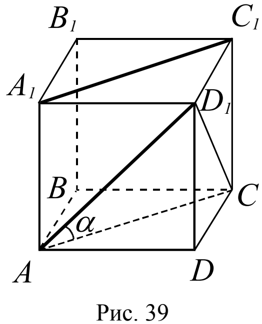


Рис. 39

Решение. □ Найдем, например, угол между диагоналями A_1C_1 и AD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 39). Проведем диагональ AC грани $ABCD$. $A_1C_1 \parallel AC$, поскольку AA_1C_1C – прямоугольник ($AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = CC_1$, $AA_1 \perp ABC$). Тогда углы между прямыми A_1C_1 и AD_1, и AC и AD_1 будут равны.

Рассмотрим треугольник AD_1C. Все его стороны равны, как диагонали равных квадратов, поэтому все его углы равны $60°$, т. е. угол между прямыми AC и AD_1 равен $60°$. Следовательно, искомый угол между прямыми A_1C_1 и AD_1 также равен $60°$. ◆

Задача 16. Найти угол между непересекающимися диагональю куба и диагональю грани куба.

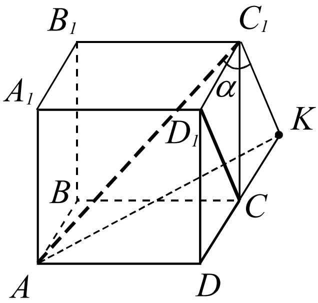


Рис. 40

Решение. □ Найдем, например, угол между диагоналями AC_1 и CD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 40). Пусть ребро куба равно a. В плоскости грани D_1C_1CD через вершину C_1 проведем прямую, параллельную диагонали D_1C до пересечения с продолжением ребра DC в точке K. Рассмотрим треугольник AC_1K. Так как $CD_1 \parallel C_1K$ (по построению), то угол AC_1K будет равен искомому углу. Вычислим длины сторон треугольника AC_1K: $AC_1 = a\sqrt{3}$ (диагональ куба), $C_1K = a\sqrt{2}$ ($C_1K = D_1C$, а $D_1C -$ диагональ квадрата), из прямоугольного $\triangle AKD$ $AK = \sqrt{AD^2 + DK^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$. Из теоремы косинусов для треугольника AC_1K получаем:

$$\cos\alpha = \frac{AC_1^2 + C_1K^2 - AK^2}{2 \cdot AC_1 \cdot C_1K} = \frac{3a^2 + 2a^2 - 5a^2}{2\sqrt{6} \cdot a^2} = 0.$$

Следовательно, угол между прямыми AC_1 и CD_1 равен $90°$. ◆

Другой способ вычисления угла между скрещивающимися прямыми основан на применении следующего факта.

Задача 17 (Теорема «о трех косинусах»)**.** Пусть $\alpha -$ величина угла между наклонной l (см. рис. 41) и ее проекцией на плоскость δ, $\beta -$ величина угла между проекцией наклонной l и прямой, проведенной через основание той же наклонной в плоскости проекции, и $\gamma -$ величина угла между наклонной l и прямой, проведенной через ее основание в плоскости проекции. Доказать справедливость следующего соотношения: $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

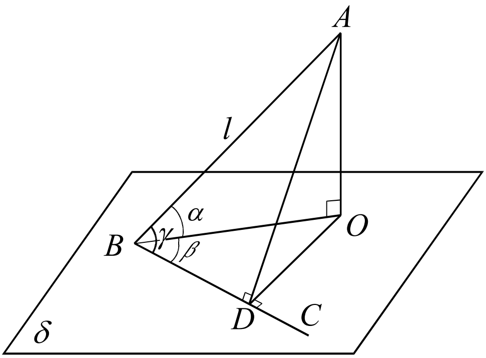


Рис. 41

Доказательство. □ Выберем точку A на прямой l, пересекающей плоскость δ в точке B (см. рис. 41), и спроектируем ее на плоскость δ ($AO \perp \delta$). Пусть точка $D -$ основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC. Тогда в соответствии с условием $\angle ABO = \alpha$, $\angle OBC = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Треугольники AOB, BOD, ABD – прямоугольные. Тогда из $\triangle AOB$ $BO = AB\cos\alpha$, из $\triangle BOD$ $BD = BO\cos\beta = AB\cos\alpha\cos\beta$, из $\triangle ABD$ $BD = AB\cos\gamma$. Из последних двух равенств следует:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta. \ ◆$$

Замечание. Полученная формула применяется также для вычисления угла между скрещивающимися прямыми. Важно удачно выбрать плоскость δ, чтобы углы между одной из прямых и ее проекцией на эту плоскость и между построенной проекцией и другой прямой, лежащей в этой плоскости (или прямой плоскости параллельной ей), определялись достаточно легко.

Воспользуемся, например, доказанным фактом для решения задачи 16 (см. рис. 42). Рассмотрим плоскость грани C_1D_1DC. $C_1D -$ проекция диагонали AC_1 на эту плоскость, $DC_1 \perp CD_1$ как диагонали квадрата. Пусть $\gamma -$ искомый угол, тогда

$$\cos\gamma = \cos\angle AC_1D \cdot \cos\angle D_1KC_1 =$$
$$= \cos\angle AC_1D \cdot \cos 90° = 0, \text{ т. е. } \gamma = 90°. \ ◆$$

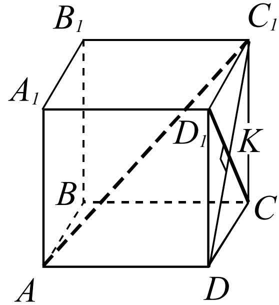


Рис. 42

Задача 18. В правильном тетраэдре найти угол между боковым ребром и не пересекающей его медианой основания.

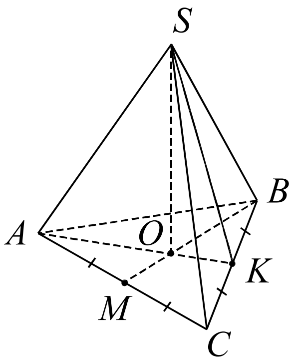


Рис. 43

Решение. □ Найдем угол между ребром AS и медианой BM основания тетраэдра $SABC$ (см. рис. 43). Пусть ребро тетраэдра равно a, а $\gamma -$ искомый угол. Треугольник $ABC -$ равносторонний. Опустим перпендикуляр SO на плоскость основания. Точка $O -$ центр описанной около $\triangle ABC$ окружности и совпадает с точкой пересечения его медиан. $AO -$ проекция ребра AS на плоскость основания. По свойству медиан $AO = \dfrac{2}{3}AK = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Треугольник $ASO -$ прямоугольный, поэтому $\cos\angle SAO = \dfrac{AO}{AS} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Угол между прямыми AO и BM равен $60°$. Тогда

$$\cos\gamma = \cos\angle SAO \cdot \cos 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ и } \gamma = \arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}. \ ◆$$

Еще один способ вычисления угла между скрещивающимися прямыми основан на применении векторно-координатного метода, который подробно описан в главе 6.

Вычисление угла между прямой и плоскостью

Угол между перпендикулярными прямой и плоскостью считается равным $90°$, а между параллельными прямой и плоскостью – $0°$.

Вычисление угла между прямой (наклонной) и плоскостью сводится к построению проекции прямой на плоскость и нахождению угла между двумя сторонами вспомогательного треугольника, одна из которых – отрезок наклонной, а другая – ее проекция. При этом возможны два случая:

1) Из какой-то точки прямой удается опустить перпендикуляр на плоскость и отметить на ней его основание. Тогда косинус искомого угла равен отношению прилежащего катета (проекции наклонной) к гипотенузе (самой наклонной).

2) Удается провести через рассматриваемую прямую (наклонную) плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Прямая пересечения плоскостей – ортогональная проекция наклонной на плоскость. Тогда косинус искомого угла получается из теоремы косинусов для некоторого треугольника, в котором одна из сторон – отрезок наклонной, другая – отрезок проекции.

Задача 19. В правильном тетраэдре найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

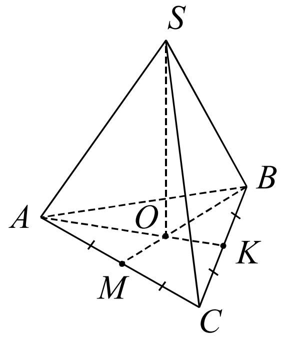


Рис. 44

Решение. □ Найдем, например, угол между ребром AS и плоскостью ABC.

1-*ый способ*. Поскольку $AO-$ проекция AS на плоскость основания (см. задачу 15 этого параграфа) и $\cos\angle(AO, AS) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, то

$\angle(AO, AS) = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно,

$$\angle(AS, ABC) = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}. \ ■$$

2-*ой способ*. □ Проведем медианы AK и SK равносторонних треугольников ABC и CSB (см. рис. 45). $AK \perp BC$ и $SK \perp BC$ (медианы являются высотами). В этом случае прямая BC перпендикулярна плоскости ASK. Плоскость ABC также перпендикулярна плоскости ASK, так как содержит прямую BC. Следовательно, искомый угол – $\angle SAK$ (прямая $AK-$ проекция прямой AS на плоскость ABC). Пусть сторона тетраэдра равна a, тогда медианы AK и SK равны $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Из теоремы косинусов для $\triangle ASK$ получаем аналогичный результат:

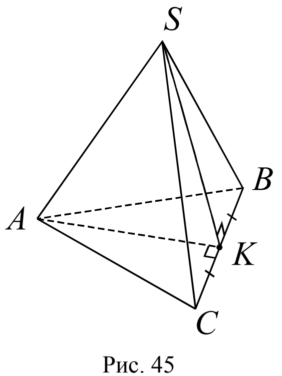


Рис. 45

$$\cos\angle SAK = \frac{AS^2 + AK^2 - SK^2}{2 \cdot AK \cdot AS} =$$

$$= \frac{a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ т. е. } \angle(AS, ABC) = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}. \ ◆$$

Другой способ вычисления угла между прямой (наклонной) и плоскостью основан на применении следующего факта.

Задача 20 (Теорема «о трех синусах»). Доказать (см. рис. 46), что синусы углов α, β и γ связаны соотношением:

$$\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta,$$

где α – линейный угол двугранного угла; γ – угол между прямой, лежащей в плоскости одной из граней этого двугранного угла, с другой его гранью, $\beta -$ угол между этой прямой и ребром двугранного угла.

Доказательство. □ Пусть $AD \subset \tau -$ данная в условии прямая; точка $C -$ основание перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость δ, и $\angle ABC -$ линейный угол двугранного угла $\tau BD\delta$ (см. рис. 46). Тогда в соответствии с условием

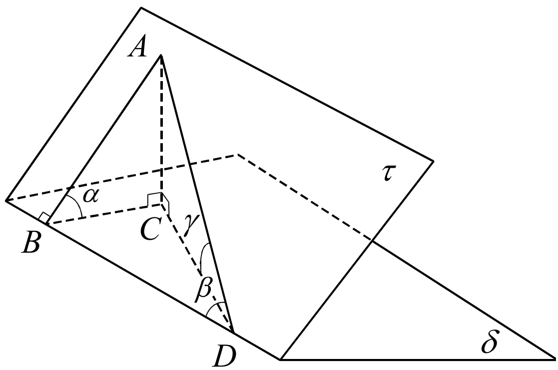


Рис. 46

$$\angle ABC = \alpha,$$
$$\angle ADB = \beta \text{ и}$$
$$\angle ADC = \gamma.$$

Пусть $AD = x$. Тогда для прямоугольных треугольников справедливо: для треугольника ADB $AB = x\sin\beta$, для треугольника ABC $AC = x\sin\beta\sin\alpha$ и для треугольника ADC $\sin\gamma = AC : AD = \sin\alpha\sin\beta$.

Следовательно, $\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta$. ◆

Еще один способ нахождения угла между прямой и плоскостью основан на применении координатно-векторного метода, который подробно описан в главе 6.

Вычисление угла между плоскостями

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла. Если эти углы равны, то плоскости называются ***перпендикулярными***, угол между ними равен $90°$. Если же плоскости не перпендикулярны, то углом между ними называется меньшая из величин двугранных углов, образованных ими, т. е. угол между плоскостями лежит в пределах от $0°$ до $90°$.

Вычисление угла между плоскостями α и β сводится к определению линейной меры двугранного угла, образованного этими плоскостями. Для этого необходимо с помощью двух перпендикуляров, проведенных в указанных плоскостях к прямой их пересечения a ($a=\alpha\cap\beta$), построить соответствующий линейный угол и найти его величину. Обычно используется один из следующих способов:

1) Выбирается отрезок, один из концов которого лежит в α, другой в β, и из его концов опускаются перпендикуляры к линии пересечения плоскостей a. Отрезок выбирается такой, чтобы, во-первых, основания перпендикуляров совпали, во-вторых, в полученном треугольнике можно было найти необходимые для определения искомого угла элементы.

2) В плоскостях α и β из некоторой точки прямой их пересечения a восстанавливаются перпендикуляры к a. На перпендикулярах выбираются точки, соединяемые отрезком, такие, чтобы в полученном треугольнике можно было найти необходимые для определения искомого угла элементы.

Величину линейного угла из построенного треугольника (лучше – прямоугольного) обычно определяют, применяя теорему косинусов.

Задача 21. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ определить угол между плоскостями сечений AB_1C_1D и CB_1A_1D.

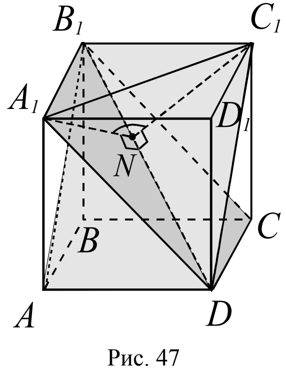


Рис. 47

Решение. □ Пусть ребро куба равно a. B_1D – линия пересечения плоскостей граней AB_1C_1D и CB_1A_1D, так как точки B_1 и D – общие (см. рис. 47). Рассмотрим плоскость, проходящую через диагональ A_1C_1 перпендикулярно B_1D. Пусть N –

точка пересечения этой плоскости с B_1D. Тогда $B_1D \perp C_1N$, $B_1D \perp A_1N$ и $\angle A_1NC_1 -$ линейный угол двугранного угла (или сопряженного с ним), образованного плоскостями A_1B_1D и B_1C_1D.

Прямоугольные треугольники B_1A_1D и B_1C_1D равны, B_1D – их гипотенуза. Следовательно, высоты, опущенные на гипотенузу в равных треугольниках, равны $A_1N = C_1N = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Далее, из равнобедренного треугольника A_1C_1N ($A_1C_1 = a\sqrt{2}$) находим угол $\angle A_1NC_1$, например, по теореме косинусов для стороны A_1C_1:

$$(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\cos(\angle A_1NC_1),$$

откуда $\cos(\angle A_1NC_1) = -0{,}5$ и $\angle A_1NC_1 = 120°$. Следовательно, искомый угол между плоскостями A_1B_1D и B_1C_1D равен $60°$. ♦

Другой метод вычисления угла между плоскостями α и β имеет условное название *«вставка прямоугольного треугольника»* и суть его заключается в следующем. Из какой-нибудь точки одной плоскости α опускается перпендикуляр на плоскость β; затем из его основания проводится еще один перпендикуляр в плоскости β к линии пересечения плоскостей и полученная точка соединяется отрезком с началом первого перпендикуляра. Последний отрезок принадлежит плоскости α и перпендикулярен линии пересечения плоскостей (по теореме о трех перпендикулярах). Угол между ним и вторым перпендикуляром является искомым; а полученный треугольник – прямоугольным.

Решим этим способом задачу 21.

Решение. □ Точка C (см. рис. 48) принадлежит плоскости CB_1A_1 и CK перпендикулярен плоскости грани AB_1C_1D ($CD_1 \perp C_1D$ как диагонали квадрата, и

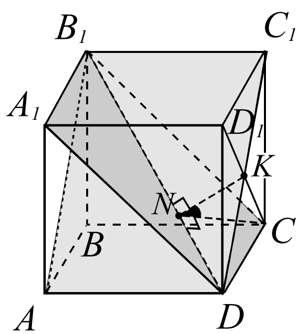


Рис. 48

$CK \perp B_1C_1$, так как ребро B_1C_1 перпендикулярно плоскости грани CC_1D_1D – из чего следует $B_1C_1 \perp CK$).

Затем проводим $KN \perp B_1D$ и получаем $B_1D \perp CN$ (по теореме о трех перпендикулярах: CN по отношению к плоскости AB_1C_1D является наклонной, $CK-$ перпендикуляром и $KN-$ проекцией наклонной CN; тогда, если принадлежащая плоскости грани AB_1C_1D прямая B_1D перпендикулярна проекции KN наклонной CN, то $B_1D \perp CN$). Угол $\angle CNK-$ искомый линейный угол двугранного угла.

Рассмотрим прямоугольный треугольник-«вставку» CNK: $CK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (CD_1- диагональ квадрата); $CN = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (CN является высотой прямоугольного $\triangle B_1CD$, опущенной на гипотенузу). Получаем, что $\sin\angle CNK = \dfrac{CK}{CN} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} : \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ или $\angle CNK = \dfrac{\pi}{3}$. ◆

Замечание. Трудность применения описанного метода состоит в первом шаге: желательно выбрать такое место построения первого перпендикуляра, чтобы легко вычислялась его длина и имелась возможность для определения одной из двух сторон *«вставленного»* треугольника.

Задача 22. В правильной четырехугольной пирамиде, боковая сторона которой равна b, а сторона основания a, найти угол между смежными боковыми гранями.

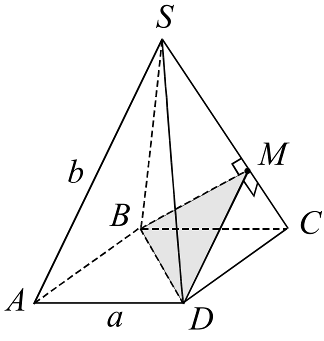


Рис. 49

Решение. □ Найдем угол между боковыми гранями SBC и SDC (см. рис. 49). $SC-$ прямая пересечения этих плоскостей. Рассмотрим плоскость, проходящую через диагональ основания BD перпендикулярно ребру SC. Пусть $M-$ точка пересечения этой плоскости с SC. Тогда $BM \perp SC$ и $DM \perp SC$. Следовательно, $\angle BMD$ – линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями SBC и SDC.

Из равенства треугольников SBC и SDC следует равенство высот $BM = DM$. Найдем DM. Для этого, используя формулу Герона, найдем площадь $\triangle SDC$: $S_{SDC} = \sqrt{p(p-b)^2(p-a)} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{4b^2 - a^2}$ ($SD = SC = b$, $DC = a$; $p = \frac{2b+a}{2}$). Тогда высота DM, опущенная на SC, равна $DM = \frac{2S_{SDC}}{SC} = \frac{a \cdot \sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}$. Далее из равнобедренного треугольника BMD ($BD = a\sqrt{2}$ как диагональ квадрата) находим угол $\angle BMD$, например, по теореме косинусов для стороны BD:

$$\cos\angle BMD = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2 \cdot BM \cdot DM} = \frac{-a^2}{4b^2 - a^2}.$$

Искомый угол между плоскостями $\varphi = \arccos\frac{-a^2}{4b^2 - a^2}$. �

Угол φ между плоскостями α и β можно вычислять, используя формулу $S_{пр.} = S \cdot \cos\varphi$ для вычисления площади ортогональной проекции многоугольника. Здесь $S -$ площадь многоугольника, лежащего в плоскости α, $S_{пр.} -$ площадь его ортогональной проекции на плоскость β. Если S и $S_{пр.}$ известны, то $\cos\varphi = \frac{S_{пр.}}{S}$.

Задача 23. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, через точки M на ребре BB_1 и N на DD_1 такие, что $BM = \frac{3a}{4}$ и $DN = \frac{a}{4}$, параллельно AC проведена секущая плоскость. Определить площадь сечения и угол между секущей плоскостью и плоскостью ABC.

Решение. □ Сечение куба представляет собой параллелограмм $MPNQ$ (см. рис. 50). Поскольку прямая AC параллельна плоскости MNP, то $QP \parallel AC$ (они лежат в одной плоскости), следовательно, прямая пересечения плоскостей MNP и ABC также параллельна AC.

Пусть $S-$ точка пересечения прямой MN с плоскостью основания. Рассмотрим плоскость MBS: $AC \perp MBS$ ($AC \perp BN$, как диагонали квадрата, и $AC \perp BM$, так как ребро куба $BD_1 \perp ABC$).

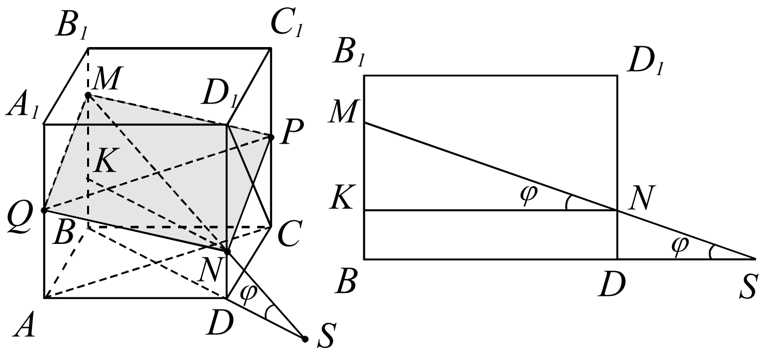


Рис. 50

Следовательно, и прямая пересечения плоскостей MNP и ABC перпендикулярна плоскости MBS. Тогда, MS и $BS-$ два перпендикуляра, восставленные из одной точки прямой пересечения плоскостей, и поэтому $\angle MSB-$ линейный угол φ двугранного угла, образованного заданными плоскостями. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{MB-ND}{BD} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ (см. выносной чертеж), откуда $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\varphi = \arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Так как квадрат $ABCD$ – ортогональная проекция ромба $MPNQ$, то $S_{MPNQ} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos\varphi} = \dfrac{3a^2}{2\sqrt{2}}$. �

Задача 24. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, через точки M, P и N на ребрах BB_1, CC_1 и DD_1 соответственно, такие что $BM = \dfrac{3a}{4}$, $CP = \dfrac{2a}{3}$ и $DN = \dfrac{a}{4}$, проведена секущая плоскость. Определить угол между плоскостью сечения и плоскостью основания куба.

Решение. □ Сечение представляет собой параллелограмм $MPNQ$ (см. рис. 51). Найдем его площадь и поскольку квадрат $ABCD$ – ортогональная проекция $MPNQ$, вычислим косинус угла φ между плоскостью сечения и плоскостью ABC. Найдем стороны треугольника MNP. Используя теорему Пифагора, получим: из прямоугольного треугольника MLP ($ML \perp CC_1$)

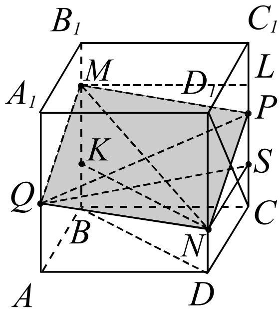


Рис. 51

$$MP = \sqrt{(LC - CN)^2 + MC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{144} + a^2} = \frac{a\sqrt{145}}{12},$$

из прямоугольного треугольника NPS ($NS \perp CC_1$)

$$NP = \sqrt{(CN - SC)^2 + NS^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{144} + a^2} = \frac{13a}{12},$$

из прямоугольного треугольника MNK ($KN \perp BB_1$)

$$MN = \sqrt{KN^2 + (BM - BK)^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$

Полупериметр $\triangle MNP$ равен $p = \frac{\sqrt{145} + 31}{24} \cdot a$. Используя формулу Герона, находим его площадь: $S_{MNP} = \frac{\sqrt{170} \cdot a^2}{24}$. Следовательно, $S_{MNPQ} = 2S_{MNP} = \frac{\sqrt{170} \cdot a^2}{12}$. Из формулы для площади ортогональной проекции получаем $\cos\varphi = \frac{S_{ABCD}}{S_{MPNQ}} = \frac{12}{\sqrt{170}}$ или $\varphi = \arccos\frac{12}{\sqrt{170}}$. �

Еще один способ нахождения угла между плоскостями α и β основан на применении координатно-векторного метода, который подробно описан в главе 6.

§2.7. Применение различных методов для решения задач по вычислению расстояния между скрещивающимися прямыми, параллельными прямой и плоскостью, параллельными плоскостями

Расстояние между параллельными прямой и плоскостью

Нахождения расстояния между прямой и параллельной ей плоскостью, между параллельными плоскостями сводится к нахождению расстояния от точки до плоскости, поскольку

а) расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от произвольной точки прямой до данной плоскости (см. рис. 52а);

б) расстояние между параллельными плоскостями равно расстоянию от произвольной точки одной плоскости до другой плоскости (см. рис. 52б).

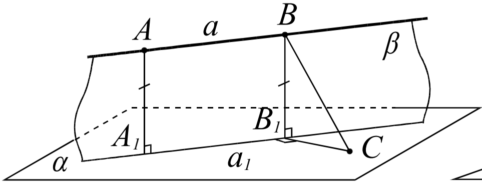


Рис. 52а

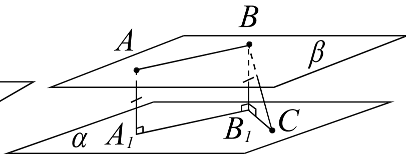


Рис. 52б

В соответствии с этим, как правило, для определения расстояния от точки A до плоскости α строится вспомогательная плоскость β, проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости α. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую пересечения плоскостей α и β.

Задача 25. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S – вершина), сторона основания которой равна a, а боковое ребро l, найти расстояние между прямой AB и плоскостью SCD.

Решение. □ Прямая AB параллельна плоскости SCD ($AB \parallel CD$). Проведем плоскость через вершину S и середины K и M ребер AB и CD (см. рис. 53а). Эта плоскость перпендикулярна плоскости SCD. Перпендикуляр KN к прямой SM является перпендикуляром и к плоскости SCD. Его длина равна искомому расстоянию. Апофемы пирамиды равны: $SK = SM = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}$, высота $SO =$

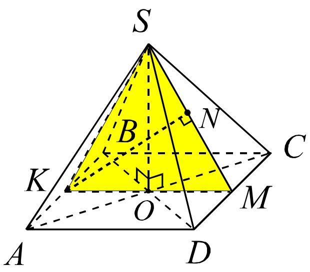


Рис. 53а

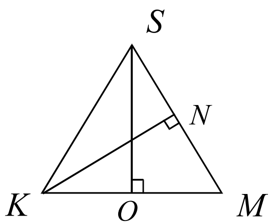


Рис. 53б

$= \sqrt{SK^2 - KO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{2}}$.

Выражая площадь равнобедренного треугольника SKN (см. рис. 53б) двумя способами $\frac{1}{2} SO \cdot KM = \frac{1}{2} SM \cdot KN$, из последнего равенства получаем

$$KN = \frac{SO \cdot KM}{SM} = a \cdot \sqrt{\frac{4l^2 - 2a^2}{4l^2 - a^2}}.$$ �

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми, как известно, равно длине их общего перпендикуляра. Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми можно воспользоваться одним из приведенных ниже четырех способов.

1. Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный обеим) и найти его длину.

2. Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстояние от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.

3. Заключить данные прямые в параллельные плоскости, проходящие через данные скрещивающиеся прямые, и найти расстояние между этими плоскостями.

4. Построить плоскость, перпендикулярную одной из данных прямых, и построить на этой плоскости ортогональную проекцию второй прямой. Тогда искомое расстояние будет равно длине перпендикуляра, опущенного в построенной плоскости из точки, являющейся проекцией

перпендикулярной ей прямой, на проекцию на эту плоскость другой прямой.

Продемонстрируем применение всех четырех указанных способов при решении следующих двух задач.

Задача 26. В кубе, длина ребра которого равна a, найти расстояние между ребром и диагональю не пересекающей его грани.

Решение. □ В качестве примера найдем расстояние между ребром AA_1 и диагональю D_1C (см. рис. 54). Прямые AA_1 и $D_1C -$ скрещивающиеся. Используя каждый из отмеченных способов, покажем, что расстояние между ними равно a.

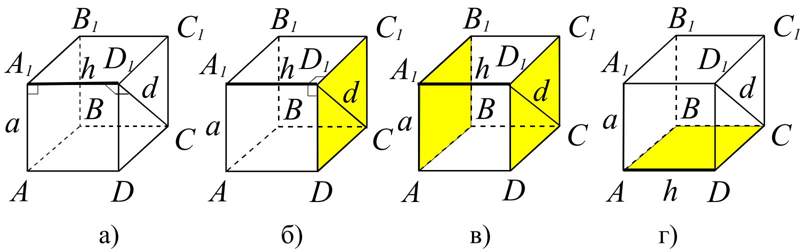


Рис. 54

1-*й способ* (см. рис. 54а). Ясно, что $A_1D_1 \perp AA_1$ и $A_1D_1 \perp D_1C$. Следовательно, $A_1D_1 -$ общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых AA_1 и D_1C. Расстояние между AA_1 и D_1C равно $A_1D_1 = a$.

2-*й способ* (см. рис. 54б). Ясно, что плоскость DD_1C_1, содержащая D_1C, параллельна AA_1 и расстояние от AA_1 до DD_1C_1 равно a.

3-*й способ* (см. рис. 54в). Плоскость DD_1C_1, содержащая D_1C, параллельна плоскости AA_1B_1, содержащей AA_1, и расстояние между ними равно a.

4-*й способ* (см. рис. 54г). Плоскость ABC перпендикулярна прямой AA_1. Точка $A -$ проекция AA_1 на эту плоскость. Проекцией D_1C на плоскость ABC является DC. Расстояние от точки A до DC равно a. �

Задача 27. Найти расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, длина ребра которого равна a .

Решение. □ Найдем расстояние между диагоналями A_1C_1 и AD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1-*й способ*. Пусть отрезок PQ (см. рис. 55) есть общий перпендикуляр скрещивающихся прямых A_1C_1 и AD_1, а PN и KQ – его ортогональные проекции на плоскости $A_1B_1C_1$ и AA_1D_1 соответственно ($PK \perp A_1D_1$ и $QN \perp A_1D_1$). На основании теоремы о трех перпендикулярах $PN \perp A_1C_1$ и $KQ \perp AD_1$. Треугольники A_1PN и KQD_1 – прямоугольные и равнобедренные, поэтому $AK = KN = ND_1 = \dfrac{a}{3}$. Аналогично, $NQ = ND_1 = A_1K = KP = \dfrac{a}{3}$ и $A_1P = PN = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Тогда из прямоугольного треугольника PNQ получим расстояние между A_1C_1 и AD_1: $PQ = \sqrt{PN^2 + NQ^2} = \sqrt{\dfrac{2a^2}{9} + \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

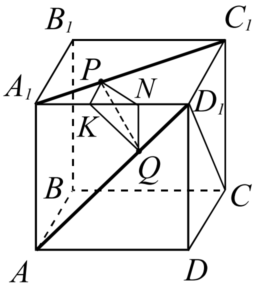


Рис. 55

2-*й способ*. Построим плоскость, содержащую AD_1 и параллельную A_1C_1 (см. рис. 56а). Искомой плоскостью является AD_1C . Найдем расстояние до нее от какой-либо точки прямой A_1C_1. Для этого опустим из точ-

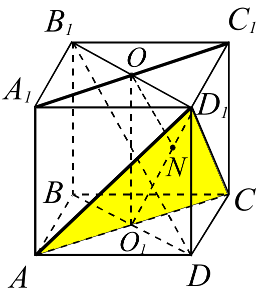


Рис. 56а

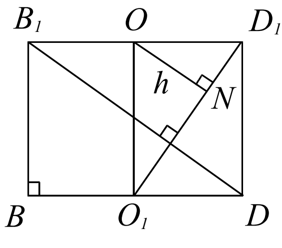


Рис. 56б

ки O (см. рис. 56а) на указанную плоскость перпендикуляр. Плоскости BB_1D_1 и AD_1C перпендикулярны ($AC \perp BD$ и $AC \perp D_1D$, и $AC \subset AD_1C$). Так как $B_1D \perp D_1O_1$ (см. рис. 56б) (докажите самостоятельно!), то $ON \perp AD_1C$ ($ON \parallel B_1D$) и из подобия треугольников BB_1D и OD_1N следует $\dfrac{ON}{BD} = \dfrac{OD_1}{B_1D}$ или $h = ON = \dfrac{BD \cdot OD_1}{B_1D} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

3-*й способ*. Построим параллельные плоскости AD_1C и BA_1C_1 (см. рис. 57а), содержащие прямые AD_1 и A_1C_1 соответственно. Диагональ B_1D куба перпендикулярна обеим плоскостям и (см. рис. 57б) точками K и N делится на три равные части. Расстояние между плоскостями AD_1C и BA_1C_1 равно длине отрезка KN.

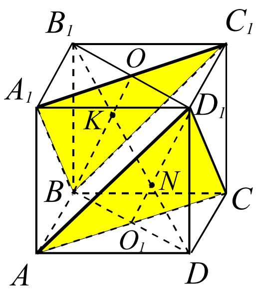


Рис. 57а

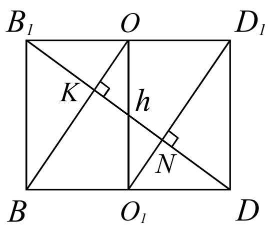


Рис. 57б

4-*й способ*. Плоскость BB_1D_1 перпендикулярна прямой A_1C_1 ($A_1C_1 \perp B_1D_1$ и $A_1C_1 \perp D_1D$) и плоскости AD_1C ($B_1D \perp AD_1C$) (см. рис. 58а). D_1O_1 – проекция AD_1 на плоскость BB_1D_1. Расстояние от точки O (проекции A_1C_1 на плоскость BB_1D_1) до D_1O_1 равно длине отрезка ON (см. рис. 58б). �

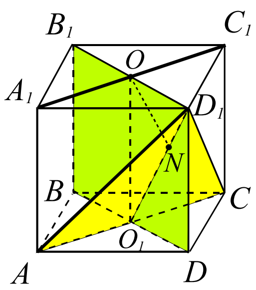


Рис. 58а

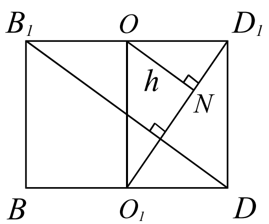


Рис. 58б.

Задача 28. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со сторонами оснований, равными a и b ($a > b$), и высотой h найти расстояние между диагональю BD_1 и диагональю большего основания AC.

Решение. □ Прямые BD_1 и AC скрещиваются (см. рис. 59а). Точки O и O_1 – точки пересечения диагоналей оснований пирамиды. $OO_1 \perp AC$ и $OO_1 \perp BD$, как отрезок, соединяющий середины оснований равнобедренных трапеций BB_1D_1D и AA_1C_1C. Построим плоскость, перпендикулярную одной из скрещивающихся прямых BD_1 и AC. Плоскость $BB_1D_1 \perp AC$, так как AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости: $AC \perp BD$ ($ABCD$ – квадрат) и $AC \perp OO_1$ (OO_1 – высота пирамиды). Прямая BD_1 лежит в плоскости BB_1D_1, поэтому искомое расстояние равно длине перпендикуляра OK, опущенного из точки O на BD_1. OK найдем из подобия прямоугольных $\triangle BD_1N$ и $\triangle BKO$ (см. рис. 59б), имеющих общий острый угол. В

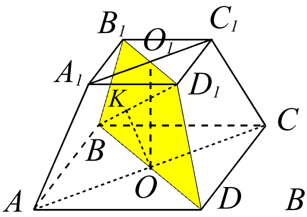


Рис. 59а

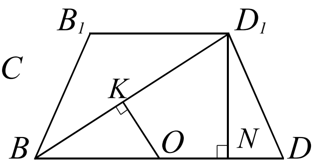


Рис. 59б

$$\triangle BD_1N: \quad D_1N = h, \ BN = BD - ND = a\sqrt{2} - \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2},$$

$$BD_1 = \sqrt{D_1N^2 + BN^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a+b)^2}{2}}. \text{ В } \triangle BKO \ \ BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $\dfrac{OK}{D_1N} = \dfrac{BO}{BD_1}$ или $OK = \dfrac{BO \cdot D_1N}{BD_1} = \dfrac{ah}{\sqrt{2h^2 + (a+b)^2}}$. ■

Глава 3. Построения в пространстве

§3.1. Построение плоских сечений многогранников

Следом плоскости α ***на плоскости*** β называют прямую, по которой плоскость α пересекает плоскость β. ***Следом прямой*** l ***на плоскости*** α называют точку пересечения прямой с плоскостью α.

Центральной проекций произвольной ***точки*** A пространства на плоскость α из центра S называется точка A_1 пересечения плоскости α и прямой SA (см. рис. 1б). Аналогично, ***центральной проекцией*** произвольной ***прямой*** AB пространства на плоскость α из центра S называется прямая A_1B_1, где A_1 и B_1 – центральные проекции точек A и B на плоскость α.

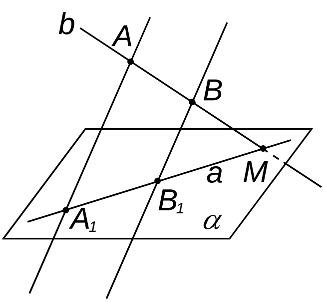


Рис. 1а

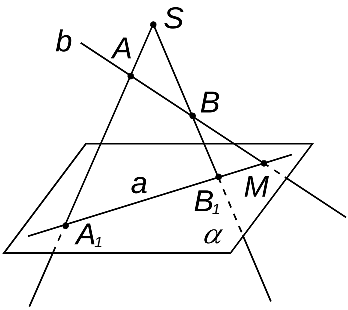


Рис. 1б

Рассмотрим опорную задачу, применяемую при решении многих задач на построение сечений.

Задача 1. Найти точку пересечения данной прямой AB с плоскостью α (AB не параллельна α).

Решение. □ Задача имеет решение в случае, если возможно построить параллельную или центральную проекцию данной прямой AB на плоскость α. В первом (см. рис. 1а) и во втором (см. рис. 1б) случае строятся проекции прямой на плоскость. Так как прямая AB и ее проекции лежат в одной плоскости (образованной: в первом случае параллельными прямыми AA_1 и BB_1, во втором – пересекающимися прямыми SA и SB), то точка их пересечения и есть искомая. �

Рассмотрим конкретные применения разобранной задачи.

Задача 2. Найти точку пересечения прямой MN, где точки M и N лежат соответственно на гранях AA_1B_1B и DD_1C_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, с плоскостью основания ABC ($MN \nparallel ABC$).

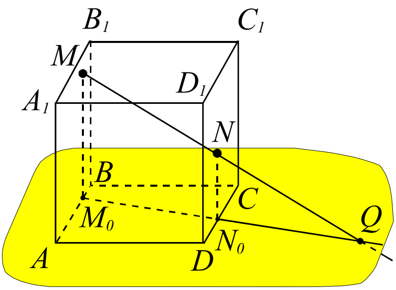


Рис. 2

Решение. □ В соответствии с предыдущей задачей строим параллельную проекцию прямой MN на плоскость ABC (см. рис. 2). Для этого проводим через точки M и N прямые, параллельные ребру AA_1, до пересечения в точках M_0 и N_0 с ребрами AB и DC соответственно. Прямая M_0N_0 – параллельная проекция MN на плоскость ABC. Все ее точки принадлежат плоскости, следовательно, и точка $Q = M_0N_0 \cap MN$ принадлежит плоскости ABC и является искомой. �

Задача 3. В тетраэдре $SABC$ точки N и M лежат на гранях SBC и SAC соответственно. Найти точку пересечения прямой MN с плоскостью основания ABC ($MN \nparallel ABC$).

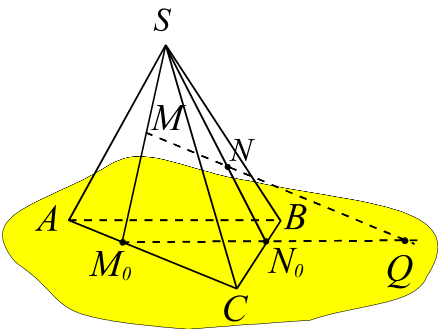


Рис. 3

Решение. □ Для решения задачи строим центральную проекцию с центром в точке S прямой MN на плоскость ABC (см. рис. 3). Для этого проводим через точки N и M прямые SN и SM до пересечения в точках N_0 и M_0 с ребрами CB и AC соответственно. Прямая M_0N_0 – центральная проекция MN на плоскость ABC. Все точки прямой M_0N_0 принадлежат плоскости ABC, следовательно и точка $Q = M_0N_0 \cap MN$ принадлежит плоскости ABC и является искомой. �

Рассмотрим далее задачи на построение линий пересечения двух плоскостей. Обычно для решения подобных задач достаточно найти две общие точки плоскостей – прямая, проходящая через эти точки, и будет искомой.

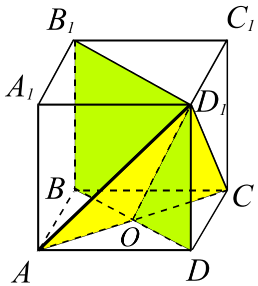


Рис. 4

Задача 4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти линию пересечения плоскостей BB_1D_1 и AD_1C.

Решение. □ Точка D_1 – общая для плоскостей BB_1D_1 и AD_1C (см. рис. 4). Так как прямые BD и AC лежат в плоскости основания куба и в указанных плоскостях, то точка O их пересечения является общей точкой плоскостей BB_1D_1 и AD_1C. Следовательно, прямая D_1O – искомая. �

В общем случае следующая задача является опорной во многих задачах на построение линии пересечения двух плоскостей.

Задача 5. Определить линию пересечения заданной плоскости β с плоскостью α (см. рис. 5).

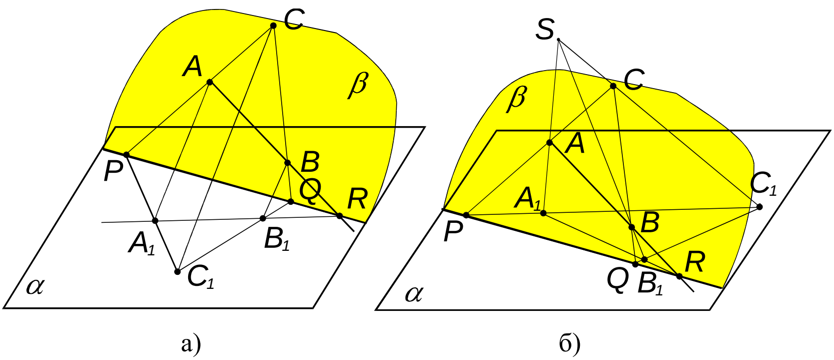


Рис. 5

Решение. □ Как и в случае задачи 1 этого параграфа, для решения этой задачи достаточно построить точки пересечения каких-либо двух прямых плоскости β с плоскостью α. Пусть в β даны три точки A, B и C. Находим, например точки P и R пересечения прямых AC и AB соответственно с плоскостью α. Для этого строим их параллельные (см. рис. 5а) или центральные проекции с центром в точке S, не лежащей в плоскости β (см. рис. 5б). Прямая $PR-$ искомая. Очевидно, что точка Q пересечения прямой CB с плоскостью α также лежит на прямой PR. �

Воспользуемся полученным результатом для решения следующих задач.

Задача 6. В тетраэдре $SABC$ точки N и M лежат на гранях SBC и SAC соответственно. Найти линию пересечения плоскостей SAN и SBM.

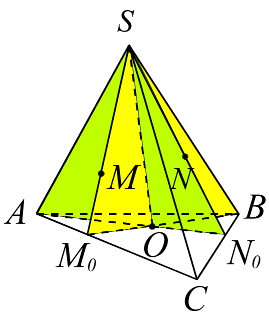


Рис. 6

Решение. □ Так как точка $S-$ общая для указанных плоскостей, то для решения данной задачи достаточно построить еще одну их общую точку. Линиями пересечения плоскости основания и плоскостей SMB и SAN (см. рис. 6) являются соответственно прямые M_0B и AN_0, пересекающиеся в точке O. Следовательно, прямая $SO-$ искомая. �

Задача 7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти линию пересечения плоскостей MNP и B_1EF, где точки M, N, P, E, F лежат на ребрах CC_1, DD_1, AB, CC_1 и AA_1 соответственно (см. рис. 7).

Решение. □ Для решения поставленной задачи строим сначала линии пересечения плоскостей MNP и B_1EF с плоскостью основания – прямые PN_0 и F_0E_0. Для этого находим точки пересечения прямых MN, B_1E и B_1F с плоскостью основания. Построенные прямые PN_0 и F_0E_0 имеют общую точку Q, являющуюся соответственно общей точкой плоскостей MNP и B_1EF. Прямая PN_0 пересекает продолжение ребра BC в точке P_0. Прямые B_1E и MP_0 представляют собой линии пересечения плоскостей MNP и B_1EF с плоскостью BB_1C_1 и пересекаются в точке R – общей точке плоскостей. Получили две общие точки плоскостей MNP и B_1EF, следовательно прямая QR – искомая. �

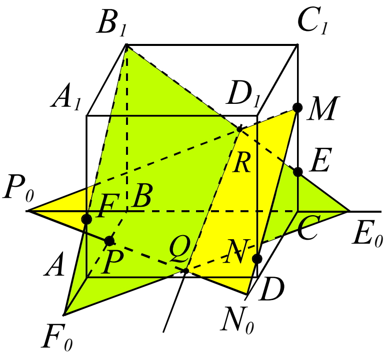


Рис. 7

К задачам 1 и 7 обычно сводятся задачи на построение сечений многогранников.

Построить сечение многогранника плоскостью – это значит построить прямые, являющиеся следами пересечения граней многогранника данной плоскостью. Для построения каждой такой прямой достаточно найти две точки, принадлежащие одновременно и секущей плоскости и плоскости грани (причем не обязательно самой грани).

Секущая плоскость может быть задана различными способами, например:

а) тремя точками, которые не лежат на одной прямой;

б) прямой и точкой, не лежащей на ней;

в) двумя пересекающимися прямыми;

г) некоторыми из указанных выше геометрических элементов в совокупности с различными зависимостями между ними и элементами (гранями, ребрами, диагоналями и т. д.) многогранника. При этом могут быть использованы параллельность, перпендикулярность, задание величин двугранных углов и углов между секущей плоскостью и ребрами многогранника и т. д.

Построение плоских сечений многогранников выполняется на основе соответствующих пространственных аксиом и теорем.

Наиболее часто применяемыми методами построения сечений многогранников плоскостью являются: метод следов, метод внутреннего проектирования и метод переноса секущей плоскости.

Метод следов

При использовании этого метода сначала строится след секущей плоскости на плоскости одной из граней многогранника (диагональной плоскости, плоскости симметрии) и след соответствующих боковых ребер на секущей плоскости. Далее строятся следы секущей плоскости на других гранях при наличии двух следов ребер, принадлежащих соответствующей грани, или их продолжений на секущей плоскости.

Задача 8. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через три заданные на его ребрах точки M, N, P, две из которых лежат на смежных ребрах (см. рис. 8).

Решение. □ Точки M и N лежат в плоскости сечения и в плоскости AA_1B_1, поэтому отрезок MN – след секущей плоскости на грани AA_1B_1B. Для построения следов на других гранях поступаем следующим образом.

Проведя прямую MN до пересечения с прямыми AB и BB_1, лежащими с ней в одной плоскости и не параллельными ей, получим на них следы секущей плоскости K_1 и K_3. Точки K_1 и P лежат в плоскости ABC, следовательно, прямая K_1P – след секущей плоскости на плоскости ABC, точки N_1 и K_2 – следы секущей плоскости на ребре AD и прямой BC соответственно. Точки K_2 и K_3 лежат в плоскости BB_1C_1, следовательно, прямая K_2K_3 – след секущей плоскости на плоскости BB_1C_1, точки P_1 и M_1 – следы секущей плоскости на ребрах CC_1 и B_1C_1 соответственно. Соединяя в указанном порядке точки $M, N, N_1, P, P_1, M_1, M$, получаем искомое сечение – шестиугольник $MNN_1PP_1M_1$. ◆

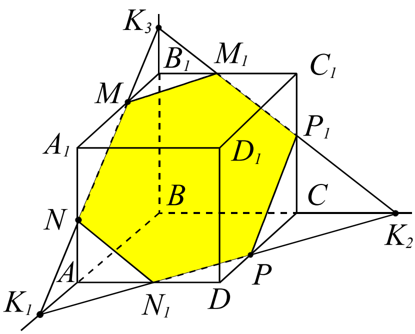


Рис. 8

Несколько сложнее этим способом решается подобная задача в случае, когда точки M, N и P лежат на непересекающихся ребрах куба.

Задача 9. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через три заданные точки M, N, P, лежащие на непересекающихся ребрах (см. рис. 9) при условии, что никакие две из них не лежат в одной грани.

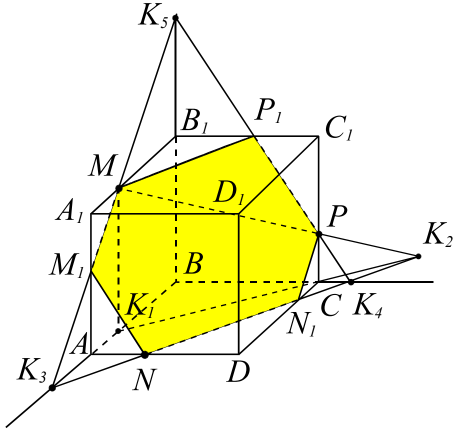


Рис. 9

Решение. □ Найдем точку пересечения прямой MP с плоскостью основания куба. Опустим из заданной точки M перпендикуляр на ребро AB. Для этого проведем через точку M прямую, параллельную ребру AA_1, которая пересечет ребро AB в точке K_1. Аналогично находим основание перпендикуляра, опущенного из точки P на ребро BC. Так как P лежит на ребре куба, то она проектируется в точку C. Тогда точка $K_2 \equiv MP \cap K_1C$ принадлежит плоскости сечения и плоскости основания. Прямая NK_2 – след секущей плоскости на плоскости основания. Соответственно, точка N_1 – след секущей плоскости на ребре CD. Далее задача сводится к предыдущей. �

Описанные выше способы построения сечения куба плоскостью применимы и к аналогичной задаче для пирамиды.

Задача 10. Построить сечение четырехугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через три заданные точки M, N, P, лежащие на ее ребрах (см. рис. 10).

Решение. □ Прямые MN и AD лежат в одной плоскости SAD и не параллельны, следовательно, пересекутся в некоторой точке K_1. Точки K_1 и P принадлежат плоскости основания пирамиды и плоскости сечения, следовательно, прямая K_1P – след секущей плоскости на плоскости основания. Аналогично, прямые K_1P и AB пересекаются в некоторой точке K_2. Точки N_1 и P_1 – следы секущей плоскости на ребрах пирамиды DC и SB соответственно. Соединяя последовательно точки M, N, N_1, P, P_1, M, получаем искомое сечение – пятиугольник MNN_1PP_1. ◆

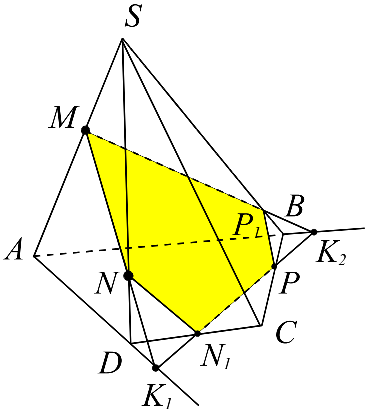


Рис. 10

Задача 11. Даны точки M и N, лежащие на боковых гранях четырехугольной пирамиды, и точка P – на ее боковом ребре (см. рис. 11). Построить сечение пирамиды плоскостью MNP.

Решение. □ Находим на плоскости основания пирамиды следы прямых MN и MP – точки K_1 и K_2, как точки пересечения указанных прямых и их центральных проекций M_0N_0 и M_0B из центра S на плоскость основания. Прямая K_1K_2, являющаяся следом секущей плоскости на плоскости основания, пересекает продолжение ребра AB в точке K_3.

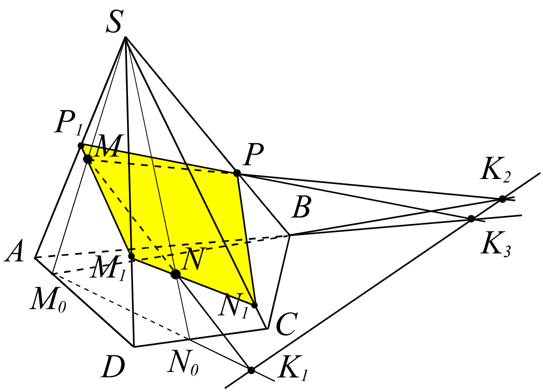


Рис. 11

Точки P и K_3 лежат в плоскости грани SAB и прямая PK_3 пересекает ребро SA в точке P_1. Проводя прямую P_1M до пересечения с ребром SD, получаем точку M_1. Далее задача сводится к предыдущей. Сечение $P_1M_1N_1P$ – искомое. ◆

Метод внутреннего проектирования

При использовании этого метода изначально на плоскости основания многогранника отмечаются четыре точки: три проекции (центральные или параллельные) трех точек, определяющих плоскость сечения, и одна должным образом выбранная вершина основания, принимаемая за проекцию одной из вершин сечения. На плоскости основания проводятся диагонали указанного четырехугольника. Далее на одной из прямых плоскости сечения строится точка, проекцией которой служит точка пересечения диагоналей указанного четырехугольника. Найденная четвертая точка сечения вместе с одной из трех данных точек этого сечения определяет прямую, которая в пересечении с соответствующим ребром многогранника дает точку пересечения секущей плоскости с этим ребром.

Метод внутреннего проектирования является эффективным в тех случаях, когда след секущей плоскости не помещается на чертеже, так как секущая плоскость составляет малый угол с плоскостью основания.

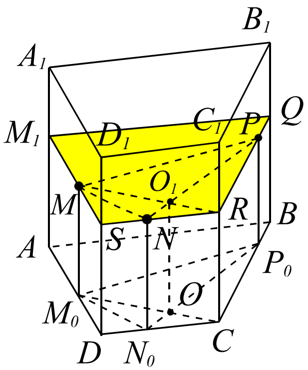


Рис. 12

Задача 12. Построить сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через три заданные точки M, N, P, лежащие на трех ее разных боковых гранях (см. рис. 12).

Решение. □ Проводим через точки M, N, P прямые MM_0, NN_0, PP_0, параллельные ребрам призмы. Так как секущая плоскость не параллельна ребру CC_1, то она пересечет его в некоторой точке R, проекцией которой на плоскость основания является точка C. Соответственно, проекцией четырехугольника $MNRP$, лежащего в секущей плоскости, является четырехугольник $M_0N_0CP_0$. Точка O_1 пересечения диагоналей $MNRP$ ($O_1 \in NP$) в этом случае проектируется в точку O пересечения диагоналей $M_0N_0CP_0$. Соединяя точки M и O_1, и продолжая диагональ до пересечения с ребром CC_1, получаем искомую точку R. Далее, проводя прямые RN и RP до пересечения с ребрами DD_1 и BB_1, получаем следы S и Q секущей плоскости на этих ребрах. Проводя прямую SM до пересечения с ребром AA_1, получаем точку M_1 – след секущей плоскости на этом ребре. Сечение M_1SRQ является искомым. �

Задача 13. Даны точки M, N и P, лежащие на боковых гранях четырехугольной пирамиды (см. рис. 13). Построить сечение пирамиды плоскостью MNP.

Решение. □ Если при решении предыдущей задаче использовались параллельные проекции, то в данной будем использовать центральные проекции. Прямые M_0N_0, M_0P_0 и N_0P_0 – центральные проекции с центром в точке S на плоскость основания пирамиды прямых MN, MP и NP. Так как секущая плоскость не параллельна ребру SC, то она пересечет его в некоторой точке R, центральной проекцией которой на плоскость основания является точка C. Соответственно, центральной проекцией четырехугольника $MNRP$, лежащего в секущей плоскости является четырехугольник $M_0N_0CP_0$. Точка O_1 пересечения диагоналей $MNRP$ проектируется в точку O пересечения диагоналей $M_0N_0CP_0$ ($O_1 = SO \cap NP$). Соединяя точки M и O_1 и продолжая диагональ до пересечения с ребром SC, получаем искомую точку R. Далее, проводя прямые RN и RP до пересечения с ребрами SD и SB, получаем следы F и Q секущей плоскости на этих ребрах. Проводя прямую FM до пересечения с ребром SA, получаем точку M_1 – след секущей плоскости на этом ребре. Сечение M_1FRQ является искомым. �

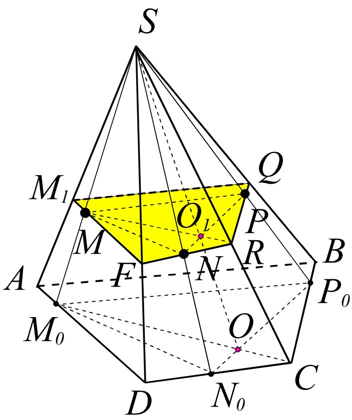


Рис. 13

Метод переноса секущей плоскости

При использовании этого метода вместо секущей плоскости строится параллельная ей вспомогательная плоскость, которая пересекает все три грани некоторого трехгранного угла данного многогранника. Далее путем параллельного переноса строятся некоторые линейные элементы искомого сечения, соответствующие легко строящимся элементам вспомогательной плоскости.

Задача 14. Даны точки M, N и P, лежащие соответственно на боковых ребрах SA, SD и SB четырехугольной пирамиды $SABCD$. Построить сечение пирамиды плоскостью MNP (см. рис. 14).

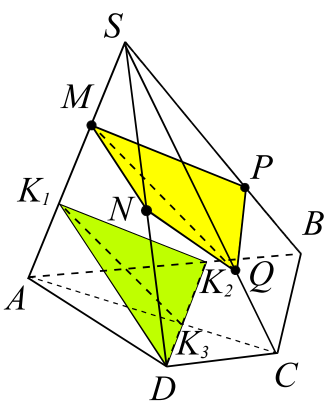


Рис. 14

Решение. □ Проводим через вершину D прямую, параллельную MN, до пересечения с ребром SA. Через полученную точку K_1 параллельно MP проводим прямую до пересечения с ребром AB в точке K_2. Плоскость треугольника DK_1K_2 параллельна плоскости MNP. Плоскость ASC пересекает их по параллельным прямым. Прямая пересечения плоскостей ASC и DK_1K_2 – K_1K_3, где K_3 – точка пересечения диагонали AC четырехугольника $ABCD$ и отрезка DK_2. Через точку M проводим прямую, параллельную K_1K_3, до пересечения с ребром SC. Получаем точку Q. Сечение $MPQN$ является искомым. �

§3.2. Вычисление площади плоского сечения

При вычислении площади сечения многогранника плоскостью обычно используют один из следующих способов.

1. При пересечении секущей плоскостью многогранника в сечении получается плоский многоугольник. Если удается вычислить длины его сторон и какие-нибудь углы, то, разбив многоугольник на части (треугольники и четырехугольники), используя формулы для вычисления площадей соответствующих фигур, можно определить всю площадь сечения.

2. Иногда задача может быть решена с использованием формулы площади ортогональной проекции многоугольника. Так, если известен угол φ между секущей плоскостью и некоторой плоскостью, такой что площадь $S_{пр}$ ортогональной проекции фигуры, полученной в сечении, на нее известна, то площадь сечения $S_{сеч}$ выражается формулой:

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi}.$$

3. Координатно-векторный метод, подробно описанный в главе 6.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 15. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а двугранный угол при основании равен β. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной параллельно плоскости основания через центр вписанного в пирамиду шара.

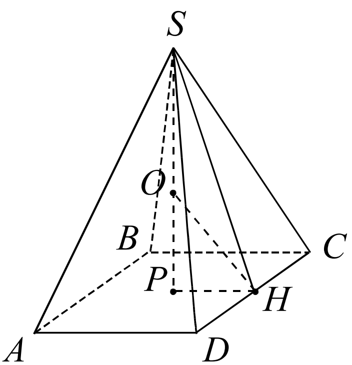


Рис. 15

Решение. □ Пусть $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида, SP – ее высота, SH – высота боковой грани CSD. Тогда двугранный угол при основании равен $\angle SHP = \beta$, а центр вписанного в пирамиду шара (точка O) является пересечением SP и биссектрисы $\angle SHP$ (см. главу 5). Из подобия пирамиды $SABCD$ и пирамиды, отсекаемой от нее плоскостью, проведенной параллельно плоскости основания через центр вписанного шара, получаем: $\dfrac{S_{сеч.}}{S_{ABCD}} = \left(\dfrac{SO}{SP}\right)^2$.

$$S_{ABCD} = a^2,\ SP = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\beta,\ SO = SP - OP,\ OP = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{SO}{SP} = \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}}{\mathrm{tg}\beta} = 1 - \frac{\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\beta}{\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\beta} = 1 - \frac{\cos\beta}{2\cos^2\dfrac{\beta}{2}} = \frac{1}{1+\cos\beta}.$$

Получаем: $S_{сеч.} = \dfrac{a^2}{(1+\cos\beta)^2}$. ■

Задача 16. На боковом ребре DD_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ взята точка M, не принадлежащая ни одному из оснований. Через нее перпендикулярно плоскости AA_1D_1 проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, так что сечения призмы этими плоскостями имеют единственную общую точку. Одно из сечений, площадь которого равна $9\sqrt{2}$, имеет только одну общую точку A_1 с верхним основанием. Площадь другого сечения равна 9 и это сечение содержит центр симметрии нижнего основания. Найти объем призмы.

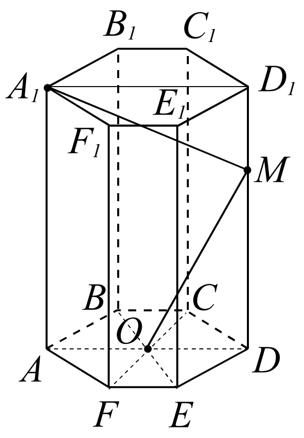


Рис. 16

Решение. □ Пусть сечение площадью $9\sqrt{2}$ образует угол α с плоскостью верхнего основания. Тогда второе сечение образует с нижним основанием угол $90^\circ - \alpha$. Площадь проекции первого сечения на плоскость основания равна площади верхнего основания. Используя формулу площади ортогональной проекции, получим

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = S_1 \cos\alpha ,$$

где $S_1 -$ площадь сечения, т. е. $S_1 = 9\sqrt{2}$. Следовательно,

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = 9\sqrt{2}\cos\alpha .$$

Площадь проекции второго сечения составляет половину площади нижнего основания:

$$\frac{S_{ABCDEF}}{2} = S_2 \cos(90^\circ - \alpha) = S_2 \sin\alpha ,$$

где $S_2 -$ площадь сечения, т. е. $S_2 = 9$. Следовательно.

$$S_{ABCDEF} = 18\sin\alpha .$$

Так как площади верхнего и нижнего основания призмы равны $S_{ABCDEF} = S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$, то получаем уравнение

$$9\sqrt{2}\cos\alpha = 18\sin\alpha .$$

Отсюда следует $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Применяя формулу $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, получаем $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Найдем сторону шестиугольника. Для этого выразим площадь $S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$ двумя способами. Так, $S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1^2$ и $S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = 9\sqrt{2}\cos\alpha = 9\sqrt{2}\frac{\sqrt{6}}{3} = 6\sqrt{3}$. Отсюда $A_1B_1 = 2$.

Найдем высоту призмы

$DM = OD \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = AB \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{2}$ (см. рис. 16),

$D_1M = A_1D_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, $DD_1 = 4\sqrt{2}$.

Найдем объем призмы:

$$V = S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} \cdot DD_1 = 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} = 24\sqrt{6} . \blacklozenge$$

§3.3. Геометрические места в пространстве

Геометрическим местом называется некоторая совокупность всех элементов пространства (плоскости), положения которых удовлетворяют одному или нескольким условиям. Элементами могут служить точки, прямые, плоскости и другие множества точек.

Чтобы доказать, что фигура P является геометрическим местом точек со свойством A, нужно доказать два предложения:

1) Все точки P обладают свойством A.

2) Ни одна точка, не принадлежащая P, не обладает свойством A.

Важнейшими примерами геометрических мест точек (далее будем обозначать ГМТ) в пространстве являются:

(1) ГМТ, равноудаленных от двух точек A и B, – плоскость, проходящая через середину отрезка AB перпендикулярно этому отрезку.

(2) ГМТ, равноудаленных от двух параллельных прямых a и b, – плоскость, перпендикулярная плоскости, содержащей эти прямые, параллельная прямым им и проходящая через середину какого-либо отрезка AB, где $A \in a, B \in b$.

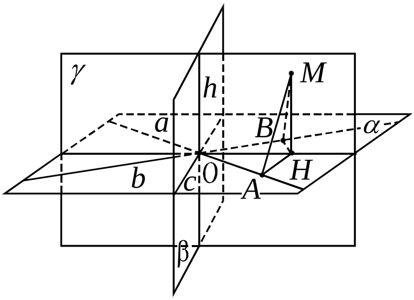


Рис. 17

(3) ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, – две плоскости, перпендикулярные плоскости, содержащей эти прямые, причем одна из них проходит через одну, а другая – через другую биссектрису угла между данными прямыми (см. рис. 17).

(4) ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей α и β, – плоскости γ и δ, делящие пополам двугранные углы между плоскостями α и β (см. рис. 18).

Эти плоскости называют ***биссекториальными плоскостями*** (или ***биссекторными плоскостями***, или ***биссекторами***).

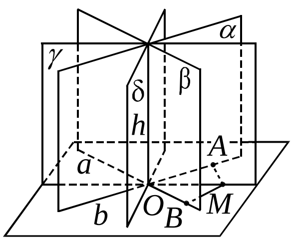


Рис. 18

(5) ГМТ, равноудаленных от двух параллельных плоскостей α и β, – плоскость γ, параллельная α и β и проходящая через середину какого-либо отрезка AB, где $A \in \alpha, B \in \beta$.

(6) ГМТ, равноудаленных от точек A, B, C (не лежащих на одной прямой), – прямая, перпендикулярная плоскости ABC и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника ABC. Если A, B, C различны и лежат на одной прямой, то это геометрическое место является пустым множеством.

(7) ГМТ, равноудаленных от четырех точек A, B, C, D, не лежащих в одной плоскости, – центр сферы, содержащей эти точки.

(8) ГМТ, равноудаленных от граней трехгранного угла, – прямая, являющаяся пересечением биссекториальных плоскостей двугранных углов этого трехгранного угла. Эту прямую иногда называют ***биссектрисой трехгранного угла.***

(9) Геометрическое место середин отрезков AB, где точки A и B лежат на параллельных плоскостях α и β соответственно, – плоскость, параллельная α и β.

(10) Геометрическое место середин отрезков AB, где точки A и B лежат на пересекающихся плоскостях α и β, – все пространство.

(11) Геометрическое место середин отрезков AB, где $A-$ фиксированная точка, а точка B лежит на плоскости α, – плоскость, параллельная плоскости α.

(12) Геометрическое место середин отрезков AB, где точки A и B лежат на скрещивающихся прямых a и b соответственно, – плоскость, параллельная прямым a и b.

(13) Геометрическое место точек, находящихся на заданном расстоянии от точки, – сфера; от прямой, – поверхность прямого кругового цилиндра; от плоскости, – две параллельные плоскости.

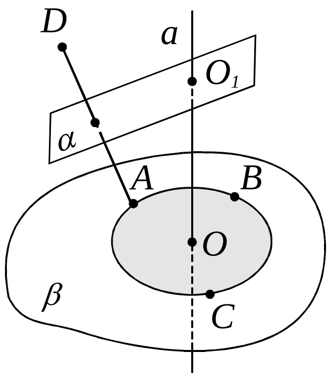
Отметим, что геометрическое место, как и всякое множество, может содержать «мало» элементов, например один или даже ни одного (пустое множество).

Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от трех вершин треугольника, – это единственная точка (центр описанной окружности).

Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от всех точек данной прямой, – пустое множество; таких точек не существует.

Задача 17. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от четырех данных точек (не лежащих в одной плоскости).

Решение. □ Пусть даны точки A, B, C и D (см. рис. 19). Так как они не лежат в одной плоскости, то никакие три из них не лежат на одной прямой. Искомым геометрическим местом точек является единственная точка O_1 (центр сферы, проведенной через точки A, B, C и D).



1) Искомая точка O_1 одинаково удалена от точек A, B и C, следовательно, лежит на прямой a, перпендикулярной плоскости $\beta \equiv ABC$ и проходящей через точку O – центр окружности, проведенной через точки A, B и C (см. рис. 19).

2) Искомая точка O_1 одинаково удалена от точек A и D, следовательно, лежит в плоскости α, перпендикулярной прямой AD и проходящей через середину отрезка AD.

3) Прямая a и плоскость α пересекаются (докажите!) в единственной точке O_1, которая является искомой. �

Использованный при решении этой задачи метод геометрических мест является в геометрии важнейшим методом построения. Его суть сводится к следующему. Пусть требуется построить точку M, обладающую двумя свойствами – A и B. Находим геометрическое место точек, обладающих только свойством A, затем только свойством B. Искомая точка M должна быть общей для обоих геометрических мест, например, должна являться их точкой пересечения.

Глава 4. Многогранники

§4.1. Призма и параллелепипед

Призма

Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани – параллелограммы. Первые две грани называются ***основаниями призмы****,* а все остальные – ***боковыми гранями.*** Призма называется ***треугольной, четырехугольной, пятиугольной*** и т. д. (в общем случае n***-угольной***) в зависимости от того, какой многоугольник лежит в основании призмы. У n-угольной призмы $2n$ вершин, $3n$ ребер, $n+2$ грани.

Из определения призмы следует, что в основаниях призмы лежат равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а боковые грани призмы – параллелограммы.

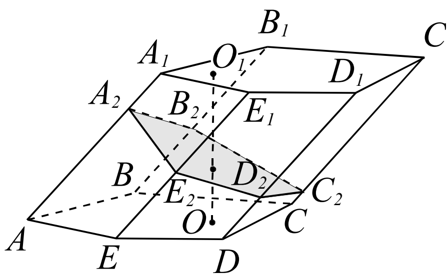


Рис. 1

Общие стороны боковых граней призмы называются ***боковыми ребрами*** призмы. Отрезок OO_1 (см. рис. 1) прямой, перпендикулярной плоскостям оснований призмы, заключенный между ними, называется ***высотой*** призмы. ***Диагональ*** призмы – отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани. У n-угольной призмы $n(n-3)$ диагонали. ***Диагональной плоскостью*** призмы принято называть плоскость, проходящую через диагональ основания и боковое ребро призмы, а фигуру, полученную при пересечении этой плоскости с поверхностью призмы, называют ***диагональным сечением*** призмы. Сечение призмы плоскостью, перпендикулярной ее боковым ребрам, называют ***перпендикулярным сечением*** призмы. На рис. 1 фигура $A_2B_2C_2D_2E_2$ является перпендикулярным сечением рассматриваемой призмы.

Призма называется ***прямой***, если ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания и ***наклонной*** – если ее боковые ребра не перпендикулярны плоскости основания. В прямой призме высота OO_1 параллельна всем ее боковым ребрам. Прямая призма называется ***правильной***, если ее основания – правильные многоугольники.

Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы.

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к плоскостям оснований, называется ***прямым***. В противном случае параллелепипед называется ***наклонным.***

Прямой параллелепипед, основания которого – прямоугольники, называется ***прямоугольным.*** Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники. Длина каждого из трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называется ***измерениями*** параллелепипеда.

Прямоугольный параллелепипед, все три измерения которого равны между собой, называется ***кубом***.

Некоторые свойства параллелепипеда.

1. В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны.

2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

3. Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер: $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$.

4. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Следствие. В прямоугольном параллелепипеде все четыре диагонали равны между собой.

Поверхность призмы и параллелепипеда

Боковой поверхностью призмы (параллелепипеда) называется сумма площадей всех ее боковых граней.

Полной поверхностью призмы (параллелепипеда) называется сумма ее боковой поверхности и площадей оснований.

Боковая поверхность призмы (параллелепипеда) равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Объем призмы и параллелепипеда

Объемом геометрического тела называется величина части пространства, занимаемого этим телом. Принято рассматривать объем как величину, обладающую следующими свойствами:

а) равные тела имеют равные объемы;

б) объем какого-нибудь тела, состоящего из частей, равен сумме объемов этих частей;

в) если из двух геометрических тел первое содержится целиком внутри второго, то объем первого тела не превосходит объема второго.

Тела равного объема называются ***равновеликими***. В качестве единицы объема принимается объем куба с ребром равным единице длины.

Объем куба. ***Объем куба равняется кубу его ребра***.

Объем параллелепипеда. ***Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:***

$$V = abc \text{ куб. ед.},$$

где a, b, c ***– измерения параллелепипеда.***

Объем прямоугольного и наклонного параллелепипеда равен произведению его площади основания на высоту: $V = H \cdot S_{осн}$.

Объем призмы. ***Наклонная призма равновелика такой прямой призме, основание которой равно перпендикулярному сечению наклонной призмы, а высота – ее боковому ребру.***

На рис. 2 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – наклонная, а $A_2B_2C_2D_2A_3B_3C_3D_3$ – прямая призма, основание которой $A_2B_2C_2D_2$ перпендикулярно боковым ребрам наклонной призмы, а высота (боковое ребро) $A_2A_3 = AA_1 = H$. В таком случае

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = V_{A_2B_2C_2D_2A_3B_3C_3D_3}.$$

Объем произвольной призмы равен произведению площади основания на высоту: $V = H \cdot S_{осн}$,

где $S_{осн}$ – площадь основания, а H – высота.

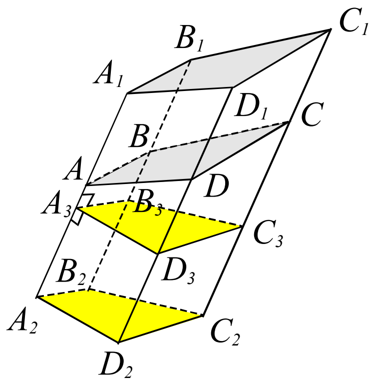


Рис. 2

Принцип Кавальери. ***Если два тела могут быть расположены так, что любая плоскость, параллельная какой-нибудь данной плоскости и пересекающая оба тела, дает в сечении с ними равновеликие фигуры, то объемы таких тел равны.***

Рассмотрим теперь несколько типичных задач, дополняющих результаты, изложенные выше.

Задача 1. Каждое ребро правильной треугольной призмы равно a. Через сторону основания и середину оси (ось – отрезок, соединяющий центры оснований) проведена плоскость. Найти площадь сечения призмы этой плоскостью.

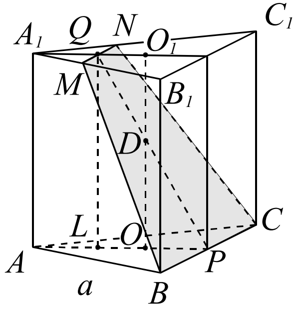


Рис. 3

Решение. □ Пусть все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a (см. рис. 3). Через ребро основания BC и середину D оси OO_1 проведем плоскость, которая пересечет основание $A_1B_1C_1$ по прямой, параллельной B_1C_1. Точки пересечения этой прямой с ребрами A_1B_1 и A_1C_1 соответственно обозначим через M и N. Соединив точки M и B, N и C, получим сечение $BMNC$. Так как $MN \parallel BC$, то четырехугольник $BMNC$ – трапеция, и ее высотой будет отрезок PQ ($LP \perp BC$, следовательно, и $QP \perp BC$). Тогда площадь сечения $BMNC$ равна $S = (BC + MN) \cdot QP / 2$.

По условию задачи $BC = a$. $\triangle DOP = \triangle DO_1Q$ ($OD = DO_1$; $\angle PDO = \angle QDO_1$ и эти треугольники прямоугольные). Тогда $OP = O_1Q = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ (как радиус окружности, вписанной в треугольник ABC). Из прямоугольника LQO_1O получим $LO = QO_1$. Так как $QL = AA_1 = a$, то из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника QLP находим $PQ = \sqrt{LP^2 + LQ^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + a^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Из подобия треугольников A_1MN и $A_1B_1C_1$ ($MN \parallel B_1C_1$) следует

$$\frac{MN}{B_1C_1} = \frac{A_1Q}{A_1P_1} = \frac{1}{3} \text{ или } MN = \frac{1}{3}B_1C_1 = \frac{1}{3}a.$$

Подставляя найденные значения BC, PQ и MN в формулу площади сечения, получаем $S = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{3}a\right) \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$. ◆

Если известны l – длина бокового ребра призмы, $S_\perp$ – площадь и $P_\perp$ – периметр ее перпендикулярного сечения, то для вычисления площади боковой поверхности и объема призмы используются формулы:

$$S_{бок} = l \cdot P_\perp \text{ и } V = l \cdot S_\perp.$$

Задача 2. В наклонной треугольной призме длины боковых ребер равны 8 *см*. Стороны перпендикулярного сечения относятся как $9:10:17$, а его площадь равна $144\,см^2$. Определить площадь боковой поверхности призмы.

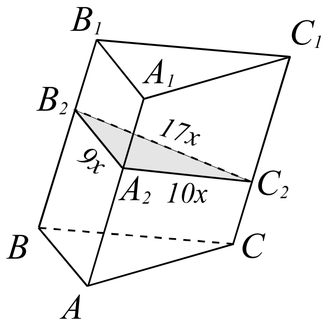


Рис. 4

Решение. □ Рассмотрим призму $ABCA_1B_1C_1$, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 8$ *см*, $A_2B_2C_2$ – ее перпендикулярное сечение (см. рис. 4). Площадь боковой поверхности призмы равна:

$$S_{бок.} = (A_2B_2 + B_2C_2 + C_2A_2) \cdot AA_1.$$

Согласно условию задачи $S_{A_2B_2C_2} = 144\,см^2$ и стороны треугольника $A_2B_2C_2$ находятся в отношении $A_2B_2 : A_2C_2 : C_2B_2 = 9:10:17$. Обозначим $A_2B_2 = 9x$, $A_2C_2 = 10x$, $C_2B_2 = 17x$. Используя формулу Герона, найдем площадь треугольника $A_2B_2C_2$: $\sqrt{18x \cdot x \cdot 8x \cdot 9x} = 36x^2$, а по условию эта площадь равна 144 $см^2$, т. е. $36x^2 = 144$. Отсюда получаем $x = 2$ *см*. Следовательно, $A_2B_2 + B_2C_2 + C_2A_2 = 36x = 72$ *см*, и $S_{бок.} = 72 \cdot 8 = 576$ $см^2$. ◆

Задача 3. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна m^2, а расстояние от противолежащего ребра до нее равно $2a$. Найти объем призмы.

Решение. □ Пусть $A_2B_2C_2$ (см. рис. 5) – перпендикулярное сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ и $A_2B_2 \perp DC_2$, тогда согласно условию задачи $DC_2 = 2a$, а площадь боковой граней ABB_1A_1 равна

$$S_{ABB_1A_1} = A_2B_2 \cdot AA_1 = m^2.$$

Объем призмы равен

$$V = AA_1 \cdot S_{A_2B_2C_2}$$

или

$$V = \frac{AA_1 \cdot DC_2 \cdot A_2B_2}{2} = am^2. \ \blacklozenge$$

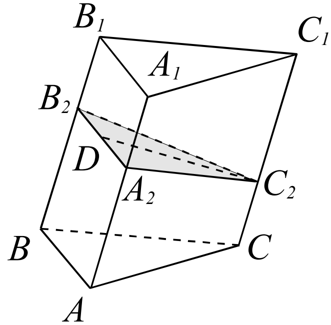


Рис. 5

Задача 4. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, площади граней которого равны Q_1, Q_2 и Q_3.

Решение. □ Обозначим измерения параллелепипеда через x, y и z. Объем прямоугольного параллелепипеда равен $V = xyz$, а площади его граней соответственно

$$xy = Q_1,\ xz = Q_2 \text{ и } yz = Q_3.$$

Перемножив правые и левые части трех последних равенств, получим $(xyz)^2 = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3$ или $V^2 = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3$. Следовательно,

$$V = \sqrt{Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3}. \ \blacklozenge$$

§4.2. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, ограниченный гранями многогранного угла и плоскостью, пересекающей все его грани (см. рис. 6). ***Основанием*** пирамиды называется многогранник, полученный в секущей плоскости ($ABCDE$). ***Боковыми гранями*** пирамиды называются треугольники ASB, BSC, … с общей вершиной S, которая называется ***вершиной*** пирамиды. Боковыми ***ребрами*** пирамиды называются ребра, по которым пересекаются боковые грани. ***Высотой пирамиды*** называется перпендикуляр SO, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания. Пирамида называется ***правильной,*** если ее основание – правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр этого многоугольника. ***Апофемой*** правильной пирамиды называется высота боковой грани.

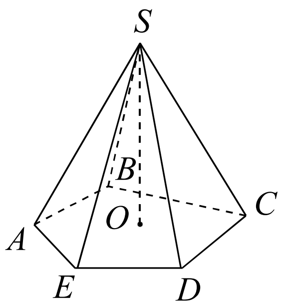


Рис. 6

Отметим, что в пирамиде буквой S обычно обозначают и ее вершину и поверхность (полную или ее частей). Однако это не приводит к недоразумению, так как по смыслу всегда ясно, о чем идет речь в каждом конкретном случае. Кроме того, если рассматривают поверхность или площадь, то в обозначение часто еще вводят дополнительные индексы, например, $S_{\text{бок}}$ (боковая поверхность), S_{ABCD} (площадь основания $ABCD$), S_{ASB} (площадь грани ASB) и т. д.

Свойства сечений пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

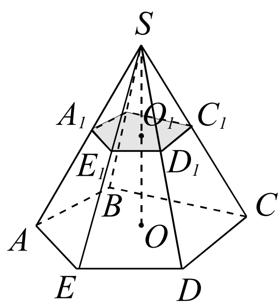


Рис. 7

Теорема 1. ***Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то:***

а) ***боковые ребра и высота пирамиды разделяются этой плоскостью на пропорциональные отрезки;***

б) ***в сечении получится многоугольник, подобный многоугольнику, лежащему в основании;***

в) ***площади сечения и основания будут относиться друг к другу как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.***

На рис. 7 в пирамиде $SABCDE$ плоскости $A_1B_1C_1 \parallel ABC$. Тогда:

а) $\dfrac{SA_1}{SA} = \dfrac{SB_1}{SB} = \dfrac{SC_1}{SC} = \dfrac{SD_1}{SD} = \dfrac{A_1B_1}{AB}$;

б) многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ подобен многоугольнику $ABCDE$;

в) $\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}} = \dfrac{SO_1^2}{SO^2}$.

Теорема 2. ***Если две пирамиды с равными высотами пересечь плоскостями, параллельными основаниям, на одинаковом расстоянии от вершины, то площади сечений будут пропорциональны площадям оснований.***

Следствие. Если у двух пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами провести параллельные основаниям сечения на одинаковых расстояниях от вершины, то сечения будут равновеликими.

Поверхность пирамиды. ***Боковой поверхностью пирамиды*** называется сумма площадей ее боковых граней.

Боковая поверхность правильной пирамиды может быть вычислена по формуле

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} m \cdot P,$$

где P – периметр многоугольника основания, а m – апофема.

Полной поверхностью пирамиды называется сумма площади ее боковой поверхности и площади основания.

Объем пирамиды. ***Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту:***

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h,$$

где $S_{осн.}$ – площадь основания, а h – высота пирамиды.

Задача 5. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре – в плоскости ее основания. Определить ребро куба, если в пирамиде сторона основания равна a и высота равна h.

Решение. □ На рис. 8 изображена пирамида $SABCD$ с вписанным в нее кубом $MNPQM_1N_1P_1Q_1$, четыре вершины которого лежат на боковых ребрах пирамиды, а остальные – в плоскости основания.

Пусть ребро куба равно x. Рассмотрим подобные треугольники SO_1B и SON ($ON \parallel O_1B$). Из их подобия следует $\dfrac{SO}{SO_1} = \dfrac{ON}{O_1B}$.

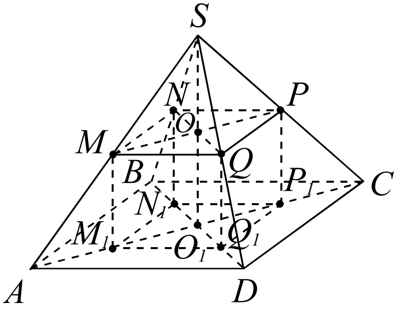


Рис. 8

Так как $SO_1 = h$, $SO = h - x$, $ON = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ и $O_1B = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, то $\dfrac{h-x}{h} = \dfrac{x}{a}$. Отсюда $x = \dfrac{ah}{a+h}$ ◆

Задача 6. Основание пирамиды – квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Определить площадь боковой поверхности этой пирамиды, если сторона основания равна a, а высота h.

Решение. □ Пусть пирамида $SABCD$ (см. рис. 9) удовлетворяет условию задачи. Высота $SB = h$, а сторона основания $ABCD$ равна a. Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей боковых граней: $S_{бок} = S_{ASD} + S_{DSC} + S_{CSB} + S_{BSA}$.

Треугольники ABS и CBS – прямоугольные и равные, и их площади $S_{ASB} = S_{CBS} = \dfrac{ah}{2}$. Из теоремы Пифагора для этих треугольников находим $AS = SC = \sqrt{h^2 + a^2}$.

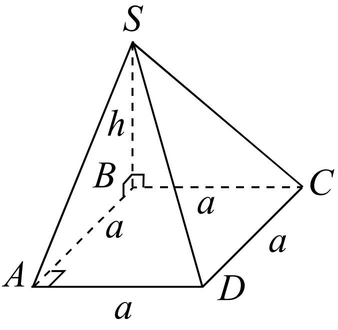


Рис. 9

$DC \perp CB$ и $DA \perp AB$, как стороны квадрата, тогда по теореме о трех перпендикулярах $SC \perp DC$ и $SA \perp AD$. Треугольники SAD и SCD прямоугольные и равные, и $S_{ASD} = S_{CSD} = \dfrac{a\sqrt{h^2+a^2}}{2}$. Тогда

$$S_{бок.} = 2\left(\frac{ah}{2} + \frac{a\sqrt{h^2+a^2}}{2}\right) = ah + a\sqrt{h^2+a^2}.$$ ◆

Задача 7. Доказать, что если в двух пирамидах, имеющих по равному двугранному углу при основании, равны также и ребра этих углов, то отношение объемов этих пирамид равно отношению произведений площадей граней, образующих равные двугранные углы.

Решение. □ Пусть пирамиды $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 10), имеют равные двугранные углы $SACB$ и $S_1A_1D_1C_1$, также $AC = A_1D_1$. Построим линейные углы SMO и $S_1M_1O_1$ данных равных двугранных углов. По условию $\angle SMO = \angle S_1M_1O_1$. Тогда прямоугольные треугольники MSO и $M_1S_1O_1$ подобны и

$$\frac{SO}{S_1O_1} = \frac{SM}{S_1M_1}.$$

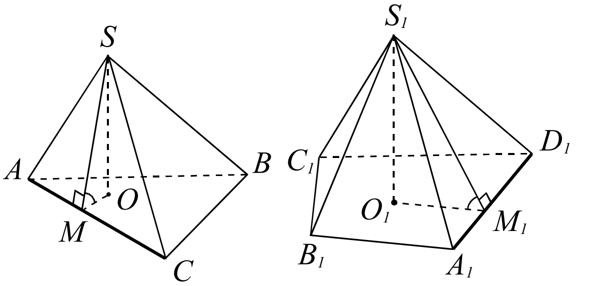


Рис. 10

Площади боковых граней SAC и $S_1A_1D_1$ относятся как их высоты, поскольку $AC = A_1D_1$, т.е.

$$\frac{S_{\triangle SAC}}{S_{\triangle A_1S_1D_1}} = \frac{SM}{S_1M_1} = \frac{SO}{S_1O_1}.$$

Найдем отношение объемов данных пирамид

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1B_1C_1D_1}} = \frac{\frac{1}{3}SO \cdot S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{3}S_1O_1 \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{S_{\triangle SAC} \cdot S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}}.$$

Таким образом, $\dfrac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1B_1C_1D_1}} = \dfrac{S_{\triangle SAC} \cdot S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}}$, что и требовалось доказать. �

Замечание. Приведенное доказательство не зависит от того, какие многоугольники лежат в основании пирамид. Если же ребра равных двугранных углов в рассматриваемых пирамидах не равны между собой, то отношение объемов этих пирамид прямо пропорционально произведениям площадей граней, образующих эти углы, и обратно пропорционально длинам их ребер, т. е.

$$\frac{V_{SABC}}{V_{S_1A_1C_1D_1}} = \frac{S_{\vartriangle ASB} \cdot S_{\vartriangle ABC}}{S_{\vartriangle A_1S_1D_1} \cdot S_{A_1B_1C_1D_1}} \cdot \frac{A_1D_1}{AB}.$$

Высота пирамиды

Приведем несколько фактов, которые легко доказываются и полезны при решении задач, поскольку позволяют установить расположение высоты пирамиды и положение основания высоты на плоскости основания пирамиды.

1. Если боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, то высота пирамиды проходит в плоскости этой грани, а основание высоты лежит на той стороне основания (или на ее продолжении), по которой эта грань пересекается с плоскостью основания.

2. Если два смежных боковых ребра пирамиды равны, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре, проведенном через середину той стороны основания, из концов которой исходят эти боковые ребра.

3. Если две смежные боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла, образованного теми сторонами основания, через которые проходят эти боковые грани.

4. Если боковое ребро пирамиды образует равные углы с двумя примыкающими к нему сторонами основания, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла, образованного этими сторонами основания.

5. Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно пересекающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре, восставленном (в плоскости основания пирамиды) к этой стороне из точки ее пересечения с этим боковым ребром.

6. Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре, опущенном на эту сторону из точки пересечения этого бокового ребра с плоскостью основания. (В частности, если боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на той высоте лежащего в основании пирамиды треугольника, которая опущена на эту сторону).

Заметим, что если пирамида обладает какими-либо двумя из этих особенностей, то можно однозначно указать точку, являющуюся основанием высоты пирамиды. Например:

1) Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно плоскости основания, то это боковое ребро и служит высотой пирамиды.
2) Если все боковые ребра пирамиды равны между собой, то основанием высоты пирамиды служит центр окружности, описанной около лежащего в основании пирамиды многоугольника.
3) Если все боковые грани пирамиды имеют равные углы наклона к плоскости основания, то основанием высоты пирамиды служит центр окружности, вписанной в лежащий в основании пирамиды многоугольник.

§4.3. Правильная пирамида[1]

Соотношения между углами в правильной пирамиде

На рис. 11 изображена часть правильной n-угольной пирамиды $SABCD\ldots$, SH – высота, SK – апофема. Введем следующие обозначения: α – угол между боковым ребром и плоскостью основания; β – угол между боковой гранью и плоскостью основания; γ – угол между смежными боковыми ребрами; φ – угол между смежными боковыми гранями.

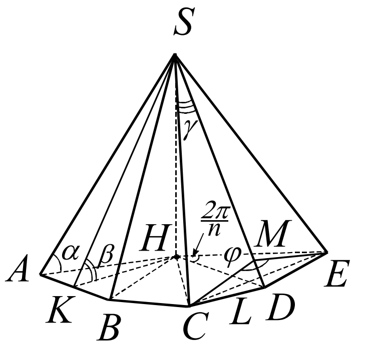


Рис. 11

Если в правильной пирамиде известен один из этих углов, то можно найти остальные три. Шесть соотношений приведены в таблице.

[1] В данном параграфе использованы материалы статьи В.К. Егерев, А.Г. Мордкович «Правильная пирамида», «Квант», 1975 г., №3, стр 61-65.

Углы	Соотношения	Область изменения углов	Связи между углами
$\alpha;\varphi$	$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ (1)	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	
$\alpha;\gamma$	$\cos\alpha = \frac{\sin(\gamma/2)}{\sin(\pi/n)}$ (2)	$0<\beta<\frac{\pi}{2}$	$\gamma<\pi-2\alpha$
$\alpha;\beta$	$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\cdot\cos\frac{\pi}{n}$ (3)	$0<\gamma<\frac{2\pi}{n}$	$\alpha<\beta$
$\beta;\gamma$	$\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$ (4)	$\pi-\frac{2\pi}{n}<\varphi<\pi$	
$\beta;\varphi$	$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2}\cos(\varphi/2)}{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}$ (5)		$\varphi>\pi-2\beta$
$\gamma;\varphi$	$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{-\cos\varphi-\cos\frac{2\pi}{n}}}{\sqrt{2}\sin(\varphi/2)}$ (6)		

Докажем некоторые из соотношений.

(1) Пусть даны α и φ. Из $\triangle LMC$ и $\triangle LMD$ ($L = CE\cap HD$ см. рис. 11), получаем $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{CL}{LM}$, $\sin\alpha = \frac{LM}{LD}$. Значит, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\alpha =$ $= \frac{CL}{LD} = \operatorname{tg}\angle CDL = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$ и $\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$

(2) Пусть даны α и γ. Из $\triangle AHS$ и $\triangle AKS$ (см. рис. 11), получаем $\cos\alpha = \frac{AH}{AS}$, $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{AK}{AS}$ и $\frac{\sin(\gamma/2)}{\cos\alpha} = \frac{AK}{AH} = \sin\angle AHK = \sin\frac{\pi}{n}$.

(3) $(\alpha;\beta)$. Из треугольников AHS и SHK (см. рис. 11) получаем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{SH}{AH}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{SH}{KH}$. Значит, $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{KH}{AH} = \cos\angle AHK = \cos\frac{\pi}{n}$.

Отметим некоторые следствия из этих формул.

Из (1) следует, что $\varphi/2 > \pi/2 - \pi/n$ или $\varphi > \pi - 2\pi/n$.

Из (2) следует, что $0 < \gamma/2 < \pi/n$ или $0 < \gamma < 2\pi/n$, а также $\gamma/2 < \pi/2 - \alpha$ или $\gamma < \pi - 2\alpha$.

Из (3) следует, что $0 < \alpha < \beta$.

Введем ряд дополнительных обозначений для правильной пирамиды: a – сторона основания, h – высота пирамиды, V – объем пирамиды, S – площадь боковой поверхности, $S_{осн}$ – площадь основания, R – радиус описанного шара, r – радиус вписанного шара.

Вычисление объема правильной n-угольной пирамиды

Задача 8. Найти объем V правильной *n*-угольной пирамиды, если известны a и α.

Решение. □ Из формулы $V = S_{осн} \cdot h/3$, где $S_{осн} = 2n \cdot S_{\vartriangle AKH} = 2n \cdot \dfrac{1}{2} AK \cdot KH = \dfrac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$, а $h = AH \cdot \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2\sin(\pi/n)}$, получаем

$$V = \frac{na^3}{24\sin(\pi/n)} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{tg}\alpha . \ \blacklozenge \qquad (7)$$

Задача 9. Найти объем V правильной *n*-угольной пирамиды, если известны a и β.

Решение. □ Из формулы (7), используя (3) сразу получим ответ:

$$V = \frac{na^3}{24} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{tg}\beta . \ \blacklozenge$$

Задача 10. Найти объем V правильной *n*-угольной пирамиды, если известны a и γ.

Решение. □ Воспользуемся тем же приемом, что и в предыдущей задаче. Из формулы (2) следует, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{\cos\gamma - \cos(2\pi/n)}}{\sqrt{2}\sin(\gamma/2)}$. Подставляя это выражение в формулу (7), получим

$$V = \frac{na^3 \operatorname{ctg}(\pi/n) \cdot \sqrt{\cos\gamma - \cos(2\pi/n)}}{24\sqrt{2}\sin(\pi/n)\sin(\gamma/2)} . \ \blacklozenge$$

Задача 11. Найти объем V правильной n-угольной пирамиды, если известны a и φ.

Решение. □ Так как $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\cos(\varphi/2)\cos(\pi/n)}{\sqrt{-\cos\varphi - \cos(2\pi/n)}}$ (формулы (3) и (5)), то из формулы (7), получим $V = \dfrac{\sqrt{2}na^3\operatorname{ctg}^2(\pi/n)\cdot\cos(\varphi/2)}{24\sqrt{-\cos\varphi - \cos(2\pi/n)}}$. �

Вычисление площади боковой поверхности правильной n-угольной пирамиды

Задача 12. Найти площадь боковой поверхности S правильной n-угольной пирамиды, если известны a и β.

Решение. □ Из формулы $S = \dfrac{S_{осн}}{\cos\beta}$, где $S_{осн} = \dfrac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}$ (см. задачу 8), получим $S = \dfrac{na^2\operatorname{ctg}(\pi/n)}{4\cos\beta}$. � (8)

Задача 13. Найти площадь боковой поверхности S правильной n-угольной пирамиды, если известны a и γ.

Решение. □ $S = n\cdot S_{\vartriangle ASB} = n\cdot\dfrac{1}{2}AB\cdot SK = \dfrac{na^2\operatorname{ctg}(\gamma/2)}{4}$. �

Задача 14. Найти площадь боковой поверхности S правильной n-угольной пирамиды, если известны a и α.

Решение. □ Из формулы (3) следует $\cos\beta = \dfrac{\cos(\pi/n)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2(\pi/n)}}$.

Следовательно, $S = \dfrac{na^2\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2(\pi/n)}}{4\sin(\pi/n)}$. �

Задача 15. Найти площадь боковой поверхности S правильной n-угольной пирамиды, если известны a и φ.

Решение. □ Из формулы (5) следует $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{-\cos\varphi - \cos(2\pi/n)}}{\sqrt{2}\sin(\pi/n)}$.

Используя формулу (8), получим $S = \dfrac{\sqrt{2}na^2\cos(\pi/n)}{4\sqrt{-\cos\varphi - \cos(2\pi/n)}}$. ◆

§4.4. Усеченная пирамида

Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между ее основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Например, пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 12).

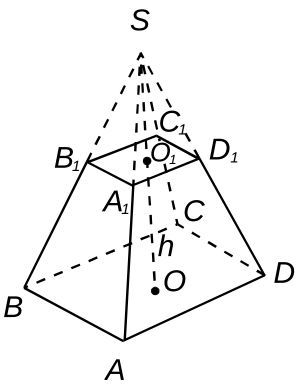


Рис. 12

Основаниями усеченной пирамиды называются параллельные грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ – ***нижнее*** основание, а $A_1B_1C_1D_1$ – ***верхнее*** основание). ***Высота*** усеченной пирамиды – отрезок прямой, перпендикулярный основаниям и заключенный между их плоскостями. Усеченная пирамида ***правильная***, если ее основания правильные многоугольники и прямая, соединяющая центры оснований, перпендикулярна плоскости оснований. ***Апофемой*** правильной усеченной пирамиды называют высоту ее боковой грани.

Поверхность усеченной пирамиды. ***Боковой поверхностью*** усеченной пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Полная поверхность усеченной пирамиды равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему:

$$S_{бок} = \frac{P + P_1}{2}\cdot m,$$

где P и P_1 – периметры оснований, m – ее апофема.

Объем усеченной пирамиды. ***Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле***

$$V = \frac{h}{3}(S + \sqrt{S\cdot s} + s),$$

где S – площадь нижнего, s – верхнего оснований усеченной пирамиды равны, а h – высота равна.

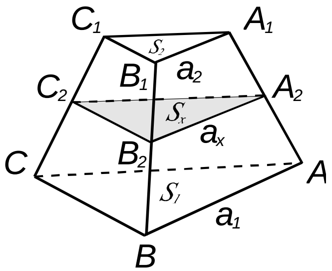


Рис. 13

Задача 16. Доказать, что в усеченной пирамиде, площади оснований которой равны S_1 и S_2, площадь S_x сечения ее плоскостью, делящей боковые ребра пополам, равна

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2.$$

Решение. □ Пусть площади оснований усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ (решение останется справедливым и в случае n-угольной пирамиды) равны $S_{\vartriangle A_1B_1C_1}=S_1$, $S_{\vartriangle ABC}=S_2$ и плоскость $A_2B_2C_2$ делит боковые ребра пирамиды пополам (см. рис. 13). Площади параллельных сечений пирамиды относятся, как квадраты сходственных сторон. Обозначив $B_1A_1=a_2$, $BA=a_1$, $A_2B_2=a_x$, получим $\frac{a_1^2}{S_1}=\frac{a_2^2}{S_2}=\frac{a_x^2}{S_x}$ или $\frac{a_1}{\sqrt{S_1}}=\frac{a_2}{\sqrt{S_2}}=\frac{a_x}{\sqrt{S_x}}$, откуда по свойству проекций $\sqrt{S_x}=\frac{a_x\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)}{a_1+a_2}$. Так как A_2B_2 – средняя линия трапеции BB_1A_1A и $A_2B_2=a_x=\frac{a_1+a_2}{2}$, то $\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}=\sqrt{S_x}$ или $S_x=\frac{1}{4}\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$, что и требовалось доказать. ◆

Задача 17. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и a_1, а диагональ пирамиды – d. Определить боковую поверхность пирамиды.

Решение. □ Пусть в усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны нижнего

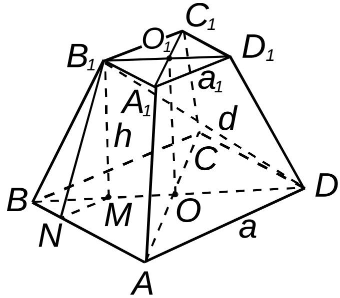


Рис. 14

основания равны a, верхнего – a_1, а диагональ пирамиды – $B_1D = d$ (см. рис. 14). Из вершины B_1 проведем $B_1N \perp AB$ и $B_1M \perp BD$. Так как B_1N – апофема данной пирамиды, то боковая поверхность пирамиды может быть вычислена по формуле

$$S_{бок.} = \frac{1}{2}(P + P_1) \cdot B_1N,$$

где $P = 4AB = 4a$, а $P_1 = 4A_1B_1 = 4a_1$. Отрезок B_1N найдем из прямоугольного треугольника B_1NM $(\angle B_1MN = 90°)$.

Диагонали квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащих в основаниях, равны: $BD = a\sqrt{2}$, $B_1D_1 = a_1\sqrt{2}$. Диагональное сечение пирамиды – равнобочная трапеция BB_1D_1D. Найдем ее высоту B_1M (она равна высоте пирамиды O_1O) из прямоугольного треугольника B_1MD, т. е. $B_1M = \sqrt{B_1D^2 - MD^2}$, а $MD = BD - BM$ ($BM = \dfrac{BD - B_1D_1}{2}$) или $MD = \dfrac{BD + B_1D_1}{2} = \dfrac{a + a_1}{2} \cdot \sqrt{2}$ и $B_1M = \sqrt{d^2 - \dfrac{(a + a_1)^2}{2}}$.

Треугольник BMN – равнобедренный и прямоугольный $(\angle BNM = 90°)$: $BM = \dfrac{a - a_1}{2} \cdot \sqrt{2}$, а $MN = \dfrac{BM}{\sqrt{2}} = \dfrac{a - a_1}{2}$.

Теперь из треугольника B_1NM находим:

$$B_1N = \sqrt{B_1M^2 + MN^2} = \sqrt{d^2 - \frac{(a + a_1)^2}{2} + \frac{(a - a_1)^2}{4}}.$$

Подставляя найденные значения P, P_1 и B_1N в формулу боковой поверхности пирамиды, получим

$$S_{бок} = 2(a + a_1) \cdot \sqrt{d^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} - \frac{3aa_1}{2}}. \blacklozenge$$

§4.5. Многогранники. Подобие многогранников

Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из частей плоскостей, ограниченных многоугольниками.

Гранями многогранника называются части плоскостей (многоугольники), ограничивающие многогранник. ***Ребрами*** многогранника называются общие стороны смежных граней (многоугольников). ***Вершинами*** многогранника называются вершины многогранных углов, образованных его гранями, сходящимися в одной точке. ***Диагональю*** многогранника называется отрезок прямой, соединяющей две вершины многогранника, не лежащие в одной грани. ***Диагональной плоскостью*** многогранника называется плоскость, проходящая через три вершины многогранника, не лежащие в одной грани. ***Сечением*** многогранника плоскостью называется часть этой плоскости, ограниченная линией пересечения поверхности многогранника с этой плоскостью. Многогранник называется ***выпуклым***, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости любой его грани. ***Гранями*** выпуклого многогранника могут быть только выпуклые многоугольники.

Два многогранника называются ***подобными***, если они имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани. Соответственные элементы подобных многогранников называются ***сходственными***.

У подобных многогранников двугранные углы равны и одинаково расположены, а сходственные ребра пропорциональны.

Кроме того, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. ***Если в пирамиде провести секущую плоскость параллельно основанию, то она отсечет от нее другую пирамиду, подобную данной.***

Теорема 2. ***Поверхности подобных многогранников относятся как квадраты сходственных линейных элементов многогранников.***

Теорема 3. ***Объемы подобных многогранников относятся как кубы сходственных линейных элементов этих многогранников.***

Теорема 4. ***Квадраты объемов подобных многогранников относятся как кубы площадей сходственных граней.***

Задача 18. Площади оснований усеченной пирамиды S_1 и S_2, а ее объем равен V. Определить объем полной пирамиды.

Решение. □ Пусть $S_1 > S_2$. Пусть объем полной пирамиды равен V_1, а объем пирамиды, дополняющей данную усеченную пирамиду до полной, – V_2. Тогда $\frac{V_2^2}{V_1^2}=\frac{S_2^3}{S_1^3}$ или $\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{3/2}$. Из производной пропорции, следует $\frac{V_1-V_2}{V_1}=\frac{S_1^{3/2}-S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}$. С учетом $V_1-V_2=V$ находим $\frac{V}{V_1}=\frac{S_1^{3/2}-S_2^{3/2}}{S_1^{3/2}}$, откуда $V_1=\frac{VS_1^{3/2}}{S_1^{3/2}-S_2^{3/2}}$. ◆

Задача 19. Площади оснований усеченной пирамиды равны a^2 и b^2. Найти площадь сечения, параллельного плоскостям оснований данной пирамиды и делящего ее объем пополам.

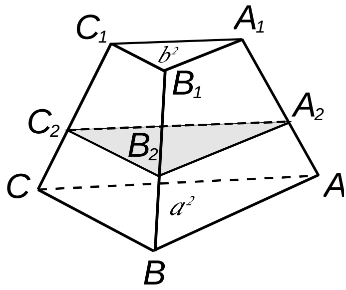


Рис. 15

Решение. □ Рассмотрим (для простоты) треугольную усеченную пирамиду $ABCA_1B_1C_1$. Пусть $S_{\Delta ABC}=a^2$ и $S_{\Delta A_1B_1C_1}=b^2$ (см. рис. 15). Найдем площадь сечения $A_2B_2C_2 \parallel ABC$, делящего усеченную пирамиду на равновеликие части. Дополним пирамиду до полной. По теореме 1 пирамиды $SABC$, $SA_2B_2C_2$, $S\,A_1B_1C_1$ подобны (см. теоремы на стр. 88).

Пусть $S_{\Delta A_2B_2C_2}=x^2$, а объемы пирамид $SABC$, $SA_2B_2C_2$ и $S\,A_1B_1C_1$ соответственно V_a, V_x, V_b. Согласно теореме 4 (см. стр. 88) $\frac{V_a^2}{a^6}=\frac{V_x^2}{x^6}=\frac{V_b^2}{b^6}$ или $\frac{V_a}{a^3}=\frac{V_x}{x^3}=\frac{V_b}{b^3}=t$, где t – некоторое число. Тогда $V_a=a^3t$, $V_x=x^3t$, $V_b=b^3t$. По условию задачи $V_a-V_x=V_x-V_b$ или $a^3t-x^3t=x^3t-b^3t$, откуда $2x^3=a^3+b^3$ и, следовательно, $x^2=\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{2/3}$. Отсюда $S_{\Delta A_2B_2C_2}=\sqrt[3]{\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^2}$. ◆

§4.6. Многогранные углы

Многогранным углом называется фигура, состоящая из нескольких лучей OA, OB, OC, $\ldots$, выходящих из одной точки O и не лежащих в одной плоскости, и из плоских углов AOB, BOC, $\ldots$ между этими лучами (см. рис. 16).

Общая точка O пересечения всех лучей называется ***вершиной*** многогранного угла, лучи OA, OB, $\ldots$ – его ***ребрами***, части плоскостей, заключенные между ребрами, называются его ***гранями***, а углы AOB, BOC, $\ldots$, образованные ребрами, лежащими в одной грани, называются ***плоскими углами*** многогранного угла.

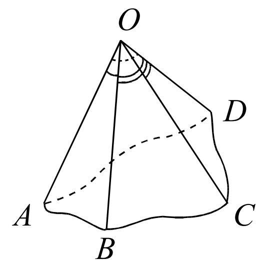


Рис. 16

Многогранный угол называется ***выпуклым***, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости, совпадающей с любой его гранью. Два многогранных угла считаются ***равными***, если они при наложении совпадают всеми своими частями.

Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $360°$.

Трехгранные углы. Если число граней многогранного угла равно n, то его называют n***-гранным*** углом. При $n=3$ его называют ***трехгранным*** углом.

Будем обозначать буквами α, β, γ плоские углы трехгранного угла, а φ_A, φ_B, φ_C – внутренние двугранные углы (их величины), противолежащие углам α, β и γ соответственно (см. рис. 17). Допустимые значения основных элементов трехгранного угла $SABC$ должны удовлетворять следующим условиям:

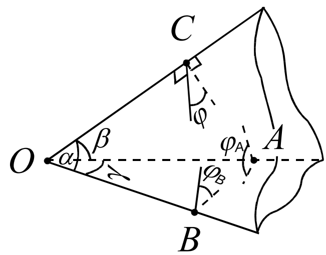


Рис. 17

1. Каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов: $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$, $\gamma < \beta + \alpha$. Отсюда следует, что каждый плоский угол трехгранного угла больше разности двух других плоских углов.

2. Сумма плоских углов трехгранного угла положительна и меньше 2π : $0 < \alpha + \beta + \gamma < 2\pi$.

3. Сумма внутренних двугранных углов трехгранного угла больше π и меньше 3π : $\pi < \varphi_A + \varphi_B + \varphi_C < 3\pi$.

4. В трехгранном угле против большего плоского угла лежит больший двугранный угол; против большего двугранного угла лежит больший плоский угол. Против равных плоских углов лежат равные двугранные углы, и наоборот, против равных двугранных углов лежат равные плоские углы.

5. Внутренние двугранные углы трехгранного угла удовлетворяют неравенствам:

$$\varphi_A + \varphi_B - \varphi_C < \pi\ ,\ \varphi_A - \varphi_B + \varphi_C < \pi\ ,\ \varphi_B + \varphi_C - \varphi_A < \pi\ .$$

Задача 1. Доказать, что сумма углов пространственного четырехугольника не превышает $360°$.

Доказательство. □ Пусть $ABCD$ – произвольный пространственный четырехугольник, BD – его диагональ (см. рис. 18). Сравним сумму углов четырехугольника $ABCD$ с суммой углов треугольника ABD и BCD. Рассмотрим трехгранные углы $DABC$ и $BACD$ соответственно с вершинами D и B. По свойству плоских углов трехгранного угла $\angle ADC \le \angle ADB + \angle BDC$ и $\angle CDA \le \angle BDC + \angle ADB$. Откуда:

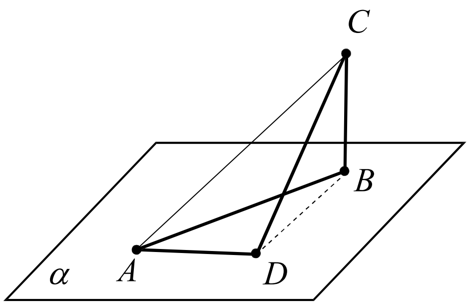


Рис. 18

$$\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB \le \underbrace{\angle CDB + \angle BCD + \angle CBD}_{\text{сумма углов } \triangle CDB} +$$

$$+ \underbrace{\angle ADB + \angle ABD + \angle BAD}_{\text{сумма углов } \triangle ABD} = 360°\text{, что и требовалось доказать.} ■$$

Равными трехгранными углами называются такие углы, которые при наложении совмещаются во всех своих частях. Следовательно, у равных трехгранных углов все двугранные углы и плоские углы соответственно равны между собой, но обратное утверждение не справедливо. Существуют такие трехгранные углы, у которых двугранные и плоские углы соответственно равны, а трехгранные углы не равны между собой. Трехгранные углы невозможно совместить в случае неодинаковой ориентации их соответственных граней относительно вершины. Так, грани одного угла AOB, BOC и COA ориентированы относительно вершины O против движения часовой стрелки, а соответствующие грани другого – A_1OB_1, B_1OC_1 и C_1OA_1 ориентированы по движению часовой стрелки. В таком случае трехгранные углы $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ не равны, хотя в них равны и все плоские, и все двугранные углы.

Таким образом, для равенства двух трехгранных углов с соответственно равными плоскими и двугранными углами необходимо еще, чтобы их грани были одинаково ориентированы относительно их вершин.

Признаки равенства трехгранных углов. Существуют признаки равенства трехгранных углов, аналогичные признакам равенства треугольников в планиметрии, которые выражаются следующими теоремами.

Два одинаково ориентированных трехгранных угла равны в случае:

(1) ***если они имеют по равному плоскому углу, прилежащему к двум соответственно равным двугранным углам;***

(2) ***если они имеют по два равных плоских угла, плоскости которых образуют равные двугранные углы;***

(3) ***если они имеют по три соответственно равных плоских угла;***

(4) ***если они имеют по три соответственно равных двугранных угла.***

Задача 2. Каждый плоский угол трехгранного угла равен $60°$. На одном из его ребер отложен от вершины отрезок длиной a и из его конца опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Найти длину этого перпендикуляра.

Решение. □ Пусть трехгранный угол $OMNP$ имеет плоские углы MON, NOP, POM равные $60°$ и отрезок $AO = a$, AD перпендикуляр к плоскости NOP (см. рис. 19). Из основания перпендикуляра AD опустим на лучи OP и ON перпендикуляры $CD \perp ON$ и $DB \perp OP$, и соединим точку D с точкой O. Проведем отрезки AC и AB, которые по теореме о трех перпендикулярах будут соответственно перпендикулярны ON и OP.

Треугольник ACO – прямоугольный $\angle OAC = 90° - \angle AOC = 30°$ и $OC = \frac{1}{2} OA = \frac{a}{2}$.

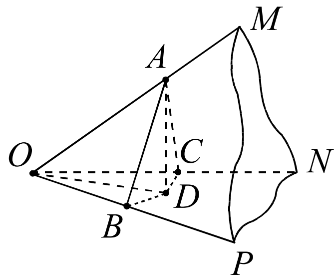


Рис. 19

В треугольнике OCD ($\angle OCD$ – прямой) $\angle COD = 30°$, поскольку точка A проектируется на биссектрису угла NOP (задачу 1 на стр. 12). Следовательно $OD = \frac{OC}{\cos 30°} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника ADO по получаем

$$AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}. ◆$$

Задача 3. В трехгранном угле два плоских угла по 45°, двугранный угол между ними прямой. Найти третий плоский угол.

Решение. □ В трехгранном угле $OMNP$ $\angle MON = \angle NOP = 45°$, а двугранный угол $MNOP$ – прямой. Требуется найти угол MOP (см. рис. 20). Из произвольной точки C ребра ON строим линейный угол ACB двугранного угла $MNOP$, тогда по условию задачи $\angle ACB = 90°$. Так как углы $AOC = BOC = 45°$, то $AC = OC = CB$ и прямоугольные треугольники ACO, ACB и BCO равны между собой, то $AB = AO = BO$ и искомый $\angle MOP = 60°$. ◆

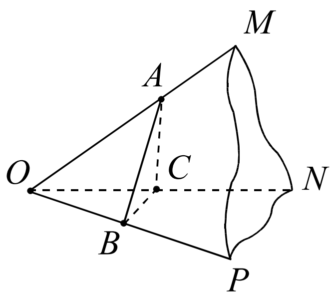


Рис. 20

§4.7. Соотношение между основными элементами трехгранного угла

Трехгранный угол задается однозначно (т. е. остальные его элементы могут быть вычислены по данным) в следующих случаях:

1. Даны три его плоских угла.
2. Даны три его двугранных угла.
3. Даны два его плоских угла и двугранный угол между ними.
4. Даны два его двугранных угла и плоский угол между ними.
5. Даны два его плоских угла и двугранный угол, лежащий напротив одного из них.
6. Даны два его двугранных угла и плоский угол, лежащий напротив одного из них.

Замечание. В общем случае задача построения трехгранного угла может не иметь решения (см. §4.6).

Основные соотношения между элементами трехгранного угла дают следующие теоремы.

«Теорема косинусов» для трехгранного угла

Теорема 1. ***Во всяком трехгранном угле, плоские углы которого равны α, β и γ, а двугранные углы, противолежащие им, соответственно равны φ_A, φ_B и φ_C, имеют место следующие равенства:***

$$\cos\varphi_C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}; \quad \cos\varphi_B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma};$$

$$\cos\varphi_A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

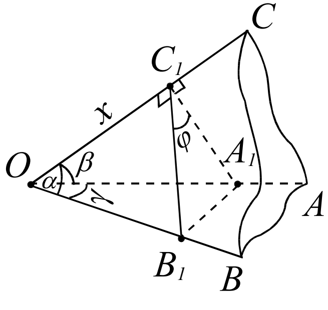


Рис. 21

Доказательство. □ Докажем, например, первое равенство. Пусть в трехгранном угле $OABC$ плоские углы при вершине O равны $\angle BOC = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ (см. рис. 21). Через произвольную точку C_1 ребра OC проведем плоскость перпендикулярную этому ребру. Пусть B_1 и A_1 – точки пересечения этой плоскостью ребер OB и OA, соответственно.

По условию линейный угол $B_1C_1A_1$ двугранного угла с ребром OC равен φ_C. Пусть $OC_1 = x$. В треугольнике OB_1C_1 $C_1B_1 = x \cdot \mathrm{tg}\alpha$, $OB_1 = \dfrac{x}{\cos\alpha}$. В треугольнике OA_1C_1 $C_1A_1 = x \cdot \mathrm{tg}\beta$, $OA_1 = \dfrac{x}{\cos\beta}$. Из теоремы косинусов для треугольников $B_1C_1A_1$ и OB_1C_1 получаем:

$$B_1A_1^{\,2} = OB_1^{\,2} + OA_1^{\,2} - 2 \cdot OB_1 \cdot OA_1 \cos\gamma;$$

$$B_1A_1^{\,2} = C_1B_1^{\,2} + C_1A_1^{\,2} - 2 \cdot C_1B_1 \cdot C_1A_1 \cos\varphi_C.$$

Приравняем правые части равенств и подставим выражения OB_1, OA_1, C_1B_1, C_1A_1:

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{x}{\cos\beta}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{\cos\alpha} \cdot \frac{x}{\cos\beta} \cdot \cos\gamma =$$

$$= (x \cdot \mathrm{tg}\alpha)^2 + (x \cdot \mathrm{tg}\beta)^2 - 2 \cdot x \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot x \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \cos\varphi_C.$$

После преобразований получаем доказываемую формулу:

$$\cos\varphi_C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Аналогично доказываются два других равенства. �

Замечание. Иногда «теорему косинусов» для трехгранного угла формулируют следующим образом:

во всяком трехгранном угле косинус плоского угла равен произведению косинусов двух других плоских углов плюс произведение синусов тех же углов на косинус двугранного угла между ними:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\varphi_A;$$

$$\cos\beta = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\varphi_B;$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi_C.$$

«Теорема синусов» для трехгранного угла

Теорема 2. ***Во всяком трехгранном угле синусы плоских углов пропорциональны синусам противолежащих им двугранных углов:***

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi_A} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi_B} = \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi_C}.$$

Доказательство. □ Рассмотрим отношение $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\varphi_A}$. Из основного тригонометрического тождества следует $\sin\varphi_A = \sqrt{1-\cos^2\varphi_A}$. Далее, используя теорему косинусов для трехгранного угла, получим:

$$\sin\varphi_A = \sqrt{1-\cos^2\varphi_A} = \sqrt{1-\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma-\cos^2\alpha+2\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha-\cos^2\gamma\cos^2\beta}{\sin^2\beta\sin^2\gamma}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Подставим полученное выражение $\sin\varphi_A$ в рассматриваемое отношение:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi_A} = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}} = t\,.$$

Аналогично доказывается, что $\dfrac{\sin\beta}{\sin\varphi_B} = t$ и $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\varphi_C} = t$. ■

Теорема 3. ***Во всяком трехгранном угле косинус двугранного угла равен произведению косинусов двух других двугранных углов, взятому с обратным знаком, плюс произведение синусов тех же углов на косинус плоского угла между ними:***

$$\cos\varphi_A = -\cos\varphi_B\cos\varphi_C + \sin\varphi_B\sin\varphi_C\cos\alpha\,;$$

$$\cos\varphi_B = -\cos\varphi_C\cos\varphi_A + \sin\varphi_C\sin\varphi_A\cos\beta\,;$$

$$\cos\varphi_C = -\cos\varphi_A\cos\varphi_B + \sin\varphi_A\sin\varphi_B\cos\gamma\,.$$

Задача 4. Плоские углы трехгранного угла равны $45°$, $45°$ и $60°$. Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная одной из граней, плоский угол в которой равен $45°$. Найти угол между этой прямой и ребром трехгранного угла, не лежащим в упомянутой грани.

Решение. □ Пусть в трехгранном угле $SABC$ известны плоские углы $\angle ASB = 45°$, $\angle BSC = 45°$, $\angle ASC = 60°$ (см. рис. 22), а прямая

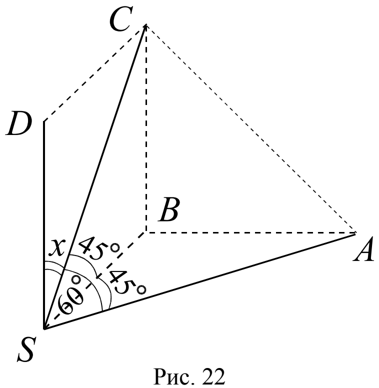


Рис. 22

DS перпендикулярна плоскости грани ASB. Вычислим в трехгранном угле $SABC$ величину двугранного угла при ребре BS (обозначим его через φ_B):

$$\cos\varphi_B = \frac{\cos 60^\circ - \cos^2 45^\circ}{\sin^2 45^\circ} = 0.$$

Отсюда $\varphi_B = 90^\circ$. Следовательно, прямая DS расположена в плоскости грани CSB и перпендикулярна ребру BS. Очевидно, что угол DSC – искомый и равен $45°$. �

Задача 5. В треугольной пирамиде две грани являются прямоугольными равнобедренными треугольниками, которые примыкают друг к другу гипотенузами и образуют двугранный угол, равный α. Определить двугранный угол в этой пирамиде, ребром которого является катет прямоугольного треугольника.

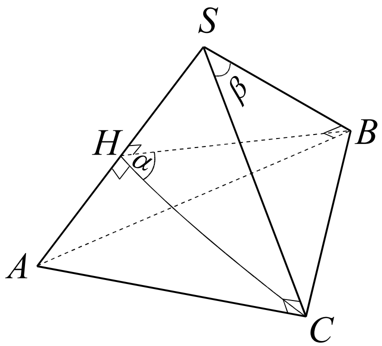


Рис. 23

Решение. □ Пусть в треугольной пирамиде $SABC$ (см. рис. 23) грани ASC и ASB – прямоугольные равнобедренные треугольники с гипотенузой AS; двугранный угол при ребре AS равен α. Плоские углы равны $\angle ASC = \angle ASB = \angle SAC = \angle SAB = \dfrac{\pi}{4}$. Двугранные углы, ребрами которых являются катеты прямоугольных треугольников ASC и ASB, все одинаковы; обозначим их через x. Вычислим, например, двугранный угол при ребре SB.

Рассмотрим трехгранный угол $SABC$. Обозначим плоский угол при его вершине S через β. Тогда имеем:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta - \cos^2\dfrac{\pi}{4}}{\sin^2\dfrac{\pi}{4}}, \qquad \cos x = \frac{\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{4}\cos\beta}{\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\beta}.$$

Следовательно,

$$\cos\beta = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \qquad \cos x = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}$$

или $\cos x = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{3+\cos\alpha}}$, откуда $x = \arccos\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{3+\cos\alpha}}$. �

Рассмотрим несколько следствий доказанных теорем для трехгранного угла, применяемых при решении различных стереометрических задач.

1. Если двугранный угол φ_A, противолежащий плоскому углу α прямой, то

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma, \qquad (*)$$

т. е. ***косинус плоского угла, противолежащего прямому двугранному углу трехгранного угла, равен произведению косинусов двух других плоских углов этого трехгранного угла.***

Отсюда непосредственно следует:

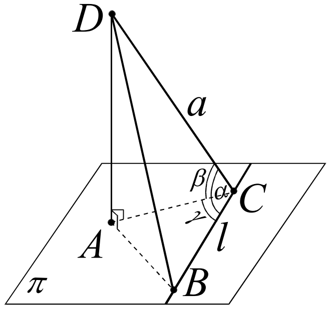


Рис. 24

а) Если прямая l (см. рис. 24), расположенная в плоскости π, составляет угол γ с проекцией данной наклонной, образующей угол β с плоскостью π, то косинус угла между наклонной и прямой l, выражается формулой (*) (см. задачу 17 на стр. 36).

б) Если прямые l_1 и l_2 в плоскости π образуют равные углы $\gamma_1 = \gamma_2$ с проекцией наклонной, то эти прямые образуют равные углы с наклонной.

в) Если прямые l_1 и l_2 в плоскости π образуют равные углы с наклонной, то они образуют равные углы и с ее проекцией.

г) (теорема о трех перпендикулярах). Если прямая l перпендикулярна проекции на плоскость π наклонной, то эта прямая перпендикулярна также и самой наклонной.

Доказательство: □

б) $\cos\alpha_1 = \cos\beta\cos\gamma_1 = \cos\beta\cos\gamma_2 = \cos\alpha_2$, откуда $\alpha_1 = \alpha_2$.

в) Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то $\cos\gamma_1 = \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\beta} = \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\beta} = \cos\gamma_2$ и $\gamma_1 = \gamma_2$.

г) Так как $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma = 0$, откуда $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. �

2. Правильный трехгранный угол.

а) Если все плоские углы трехгранного угла равны между собой $\alpha = \beta = \gamma$, то равны и все внутренние двугранные углы $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C$; при этом:

$$\cos\varphi_A = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

б) Если все внутренние двугранные углы трехгранного угла равны между собой $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C$, то равны и все плоские углы $\alpha = \beta = \gamma$.

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi_A}{1-\cos\varphi_A}.$$

Задача 7. Доказать, что если все двугранные углы треугольной пирамиды равны между собой, то все ее ребра также равны между собой.

Доказательство: □ Пусть в треугольной пирамиде все двугранные углы равны φ_A. Тогда и все плоские углы при вершинах также равны между собой. Обозначив их через α, имеем: $\cos\alpha = \dfrac{\cos\varphi_A}{1-\cos\varphi_A}$.

Следовательно, все грани пирамиды равны и представляют собой равносторонние треугольники, что и требовалось доказать. �

3. а) Если двугранный угол φ_A лежит против прямого плоского угла α, то $\cos\varphi_A = -\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$.

б) Если плоский угол α лежит напротив прямого двугранного угла, то $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\varphi_B\operatorname{ctg}\varphi_C$.

Глава 5. Круглые тела

§5.1. Цилиндр

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой линии AB (см. рис. 1), сохраняющей одно и то же направление и пересекающей данную линию CD. Прямая AB называется ***образующей,*** а линия CD – ***направляющей.***

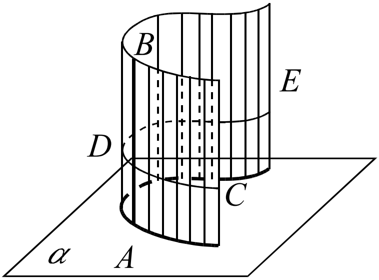


Рис. 1

Если в качестве направляющей цилиндрической поверхности взять окружность, плоскость которой перпендикулярна к образующей, то такая поверхность называется ***круговой*** цилиндрической.

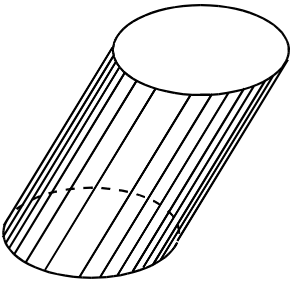


Рис. 2

Цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, пересекающими образующие (см. рис. 2).

Часть цилиндрической поверхности, заключенная между параллельными плоскостями, называется ***боковой*** поверхностью цилиндра, а части плоскостей, отсекаемые этой поверхностью, – ***основаниями*** цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называется ***высотой*** цилиндра.

Прямым круговым цилиндром называется тело, ограниченное круговой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными к образующей (см. рис. 3). Основаниями прямого кругового цилиндра являются ***круги*** радиуса R, а ***высота*** равна образующей цилиндра: $h = AB = OO_1$. В школьном курсе геометрии обычно рассматривают только прямой круговой цилиндр, который в дальнейшем будем называть просто цилиндром.

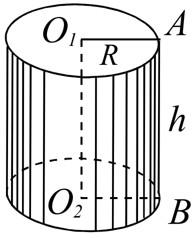


Рис. 3

Цилиндр можно также получить вращением прямоугольника O_1ABO_2 вокруг одной из его сторон (см. рис. 3). Сторона OO_1 прямоугольника, вокруг которой происходит вращение, называется ***осью*** цилиндра, а перпендикулярная ей сторона $O_1A = O_2B = R$ называется ***радиусом*** цилиндра. Радиус цилиндра равен также радиусу его оснований.

Боковая и полная поверхность цилиндра

Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра:

$$2\pi Rh,$$

где $R-$ радиус основания цилиндра, а $h-$ его высота.

Полная поверхность цилиндра равна сумме боковой поверхности и площадей его оснований:

$$S = 2\pi R(R+h).$$

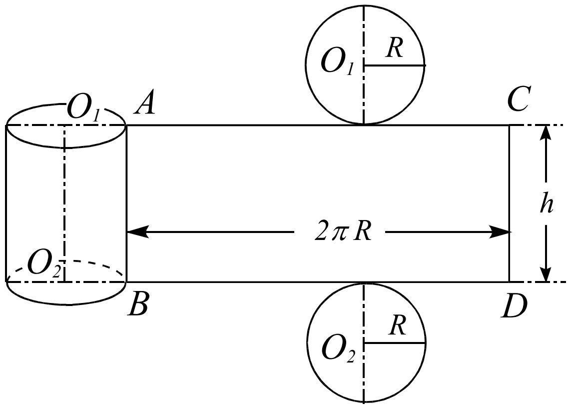


Рис. 4

Развертка цилиндра. Если поверхность цилиндра разрезать по образующей и окружностям оснований и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность вместе с основаниями лежали в одной плоскости (см. рис. 4), то на этой плоскости получится фигура, которая называется ***разверткой*** цилиндра, состоящая из прямоугольника $ABCD$, стороны которого $AB = CD = h$ и $AC = BD = 2\pi R$, и двух кругов (оснований цилиндра).

Объем цилиндра. ***Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:***

$$V = \pi R^2 h.$$

Задача 1. Высота цилиндра и радиус основания равны соответственно h и R. Длина отрезка, концы которого лежат на окружности обоих оснований, равна a. Найти кратчайшее расстояние от оси цилиндра до этого отрезка.

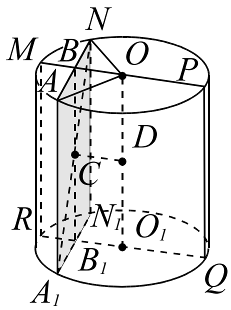


Рис. 5

Решение. □ В рассматриваемом цилиндре $OO_1 = h$, $AO = R$ и отрезок $A_1N = a$ (см. рис. 5). Необходимо найти расстояние между отрезком A_1N и осью цилиндра OO_1. A_1N и OO_1 – скрещивающиеся прямые. Через прямую A_1N параллельно оси OO_1 проведем плоскость A_1AN (AA_1 – перпендикулярна плоскости основания, как образующая). Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от любой точки оси OO_1 до проведенной плоскости. Построим прямую BO, перпендикулярную AN. BO будет перпендикулярна плоскости A_1AN, поскольку $BO \perp AA_1$ (AA_1 – образующая) и $BO \perp AN$ по построению. Из прямоугольного треугольника A_1AN находим $AN = \sqrt{A_1N^2 - A_1A^2} = \; = \sqrt{a^2 - h^2}$. В прямоугольном треугольнике ABO

$$AB = \frac{AN}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{2} : \; OB = \sqrt{AO^2 - AB^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 - h^2}{4}}.$$

В таком случае $CD = BO = \sqrt{R^2 - \dfrac{a^2 - h^2}{4}}$. �

Задача 2. В цилиндре площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения равна S. Определить полную поверхность цилиндра.

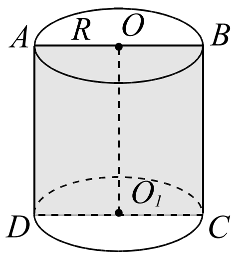


Рис. 6

Решение. Пусть в цилиндре $S_{\text{осн}} = Q$ и $S_{ABCD} = S$ (см. рис. 6).

Обозначим $AO = R$ и $AD = H$, тогда $S_{полн} = 2\pi R\,(H + R)$. Так как согласно условию $2RH = S$, а $S_{бок.} = 2\pi RH$, то $S_{бок.} = \pi S$. Тогда

$$S_{полн.} = S_{бок.} + 2Q = \pi S + 2Q. ◆$$

Задача 3. Боковая поверхность цилиндра вдвое больше суммы площадей его оснований. Найти угол между диагональю осевого сечения и плоскостью основания цилиндра.

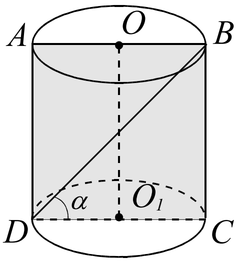


Рис. 7

Решение. □ По условию задачи $S_{бок.} = 4S_{осн.}$. Требуется найти $\angle BDC = \alpha$ (см. рис. 7). Известно, что $S_{бок.} = 2\pi RH$, а $S_{осн.} = \pi R^2$, тогда $2\pi RH = 4\pi R^2$ и, следовательно, $H = 2R$, т. е. прямоугольный треугольник BDC – равнобедренный. Следовательно, $BC = DC = 2R$, тогда искомый угол $\alpha = 45^\circ$. ◆

Задача 4. Найти диагональ осевого сечения цилиндра, если объем цилиндра равен V, а его боковая поверхность равна S.

Решение. □ Диагональное сечение цилиндра – прямоугольник (см. рис. 6). Обозначив $AO = R$ и $AD = h$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} S = 2\pi Rh, \\ V = \pi R^2 h. \end{cases}$$

Отсюда $R = \dfrac{2V}{S}$, $h = \dfrac{S}{2\pi R} = \dfrac{S^2}{4\pi V}$.

Далее из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника ADC находим

$$AC = \sqrt{(2R)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{4V}{S}\right)^2 + \left(\frac{S^2}{4\pi V}\right)^2} = \frac{\sqrt{256\pi^2 V^4 + S^6}}{4\pi VS}. ◆$$

Цилиндр, осевое сечение которого – квадрат, называется ***равносторонним***.

Задача 5. Два одинаковых равносторонних цилиндра размещены так, что ось одного из них является образующей второго. Найти объем их общей части, если высота цилиндров равна a .

Решение. □ Объем общей части цилиндров равен произведению их высоты на площадь общей части их оснований:

$$V = MN \cdot S_{ADBC} \ .$$

Площадь общей части оснований цилиндра равна сумме площадей

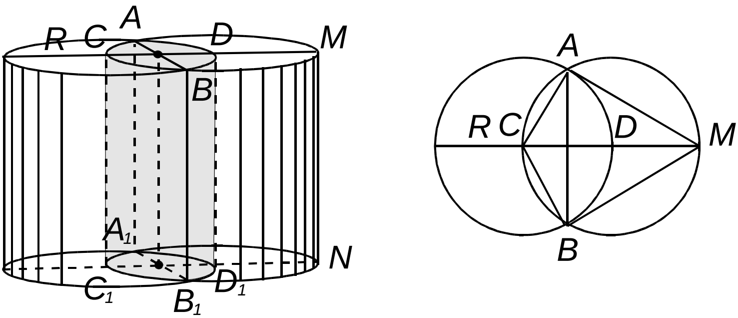


Рис. 8

двух одинаковых сегментов. Так как $AB \perp CD$ (см. рис. 8) и делит радиус основания цилиндра CD пополам, то $AB-$ сторона правильного вписанного в основание треугольника ABM , поэтому $AB = R\sqrt{3}$ и дуга ACB содержит $120°$. Тогда $S_{\text{сегм.}ADB} = S_{\text{сект.}CADB} - S_{\vartriangle ACB}$.

По условию $R = CD = \dfrac{a}{2}$.

$$S_{\text{сегм.}ADB} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{4} = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2\sqrt{3}}{16},$$

$$S_{CADB} = 2S_{\text{сегм.}ADB} = a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

Тогда можем найти искомый объем:

$$V = a \cdot a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{a^3}{24}(4\pi - 3\sqrt{3}) \ . ♦$$

§5.2. Конус

Конической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой SA (см. рис. 9), перемещающейся в пространстве так, что она при этом все время проходит через неподвижную точку S и пересекает данную линию l. Прямая SA называется ***образующей***, точка S – ***вершиной***, а линия l – ***направляющей*** конической поверхности.

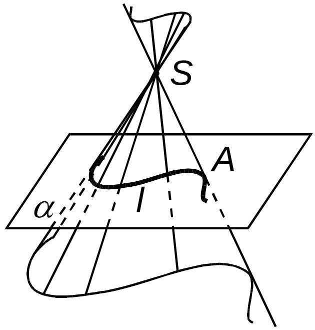


Рис. 9

Отметим, что коническая поверхность, так же как и ее образующая SA, простираются в пространстве бесконечно.

Конусом называется тело, ограниченное частью конической поверхности с замкнутой направляющей l и плоскостью α, не проходящей через вершину S и пересекающей все ее образующие (см. рис. 10). Вершина конической поверхности называется ***вершиной*** конуса; часть конической поверхности, ограниченная вершиной и секущей плоскостью – ***боковой*** поверхностью конуса, а часть секущей плоскости, выделенная конической поверхностью – ***основанием*** конуса. ***Высотой*** конуса называется длина перпендикуляра, опущенного из его вершины на плоскость основания.

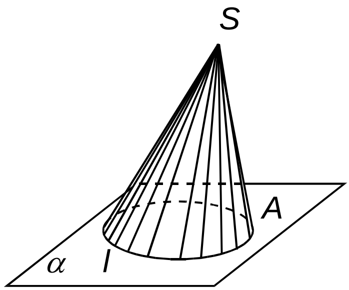


Рис. 10

Прямым круговым конусом называется конус, основанием которого является круг, и высота которого SO проходит через центр окружности основания (см. рис. 11). В дальнейшем прямой круговой конус будем называть просто конусом.

Конус можно получить вращением прямоугольного треугольника SOA (см. рис. 11) вокруг одного из катетов. Катет SO, вокруг которого происходит вращение, называется ***осью конуса***, а гипотенуза является ***образующей*** конуса $SA = L$. Катет OA равен радиусу основания конуса $OA = R$, а катет SO равен его высоте $SO = h$. Сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется ***осевым***.

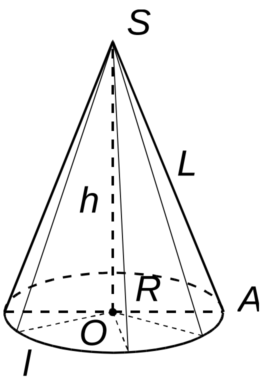


Рис. 11

Боковая и полная поверхность конуса. ***Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности основания на половину образующей*** L***:***

$$S_{бок.} = \pi RL.$$

Полная поверхность равна сумме боковой поверхности и площади основания:

$$S_{полн.} = \pi RL + \pi R^2,$$

где $R = OA$ – радиус основания конуса, $L = SA$ – образующая конуса (см. рис. 11).

Развертка конуса. Если поверхность конуса разрезать по образующей и окружности основания и развернуть ее так, чтобы боковая поверхность и основание лежали в одной плоскости (см. рис. 12), то на плоскости получится фигура, называемая ***разверткой конуса***. Развертка конуса состоит из сектора SAA', радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги равна длине окружности основания конуса, $2\pi R$ и круга основания.

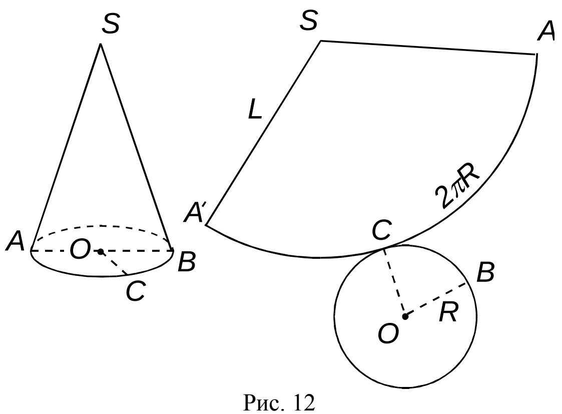


Рис. 12

Объем конуса. ***Объем конуса равен произведению площади основания на треть высоты:***

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.

Пирамидой, описанной около конуса, называется пирамида, у которой основанием служит многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. ***Пирамидой, вписанной в конус***, называется пирамида, у которой основанием служит многоугольник, вписанный в основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.

Задача 6. В треугольной пирамиде стороны основания равны 13; 20 и 21, а все боковые ребра равны по 36. Найти боковую поверхность конуса, описанного вокруг пирамиды.

Решение. □ Боковая поверхность конуса $S_{бок.} = \pi RL$. Образующая конуса равна боковому ребру вписанной в него пирамиды, т. е. $L = 36$. Площадь основания пирамиды находится по формуле Герона $S_{осн.} = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 7} = 126$. Радиус основания конуса R равен радиусу окружности, описанной около основания пирамиды, и может быть вычислен по формуле $R = \dfrac{abc}{4S_{осн.}} = \dfrac{13 \cdot 20 \cdot 21}{4 \cdot 126} = \dfrac{65}{6}$ Тогда

$$S_{бок.} = \pi RL = 390\pi\ .$$ ◆

Задача 7. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найти поверхность тела вращения.

Решение. □ Пусть прямоугольный ΔABC $(\angle C = 90°)$ вращается вокруг прямой $OO_1 \parallel AB$ (см. рис. 13). Точка C лежит на прямой OO_1, $AC = b$ и $BC = a$.

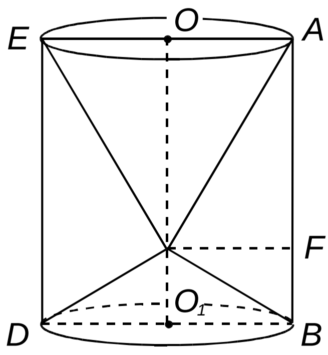


Рис. 13

Поверхность тела вращения состоит из боковой поверхности цилиндра и боковых поверхностей двух конусов. Образующую цилиндра найдем из данного треугольника $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, а радиусы оснований конусов и цилиндра, равные между собой, определим из прямоугольного треугольника ABC (высота $CF = R$, $CF = \dfrac{AC \cdot CB}{AB} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$). Искомая поверхность тела вращения может быть вычислена по формуле:

$$S = \pi R(a+b+2\sqrt{a^2+b^2}) = \frac{\pi ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (a+b+2\sqrt{a^2+b^2}) . ◆$$

Задача 8. Через вершину конуса проведена секущая плоскость, составляющая с плоскостью основания угол $45°$. Найти объем конуса, если известно, что расстояние от центра основания конуса до секущей плоскости в три раза меньше длины образующей конуса и равно d .

Решение. □ Сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину S, есть равнобедренный треугольник SAB (см. рис. 14). Плоскость, содержащая ось конуса и середину C отрезка AB, перпендикулярна секущей плоскости. Следовательно, перпендикуляр OD, опущенный из центра основания конуса на секущую плоскость, является высотой треугольника SCO. По условию задачи $\angle SCO = 45°$, но $\angle SOC$ – прямой, следовательно, $\angle DSO$ также равен $45°$. Значит, треугольник SDO – равнобедренный $(OD = DS)$. Из теоремы Пифагора для него получим: $SO = \sqrt{DS^2 + DO^2} = d\sqrt{2}$. Рассмотрим треугольник SOE . По условию $SE = 3d$. Тогда $OE = \sqrt{SE^2 - SO^2} = \sqrt{9d^2 - 2d^2} = \sqrt{7}d$.

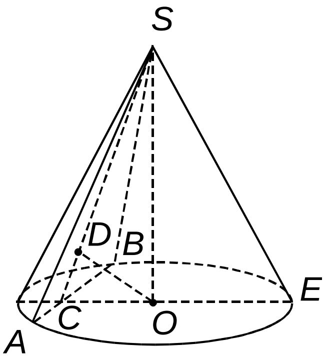


Рис. 14

Объем конуса найдем по формуле $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, где r – радиус основания, h – высота конуса. Но $r = OE = \sqrt{7}d$, $h = SO = \sqrt{2}d$.

Следовательно, $V = \dfrac{7\sqrt{2}}{3}\pi d^3$. ◆

Задача 9. Конус и цилиндр одинакового объема V расположены таким образом, что их оси совпадают, а основания принадлежат одной плоскости. Найти объем общей части конуса и цилиндра, если их высоты равны.

Решение. □ Пусть r – радиус цилиндра, R – радиус конуса, h – их высота. Тогда для объема конуса можем записать $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$, для объема цилиндра $V=\pi r^2 h$. Следовательно, $\frac{1}{3}\pi R^2 h=\pi r^2 h$, откуда $R=r\sqrt{3}$.

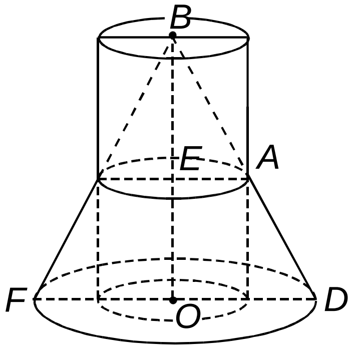


Рис. 15

Пусть треугольник FBD – осевое сечение конуса (см. рис. 15), A – точка пересечения лежащей в этом сечении образующей конуса с боковой поверхностью цилиндра. Через точку A проведем плоскость, параллельную основанию конуса. Эта плоскость делит конус на две части. Верхняя часть представляет собой конус с высотой BE и радиусом r. Ее объем равен $V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot BE\cdot r^2$. Цилиндр также разобьется этой плоскостью на две части, причем объем нижней части будет равен $V_2=\pi(h-BE)\cdot r^2$. Таким образом, объем V_0 общей части конуса и цилиндра может быть вычислен как сумма

$$V_0=V_1+V_2=\pi r^2\cdot\left(\frac{BE}{3}+(h-BE)\right)=\pi r^2\left(h-\frac{2BE}{3}\right).$$

Выразим BE через h. Заметим, что $\triangle BEA$ и $\triangle BOD$ подобны (по двум углам). Следовательно, $\frac{BE}{BO}=\frac{EA}{OD}$ или $\frac{BE}{h}=\frac{r}{R}$. Откуда $BE=h\cdot\frac{r}{R}=\frac{h}{\sqrt{3}}$. Тогда $V_0=\pi r^2 h\cdot\left(1-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)=V\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$. ◆

§5.3. Усеченный конус

Усеченным конусом называется часть конуса, заключенная между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию (см. рис. 16).

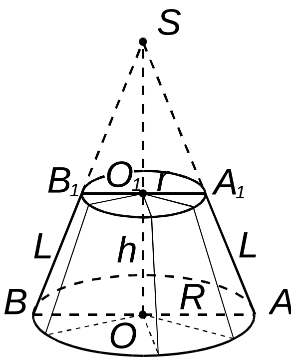


Рис. 16

Основаниями усеченного конуса называются основание полного конуса, из которого получен усеченный, и часть секущей плоскости, ограниченная конической поверхностью (круг). ***Образующей*** усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями усеченного конуса. ***Высотой*** усеченного конуса называется расстояние между его основаниями.

Усеченный конус может быть образован вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной ее основаниям. Сторона OO_1, вокруг которой вращается трапеция, называется ***осью*** усеченного конуса, а вторая боковая сторона AA_1 трапеции будет ***образующей*** усеченного конуса (см. рис. 16). Основания трапеции являются соответственно радиусами нижнего и верхнего оснований усеченного конуса $O_1A_1 = r,\ \ OA = R$.

Боковая и полная поверхность усеченного конуса. ***Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению суммы длин окружностей оснований на половину образующей:***

$$S_{бок.} = \pi L(R+r),$$

где R и r – радиусы оснований усеченного конуса, а L – длина образующей.

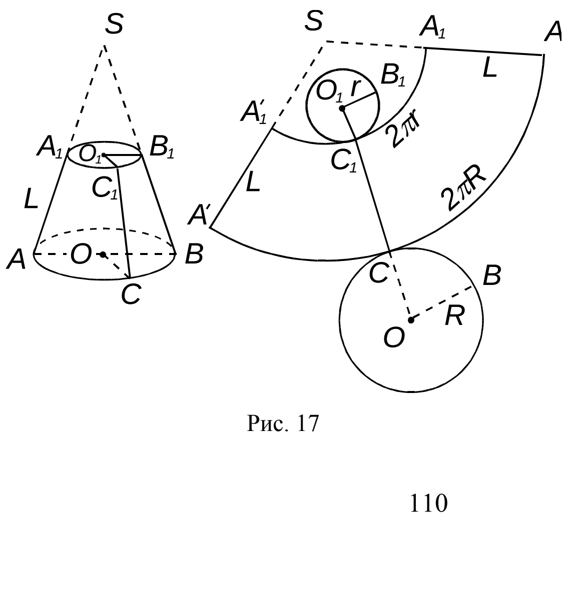


Рис. 17

Площадь полной поверхности усеченного конуса равна сумме площади боковой поверхности и площадей оснований:

$$S_{полн.} = \pi L(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2 .$$

Развертка усеченного конуса. Если поверхность усеченного конуса разрезать по образующей и окружностям оснований и развернуть так, чтобы боковая поверхность с основаниями лежали в одной плоскости (см. рис. 17), то на плоскости получим фигуру, называемую ***разверткой*** усеченного конуса.

Объем усеченного конуса. ***Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основания: один – нижнее основание этого конуса, другой – верхнее и третий – круг, площадь которого есть среднее геометрическое между площадями верхнего и нижнего оснований:***

$$V_{ус.кон.} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2),$$

где h – высота усеченного конуса, а R и r – радиусы его оснований.

Подобные цилиндры и конусы. Боковые и полные поверхности подобных цилиндров, конусов и усеченных конусов относятся как квадраты их сходственных линейных элементов (радиусов оснований, высот, образующих).

Объемы подобных цилиндров, конусов и усеченных конусов относятся как кубы их сходственных линейных элементов (радиусов оснований, высот, образующих).

Осевые сечения подобных цилиндров, конусов или усеченных конусов подобны.

Задача 10. Доказать утверждение: если в осевое сечение усеченного конуса можно вписать окружность, то его высота есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований.

Решение. □ Пусть в осевое сечение $ABCD$ усеченного конуса вписана окружность (см. рис. 18). Обозначим $BC = d_1 = 2r$, $AD = d_2 = 2R$, $O_1O_2 = h$. Докажем, что $h = \sqrt{d_1 d_2}$.

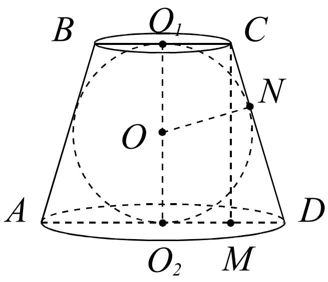


Рис. 18

Трапеция $ABCD$ – равнобедренная. Из точки C на основание AD

опустим перпендикуляр $CM = O_1O_2 = h$. Тогда

$$MD = R - r = \frac{d_2 - d_1}{2}.$$

По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $CN = O_1C = r$ и $ND = O_2D = R$. Отсюда

$$CD = R + r = \frac{d_2 + d_1}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника CMD находим $CM = \sqrt{CD^2 - MD^2} = \sqrt{\left(\frac{d_2 + d_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_2 - d_1}{2}\right)^2} = \sqrt{d_1 d_2}$, что и требовалось доказать. �

Задача 11. Определить боковую поверхность усеченного конуса, если его образующая составляет с плоскостью основания угол $60°$, а площадь осевого сечения равна S.

Решение. □ Пусть дан усеченный конус с площадью осевого сечения S и $\angle ABO = 60°$ (см. рис. 19). Найдем его боковую поверхность $S_{бок.}$.

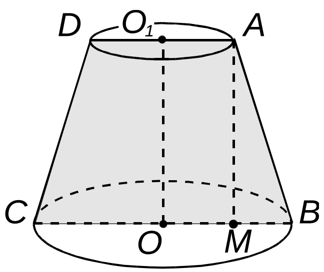


Рис. 19

В равнобочной трапеции $ABCD$ из вершины A на основание CB опустим перпендикуляр $AM \perp CB$. Обозначим $AB = L$, $OB = R$, $O_1A = r$. В прямоугольном треугольнике AMB по условию $\angle MAB = 30°$, поэтому

$$MB = \frac{1}{2}L, \; AM = H = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$

По условию задачи площадь осевого сечения $(R + r)H = S$ или $\frac{\sqrt{3}}{2}L(R + r) = S$. Умножая обе части последнего равенства на число π, получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi L(R+r)=\pi S .$$

Учитывая, что боковая поверхность усеченного конуса $S_{бок.}=\pi L(R+r)$, находим

$$S_{бок.}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi S . ◆$$

Задача 12. В усеченном конусе радиусы оснований и образующая относятся как $3:11:17$, а объем равен 815π *см*^{3}. Найти полную поверхность усеченного конуса.

Решение. □ Обозначим $O_1A=r=3x$, $OB=R=11x$ и $AB=L=17x$ (см. рис. 20). Тогда из прямоугольного треугольника AMB: $AM=H=\sqrt{AB^2-MB^2}=\sqrt{(17x)^2-(11x-3x)^2}=15x$.

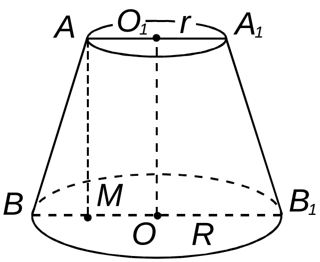


Рис. 20

По условию задачи объем усеченного конуса 815π *см*^{3}, следовательно,

$$V=\frac{\pi H}{3}(R^2+rR+r^2)=$$

$$=\frac{15\pi x}{3}\left((11x)^2+33x^2+(3x)^2\right)=$$

$$=815\pi x^3 .$$

Отсюда $x=1$ *см*, тогда $R=11$ *см*, $r=3$ *см*, $L=17$ *см*. Полная поверхность усеченного конуса

$$S_{полн.}=\pi[(R+r)L+r^2+R^2]=368\pi \text{ см}^3. ◆$$

Задача 13. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r. Плоскость, параллельная основаниям, разделила его на два подобных усеченных конуса. Найти отношение объемов полученных конусов.

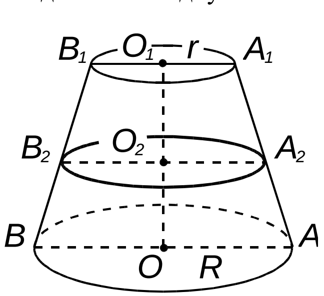


Рис. 21

Решение. □ Пусть усеченные конусы с осевыми сечениями $B_1A_1A_2B_2$ и B_2A_2AB подобны (см.

рис. 21) и $OA = R$, $O_1A_1 = r$, а $O_2A_2 = x$. Из определения подобия усеченных конусов следует, что трапеции $A_1O_1O_2A_2$ и A_2O_2OA подобны и тогда $\frac{r}{x} = \frac{x}{R}$, т. е. $x = \sqrt{rR}$. Объемы подобных тел относятся как кубы длин сходственных линейных элементов:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{O_1A_1}{O_2A_2}\right)^3 = \left(\frac{r}{\sqrt{rR}}\right)^3 = \left(\frac{r}{R}\right)^{3/2}. \blacklozenge$$

Задача 14. Доказать утверждение: если треугольник ABC вращается вокруг стороны $BC = a$, то объем полученного тела $V_a = \frac{4}{3}\pi\frac{Q^2}{a}$, где Q – площадь треугольника.

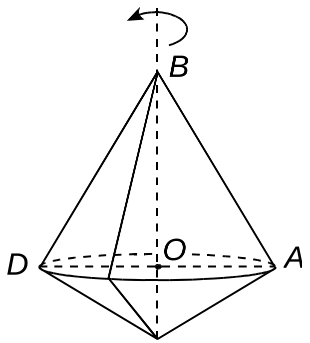


Рис. 22

Решение. □ Полученное тело вращения составляют два конуса (см. рис. 22). Обозначим $AO = h$ высоту треугольника ABC, опущенную на сторону BC, которая одновременно является радиусом основания конусов. Тогда объем искомого тела вращения равен:

$$V = V_{\text{кон.}ABD} + V_{\text{кон.}CAD} \text{ или}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(CO + OB) = \frac{1}{3}\pi a h^2.$$

Учитывая, что по условию $ah = 2Q$, найдем

$$V = \frac{1}{3}\pi a h^2 = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2h^2}{a} = \frac{4}{3}\pi\frac{Q^2}{a},$$

что и требовалось доказать. ◆

Замечание. Формула справедлива для любого треугольника, но если, например, угол BCA будет тупой, то в ходе доказательства следует учесть, что в этом случае:

$$V_a = V_{\text{кон}ABD} - V_{\text{кон}CAD}.$$

Задача 15. Ромб $ABCD$ с $\angle A = 60^\circ$ и стороной $AB = a$ вращается вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно стороне AD (см. рис. 23). Найти объем тела вращения.

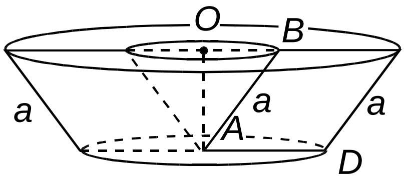


Рис. 23

Решение. □ Объем полученного тела вращения равен разности объемов усеченного конуса (с высотой OA и радиусами оснований $AD = a$ и OC) и конуса (с высотой OA и радиусом основания OB), где $O-$ точка пересечения прямой AB с осью вращения. Из прямоугольного треугольника OAB ($\angle AOB = 90°$, $\angle BAO = 30°$) получаем $OA = AB\cos\angle BAO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OB = \dfrac{a}{2}$.

Объем усеченного конуса

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot OA \cdot \left(AD^2 + AD \cdot OC + OC^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9a^2}{4} + \frac{3a^2}{2} + a^2\right) = \frac{19\sqrt{3}}{24}\pi a^3.$$

Объем конуса

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot OB^2 \cdot OA = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3.$$

Следовательно,

$$V = V_1 - V_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi a^3. \;◆$$

§5.4. Сфера и шар

Шаровой поверхностью, или ***сферой,*** называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки O (см. рис. 24), называемой ***центром сферы***. ***Шаром*** называется тело, ограниченное сферой.

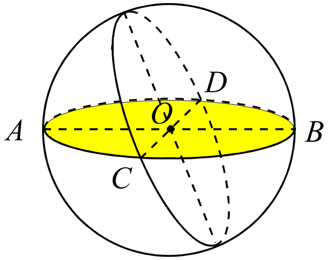


Рис. 24

Радиусом сферы называется отрезок прямой, соединяющий центр сферы с любой ее точкой; например, $AO = OC = R$. ***Хордой*** сферы называется отрезок прямой, соединяющий две ее любые точки. ***Диаметром*** сферы называется хорда, проходящая через ее центр, например AB или CD (см. рис. 24).

Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг диаметра.

Прямая, имеющая со сферической поверхностью одну общую точку, называется ***касательной***; две общие точки **–** ***секущей***.

Плоскость, проходящая через центр сферы и перпендикулярная хорде, проходит через середину хорды. Обратное утверждение: ***плоскость, проведенная через середину хорды перпендикулярно этой хорде, проходит через центр сферы.***

Секущие и касательные прямые к сфере обладают такими же свойствами, как и секущие и касательные к окружности. Например,

а) ***касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания;***

б) ***перпендикуляр, опущенный из центра сферы на секущую прямую, проходит через середину хорды;***

в) (Теорема о касательных). ***Если две прямые пересекаются в точке*** S ***и касаются сферы соответственно в точках*** A ***и*** B***, то*** $SA = SB$ **.**

г) (Теорема о касательной и секущей). ***Если одна из двух прямых, пересекающихся в точке*** S***, касается сферы в точке*** A***, а другая пересекает сферу в точках*** B ***и*** C***, то*** $SB \cdot SC = SA^2$**.**

д) (Теорема о секущих и хордах). ***Если две прямые, пересекающиеся в точке*** S***, пересекают сферу в точках*** A, B ***и*** C, D***, то*** $SA \cdot SB = SC \cdot CD$ (точка S может лежать как вне, так и внутри сферы).

Сечение сферы и шара плоскостью. Сечение сферы радиуса R плоскостью, отстоящей от ее центра на расстояние $h = OO_2$, $0 \le h < R$, есть окружность радиуса $r = O_2B = \sqrt{R^2 - h^2}$ (см. рис. 25). Центр сферы равноудален от всех ее точек, поэтому если две точки принадлежат сфере, то ее центр лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему эти точки, и проходящей через его середину. Сечение шара любой плоскостью есть круг. Круг, образованный сечением шара плоскостью, проходящей через центр, называется ***большим кругом шара***, а круг, образованный сечением шара плоскостью, не проходящей через центр, – ***малым кругом шара***.

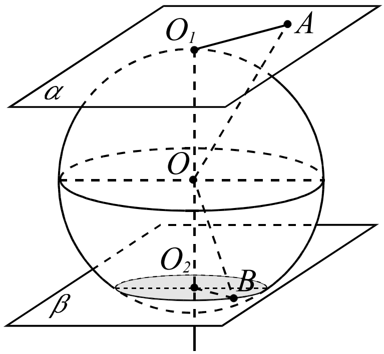


Рис. 25

Сечения, равноудаленные от центра шара, равны. Из двух сечений, не одинаково удаленных от центра шара, больший радиус имеет то, которое ближе к центру.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется ***диаметральной плоскостью***. ***Всякая диаметральной плоскость делит его поверхность на две симметричные и равные части*** (см. рис. 25).

Центр шара является его центром симметрии.

Через две точки сферы, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести окружность большого круга и притом только одну.

Окружности двух больших кругов при пересечении делятся пополам (см. рис. 24).

Плоскость, касательная к шару. ***Касательной плоскостью к шаровой поверхности*** называется плоскость, имеющая с этой поверхностью только одну общую точку (см. рис.25).

Плоскость, перпендикулярная радиусу шаровой поверхности в его конце, лежащем на этой поверхности, есть касательная плоскость. Обратно: ***касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания***.

Через любую точку шаровой поверхности проходит бесконечно много касательных, причем все они лежат в касательной плоскости шара.

Поверхность и объем шара и его частей

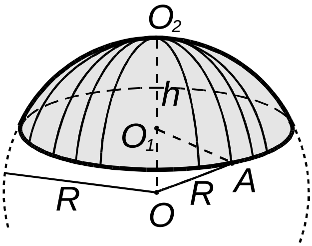


Рис. 26

Часть шаровой поверхности, отсекаемая от нее какой-нибудь плоскостью, называется ***сегментной поверхностью*** (см. рис. 26). Окружность пересечения плоскости с шаровой поверхностью называется ***основанием***, а отрезок $O_1O_2 = h$ радиуса, перпендикулярного к плоскости сечения, – ***высотой сегментной поверхности***.

Часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями, называется ***шаровым поясом*** (см. рис. 27). Окружности сечения называются ***основаниями шарового пояса***, а расстояние $O_1O_2 = h$ между параллельными плоскостями – ***высотой пояса***.

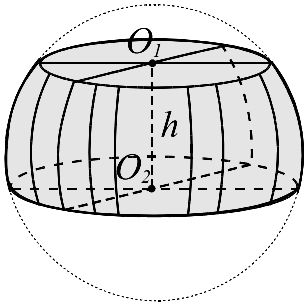


Рис. 27

Шаровым сегментом называется тело, отсекаемое от шара плоскостью.

Шаровым слоем называется тело, отсекаемое от шара двумя секущими параллельными плоскостями.

Для вычисления площади поверхностей шара радиуса R и его частей используются следующие формулы:

а) $S_{шара} = 4\pi R^2$ (***поверхность шара***);

б) $S_{сегм} = 2\pi Rh$ (***поверхность шарового сегмента*** высоты h);

в) $S_{пояса} = 2\pi Rh$ (***поверхность шарового пояса*** высоты h).

Поверхности шаров относятся как квадраты их радиусов или диаметров.

Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора вокруг оси, лежащей в его плоскости, проходящей через его центр и не пересекающей сектора.

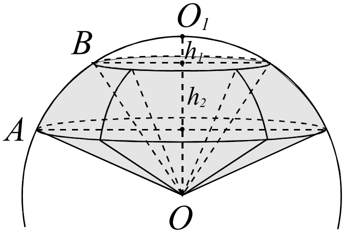


Рис. 28

Если ось вращения совпадает с радиусом, ограничивающим круговой сектор AOO_1, то полученный в результате вращения шаровой сектор называется ***простым.*** Если ось вращения не совпадает с радиусом, ограничивающим круговой сектор AOB, то шаровой сектор называют ***полым*** (см. рис. 28). Площадь полной поверхности простого шарового сектора вычисляется по формуле:

$$S_{ш.\,сект.} = S_{сегм.} + S_{бок.\,кон.} = \pi R(2h + \sqrt{2Rh - h^2}),$$

где $h -$ высота шарового сегмента.

Для полого шарового сектора:

$$S_{ш.\,сект.} = S_{ш.\,слоя} + S_{бок.\,ниж.кон.} + S_{бок.верх.\,кон.} =$$

$$= \pi R(2h_2 + \sqrt{2Rh_1 - h_1^2} + \sqrt{2R(h_1 + h_2) - (h_1 + h_2)^2}),$$

где $h_1 -$ высота шарового сегмента, а $h_2 -$ высота шарового слоя (см. рис. 28).

Объем тела вращения

Теорема Гюльдена. ***Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости фигуры и не пересекающей ее, вычисляется по формуле:*** $V_{тела\,вр} = 2\pi S d_c$,

где S – площадь вращающейся фигуры, а d_c – расстояние от центра тяжести фигуры до оси вращения.

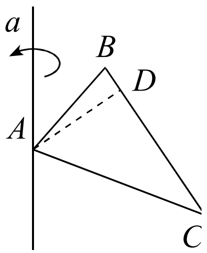


Рис. 29

При вычислении объема тела, полученного вращением треугольника вокруг оси, используется теорема: ***если треугольник ABC вращается вокруг оси a, лежащей в его плоскости и проходящей через его вершину A, не пересекая стороны BC, то объем тела, полученного при этом вращении, вычисляется по формуле:***

$$V_{тела\,вр} = \frac{AD}{3} \cdot S_{BC},$$

где $S_{BC} -$ площадь поверхности, образуемой при вращении стороны BC, AD – высота $\triangle ABC$ (см. рис. 29).

Объем шарового сектора равен произведению поверхности соответствующего шарового пояса (или шарового сегмента) на треть радиуса:

$$V_{шар.сект} = 2\pi Rh \cdot \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где R – радиус шарового сектора, а h – высота шарового пояса (сегмента).

Объем шара равен произведению его поверхности на треть радиуса:

$$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6},$$

где R – радиус шара, D – диаметр шара.

Формулу для объема шара получаем, положив в формуле для объема шарового сектора $h = 2R$.

Объемы шаров относятся как кубы их радиусов или диаметров.

Объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота цилиндра равна радиусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента, т. е.

$$V_{шар.сегм} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right),$$

где h – высота сегмента, а R – радиус шара.

Рассмотрим несколько задач на круговые тела.

Задача 16. Стороны треугольника равны 15, 14 и $13\,см$. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося сторон треугольника, если известно, что радиус шара равен $5\,см$.

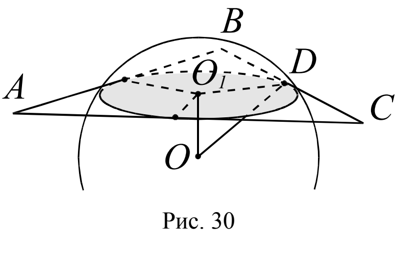


Рис. 30

Решение. □ Плоскость треугольника ABC пересечет шар O по кругу (см. рис. 30), вписанному в данный треугольник. Основание перпендикуляра OO_1, опущенного из центра шара O на плоскость треугольника ABC, попадает в центр этого круга O_1.

Пусть $O_1D = r$ радиус круга, проведенный в точку касания стороны CB с поверхностью шара. Тогда из прямоугольного треугольника ODO_1 находим $OO_1 = \sqrt{OD^2 - O_1D^2}$, где $OD = R = 5\ см$.

Радиус круга, вписанного в треугольник ABC, найдем по формуле $r = O_1D = \dfrac{S}{p}$, где $S -$ площадь треугольника, а p – его полупериметр.

$$O_1D = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}}{21} = 4\ см.$$

Тогда $OO_1 = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\ см$. ◆

Задача 17. Доказать, что боковая поверхность конуса, вписанного в шаровой сегмент, есть средняя пропорциональная между площадью основания и боковой поверхностью сегмента.

Решение. □ Пусть в шаровой сегмент ACB (см. рис. 31) вписан конус (основание конуса и сегмента общее). Требуется доказать, что $S^2_{бок.кон} = S_{шар.сегм}\cdot S_{осн.}$. Обозначим $OC = R$ – радиус шара, $AO_1 = r$ – радиус основания конуса (сегмента), $CO_1 = h$ – высота сегмента и $CB = l$ – образующая конуса.

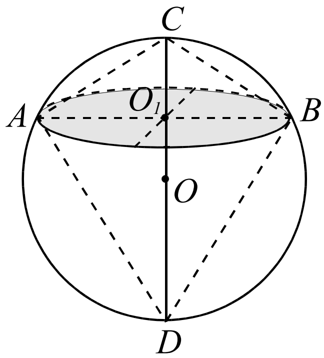


Рис. 31

Из прямоугольного треугольника CAD $(\angle A = 90°)$ по свойству катета имеем

$$AC^2 = CO_1\cdot CD \text{ или } l^2 = 2R\cdot h.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\pi^2 r^2$, получим

$$\pi^2 r^2 l^2 = 2\pi Rh\cdot \pi r^2 \text{ или } (\pi rl)^2 = (2\pi Rh)\cdot(\pi r^2).$$

Из формул $\pi rl = S_{бок.кон}$, $2\pi Rh = S_{шар.сегм}$ и $\pi r^2 = S_{осн.}$ получаем $S^2_{бок.кон} = S_{шар.сегм}\cdot S_{осн.}$, что и требовалось доказать. ◆

Задача 18. Определить, какую часть объема шара составляет объем сферического сектора, у которого сферическая и коническая поверхности равновелики.

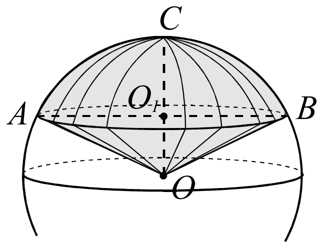


Рис. 32

Решение. □ Пусть сферическая поверхность шарового сектора $OACB$ (см. рис. 32) равновелика конической. Обозначим $OA = R$, $O_1A = r$ и $CO_1 = h$, тогда из условия равенства сферической и конической поверхностей сектора $2\pi Rh = \pi rR$, т. е. $2h = r$.

Из прямоугольного треугольника AO_1O $(\angle AO_1O = 90°)$ с учетом $OO_1 = R - h$, получим $R^2 = (2h)^2 + (R-h)^2$, откуда $h = \frac{2}{5}R$. Объем шарового сектора равен $V_{шар.сект} = \frac{2}{3}\pi hR^2 = \frac{4}{15}\pi R^3 = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{1}{5}V_{шара}$. �

Задача 19. Плоскость делит поверхность шара на части, отношение площадей которых равно k. Определить, в каком отношении она делит объем шара.

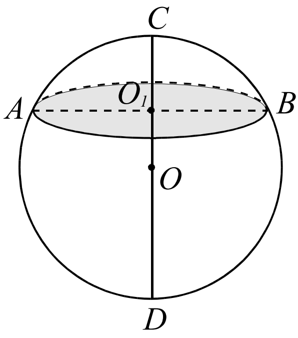


Рис. 33

Решение. □ Пусть плоскость круга с центром в точке O_1 отсекает от шара радиуса R сегмент высотой h. Проведем диаметр шара CD (см. рис. 33) перпендикулярно плоскости круга. Тогда $CO_1 = h$ и $O_1D = 2R - h$. Отношение поверхностей шаровых сегментов $S_{ABC} = S_1 = 2\pi Rh$ и $S_{ADB} = S_2 = 2\pi R(2R-h)$ по условию задачи равно k, т. е. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi Rh}{2\pi R(2R-h)} = \frac{h}{2R-h} = k$.

Тогда $\frac{h}{R} = \frac{2k}{k+1}$. Выразим объемы сегментов:

$$V_{ABC} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right) \text{ и } V_{ADB} = \pi (2R-h)^2 \left[R - \frac{1}{3}(2R-h) \right].$$

После преобразований находим $\dfrac{V_{ABC}}{V_{ADB}} = \dfrac{3Rh^2 - h^3}{4R^3 - 3Rh^2 + h^3} =$

$$= \frac{3(h/R)^2 - (h/R)^3}{4 - 3(h/R)^2 + (h/R)^3} = \frac{3\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2 - \left(\frac{2k}{k+1}\right)^3}{4 - 3\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{2k}{k+1}\right)^3} = \frac{k^2(k+3)}{3k+1}. ♦$$

Описанные шары

Шар называется ***описанным около многогранника***, а многогранник – ***вписанным в этот шар***, если все вершины многогранника лежат на поверхности шара.

Центр описанного около многогранника шара есть точка, равноудаленная от всех его вершин. Поскольку сечение сферы плоскостью есть окружность, то для того, чтобы около многогранника можно было описать сферу, необходимо, чтобы каждая его грань была таким многоугольником, около которого можно было описать окружность.

Геометрическое место точек, равноудаленных от всех вершин какой-либо грани, есть прямая, перпендикулярная к плоскости грани и проходящая через центр описанной около нее окружности. Геометрическое место точек, равноудаленных от концов какого-нибудь ребра, есть плоскость, перпендикулярная ребру и проходящая через его середину. Следовательно, центр шара принадлежит одновременно двум указанным геометрическим местам.

Для того, чтобы около многогранника можно было описать сферу, достаточно, чтобы все плоскости, проходящие через середины ребер перпендикулярно им, имели одну общую точку.

Для пирамиды и призмы имеют место следующие утверждения:

а) ***для того, чтобы около пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около основания пирамиды можно было описать окружность;***

б) ***для того, чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и около ее основания можно было описать окружность.***

Шар называется ***описанным около конуса,*** если поверхность шара проходит через вершину конуса, а окружность основания конуса лежит на поверхности шара. Шар называется ***описанным около цилиндра*** или ***усеченного конуса,*** если окружности их оснований лежат на поверхности шара.

Радиус сферы, описанной около цилиндра, выражается формулой $R=\sqrt{\dfrac{h^2}{4}+r^2}$, где $h-$ высота цилиндра, $r-$ радиус его основания.

Замечание. Около треугольной пирамиды, любой правильной призмы, цилиндра, конуса и усеченного конуса всегда можно описать шар.

Вычисление радиуса шара, описанного около правильной *n*-угольной пирамиды

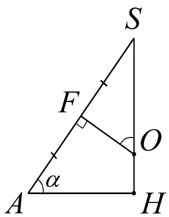


Рис. 34

Задача 20. Найдите радиус шара R, описанного около правильной *n*-угольной пирамиды, если известны a и α (см. §4.3, стр. 83).

Решение. □ Около любой правильной пирамиды можно описать шар. Его центр O совпадает с точкой пересечения высоты SH пирамиды с перпендикуляром FO к боковому ребру AS, проведенным через его середину F (см. рис. 34). Тогда $\angle SOF=\angle SAH=\alpha$. Имеем: $AS=\dfrac{AH}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{2\sin(\pi/n)\cos\alpha}$,

$$R=OS=\frac{FS}{\sin\alpha}=\frac{AS}{2\sin\alpha} \text{ или } R=\frac{a}{2\sin(\pi/n)\sin 2\alpha}.\blacksquare$$

Задача 21. Найдите радиус шара R, описанного около правильной *n*-угольной пирамиды, если известны a и β (см. §4.3, стр. 83).

Решение. □ Воспользуемся формулой (3) (см. таблицу на стр. 82). Так как $\sin 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, то получим $\sin 2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\beta\cos(\pi/n)}{1+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2(\pi/n)}$.

Используя результат предыдущей задачи, получим

$$R=\frac{a\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\cos^2(\pi/n)\right)}{2\sin(2\pi/n)\operatorname{tg}\beta}.\blacksquare$$

Задача 22. Найдите радиус шара R, описанного около правильной n-угольной пирамиды, если известны a и γ (см. §4.3, стр. 83).

Решение. □ Из формулы (2) (см. таблицу §4.3 на стр. 82) следует:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\cos\gamma - \cos(2\pi/n)}}{\sqrt{2}\sin(\pi/n)},$$

а $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\sin(\gamma/2)\cdot\sqrt{\cos\gamma - \cos(2\pi/n)}}{\sin^2(\pi/n)}$. Значит,

$$R = \frac{a}{2\sin(\pi/n)\sin 2\alpha} = \frac{\sqrt{2}a\sin(\pi/n)}{4\sin(\gamma/2)\cdot\sqrt{\cos\gamma - \cos(2\pi/n)}}. \blacksquare$$

Вписанные шары

Шар называется ***вписанным в многогранный угол***, если он касается каждой его грани. Не во всякий многогранный угол можно вписать шар.

Шар называется ***вписанным в многогранник,*** а многогранник – ***описанным вокруг шара,*** если плоскости всех граней касаются шара. Если шар находится внутри многогранника, то он называется ***вписанным*** внутренним образом или просто вписанным, а если вне многогранника, – то ***вневписанным*** (в этом случае шар касается одной из граней и продолжений граней, смежных с ней).

Центр вписанной сферы является точкой пересечения биссекторов всех внутренних двугранных углов многогранника.

Шар называется ***вписанным в конус, усеченный конус*** или ***цилиндр***, если поверхность шара касается плоскостей оснований этих фигур и всех образующих их боковых поверхностей. Центр вписанного в конус шара совпадает с точкой пересечения высоты конуса с биссектрисой угла между любой образующей и плоскостью основания. В конус всегда можно вписать шар. Его радиус выражается формулой (см. рис. 35):

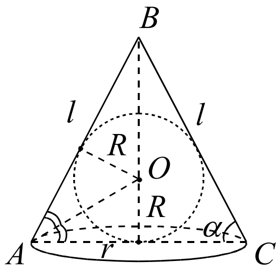


Рис. 35

$$R = r\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{S_{ABC}}{r+l},$$

где $r-$ радиус основания конуса, $\alpha-$ угол между образующей и плоскостью основания, l – образующая конуса, S_{ABC} – площадь осевого сечения.

Замечание. В треугольную и любую правильную n-угольную пирамиду также всегда можно вписать шар.

Под призмой, описанной около шара, понимают такую призму, грани которой касаются поверхности шара. Отсюда следует:

1) центр шара лежит в плоскости перпендикулярного сечения призмы, делит расстояние между ее основаниями пополам и является центром круга, вписанного в это сечение;

2) перпендикулярным сечением призмы должен быть такой многоугольник, в который можно вписать круг;

3) диаметр круга, вписанного в перпендикулярное сечение призмы, равен диаметру шара и высоте призмы;

4) точки касания сферической поверхности с боковыми гранями призмы есть точки касания окружности круга, вписанного в перпендикулярное сечение, со сторонами этого сечения;

5) точки касания сферической поверхности с основаниями призмы есть точки пересечения с ними высоты призмы, проходящей через центр шара и делящейся им пополам;

6) все биссектральные плоскости двугранных углов между боковыми гранями пересекаются по одной прямой, которая параллельна боковым ребрам призмы и является геометрическим местом центров кругов, вписанных в точки касания сферической поверхности с боковыми гранями призмы;

7) все биссектральные плоскости двугранных углов между боковыми гранями и основаниями призмы пересекаются в одной точке, совпадающей с серединой отрезка, соединяющего точки пересечения прямой, упомянутой в п. 6, с плоскостями оснований, т. е. в центре шара;

8) призма не обязательно должна быть прямой.

Все приведенные факты справедливы и для параллелепипеда, так как он является призмой.

Для того, чтобы в призму можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность и чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности.

В правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ее высота равна диаметру окружности, вписанной в основание.

Для других пространственных фигур условия возможности вписать в них шар должны быть специально установлены в каждом случае.

Задача 23. Доказать, что объем многогранника, описанного около шара, равен произведению полной поверхности многогранника на треть радиуса шара.

Доказательство. □ Пусть в многогранник, имеющий n граней, объем V и площадь поверхности $S_{полн.}$, вписан шар, поверхность которого касается граней многогранника в точках H_1, …, H_n. Соединим центр шара O и вершины многогранника отрезками. Рассмотрим n пирамид, имеющих общую вершину O, основаниями которых являются грани многогранника. Пусть $S_1, \ldots, S_n -$ площади граней многогранника и, соответственно, оснований полученных пирамид, а радиусы шара, проведенные в точки касания, будут высотами этих пирамид $OH_1 = \ldots = OH_n = r$. Тогда объем V будет равен сумме объемов пирамид $V_i = \frac{1}{3} \cdot OH_i \cdot S_i$, где $1 \le i \le n$, или

$$V = \frac{1}{3} \cdot OH_1 \cdot S_1 + \ldots + \frac{1}{3} \cdot OH_n \cdot S_n = \frac{1}{3} \cdot r \cdot (S_1 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3} r \cdot S_{полн.}.$$

Из доказанного следует, что ***радиус вписанного в многогранник шара равен утроенному объему многогранника, деленному на его полную поверхность***: $r = \frac{3V}{S}$. ◆

Вычисление радиуса шара, вписанного в правильную *n*-угольную пирамиду

Как известно, в правильную пирамиду всегда можно вписать шар, его центр O лежит в точке пересечения высоты SH пирамиды с биссектрисой угла SKH (см. рис. 36). Поэтому проще всего вычисляется радиус вписанного шара в случае, когда задан угол β.

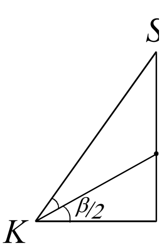


Рис. 36

С этого случая мы и начнем.

Задача 24. Найдите радиус r шара, вписанного в правильную n-угольную пирамиду, если известны a и β (см. §4.3, стр. 83).

Решение. □ Имеем: $r = OH = KH \cdot \mathrm{tg}(\beta / 2)$.

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.\ ■$$

Задача 25. Найдите радиус r шара, вписанного в правильную n-угольную пирамиду, если известны a и α (см. §4.3, стр. 83).

Решение. □ Из формулы (3) (см. таблицу §4.3 на стр. 82) следует, что $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{\cos^2(\pi/n)+\operatorname{tg}^2\alpha}-\cos(\pi/n)}{\operatorname{tg}\alpha}$. Следовательно,

$$r=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{a\operatorname{ctg}(\pi/n)\left(\sqrt{\cos^2(\pi/n)+\operatorname{tg}^2\alpha}-\cos(\pi/n)\right)}{2\operatorname{tg}\alpha}.\ ■$$

Задача 26. Найдите радиус r шара, вписанного в правильную n-угольную пирамиду, если известны a и γ (см. §4.3, стр. 83).

Решение. □ Используя результат задачи 24 и формулу (4) (см. таблицу §4.3 на стр. 82), получаем $r=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{\sin\left((\pi/n)-(\gamma/2)\right)}{\sin\left((\pi/n)+(\gamma/2)\right)}}$. ■

Замечание. В тех задачах, в которых по условию сфера касается нескольких плоскостей или несколько сфер касаются друг друга или каких-то плоскостей, обычно трудно сделать наглядный чертеж, на котором достаточно ясно проявлялись бы требуемые связи и соотношения. Но в этих случаях оказывается, что нет необходимости рисовать все сферы, достаточно изобразить плоскости, центры сфер, проекции центров на плоскости и, возможно, какие-либо характерные сечения.

Задача 27. В правильной четырехугольной пирамиде центры вписанного и описанного шаров совпадают. Определить плоский угол при вершине пирамиды.

Решение. □ Пусть $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида и точка O – центр вписанного в нее и описанного вокруг нее шаров (см. рис. 37). Точка O_1 – центр окружности, описанной вокруг треугольника SDC. Перпендикуляр из центра шара на плоскость треугольника

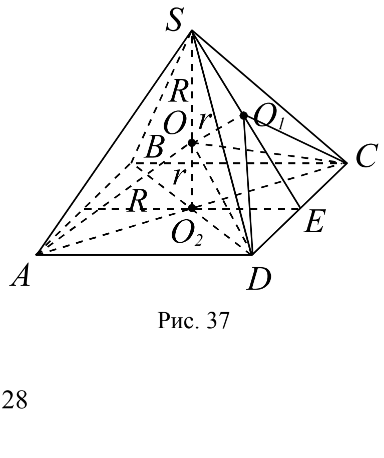


Рис. 37

SDC попадет в точку O_1. $OO_2 = OO_1 = r$ – радиусы вписанного в пирамиду шара, а $OD = OA = SO = R$ – радиусы описанного шара шара. Легко показать, что прямоугольные треугольники OO_2D, OO_1D, OO_2C и OO_1C равны между собой. Из их равенства следует, что $DO_2 = CO_2 = DO_1 = CO_1$ и треугольники DO_2C и DO_1C равны. В таком случае $\angle DO_2C = \angle DO_1C = 90°$.

Далее, $SO_1 = DO_1 = CO_1$ как радиусы окружности, описанной вокруг треугольника SDC. Из равнобедренного $\triangle DO_1S$ по свойству внешнего угла $\angle DSE = \frac{1}{2}\angle DO_1E$. Тогда $\angle DSC = \frac{1}{2}\angle DO_1C = 45°$. ◆

Задача 28. В конус вписан шар радиуса r. Найти объем конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстояние d ($d > r$ и угол при вершине в осевом сечении конуса тупой).

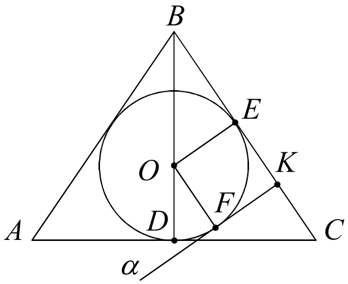


Рис. 38

Решение. □ Обозначим плоскость, о которой идет речь в условии задачи, через α. Треугольник ABC (см. рис. 38) – сечение конуса плоскостью, перпендикулярной плоскости α и проходящей через центр O шара, K – точка пересечения стороны BC с плоскостью α, OE – радиус шара, перпендикулярный стороне BC, F – точка касания шара с плоскостью α, BD – высота конуса. Тогда $BK = d$, $OE = OF = r$. Так как углы OEK, EKF и KFO – прямые, то $OEKF$ – квадрат со стороной r. Следовательно, $BE = BK - EK = d - r$. Из теоремы Пифагора для треугольника BOE получаем:

$$BO = \sqrt{OE^2 + BE^2} = \sqrt{r^2 + (d - r)^2}.$$

Далее, $BD = BO + OD = \sqrt{r^2 + (d - r)^2} + r$. Заметим, что треугольники OBE и BDC подобны (по двум углам). Следовательно,

$$\frac{BE}{BD}=\frac{OE}{DC} \text{ или } DC=\frac{BD\cdot OE}{BE}=\frac{\left(\sqrt{r^2+(d-r)^2}+r\right)\cdot r}{d-r}.$$

И, наконец, объем конуса:

$$V=\frac{\pi}{3}\cdot DC^2\cdot BD=\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{r^2+(d-r)^2}+r\right)^3\cdot\frac{r^2}{(d-r)^2}. \text{ ◆}$$

Задача 29. Вокруг шара описан усеченный конус, образующая которого равна a. Найти боковую поверхность этого конуса.

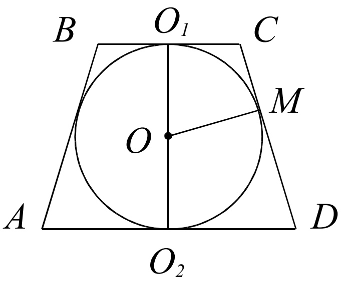


Рис. 39

Решение. □ На рис. 39 изображено осевое сечение усеченного конуса. По условию задачи $AB=a$. Пусть $O_1C=r$, а $O_2D=R$. Тогда по свойству касательных, выходящих из одной и той же точки к окружности, $O_1C=CM$ и $O_2D=MD$ или $O_1C+O_2D=CM+MD=CD$, т. е. $R+r=a$.

Следовательно, искомая боковая поверхность усеченного конуса

$$S_{бок}=\pi(R+r)a=\pi a^2. \text{ ◆}$$

Задача 30. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, основанием которой служит ромб с диагоналями 6 и 8, а высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 1.

Решение. □ По данным диагоналям найдем сторону ромба $a=\sqrt{4^2+3^2}=5$ и радиус вписанного в ромб круга $r=\dfrac{2S}{P}$, где S – площадь ромба, а P – его периметр. Тогда $r=\dfrac{6\cdot 8}{20}=2{,}4$.

Высота боковой грани пирамиды $m=\sqrt{h^2+r^2}$, где h – высота пирамиды, а r – радиус вписанного в основание круга. Отсюда находим $m=\sqrt{6,76}=2,6$. Полная поверхность пирамиды $S_{полн.}=S_{бок.}+S_{осн.}=\frac{1}{2}(20\cdot 2,6+8\cdot 6)=50$, а объем пирамиды

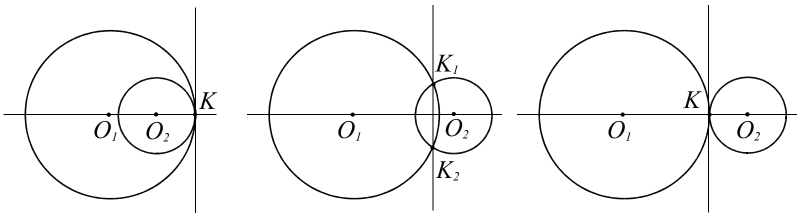
$$V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 24\cdot 1=8.$$

Используя формулу для радиуса вписанного в выпуклый многогранник шара, найдем искомый радиус шара $R=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot 8}{50}=0,48$. �

Касающимися сферами (шарами) называются две сферы (шара), имеющие лишь одну общую точку. Точка касания и их центры лежат на одной прямой.

Две или несколько сфер называются ***концентрическими***, если их центры совпадают (находятся в одной точке).

Линией (плоскостью) центров называется прямая (плоскость), проходящая через центры двух сфер (шаров).



а) б) в)

Рис. 40

Если две сферы имеют общую точку, лежащую на линии центров, то они в этой точке касаются внутренним (см. рис. 40а) или внешним (см. рис. 40в) образом.

Если две сферы имеют общую точку, расположенную вне линии центров, то они пересекаются и линией пересечения является окружность.

Четырех общих точек, не лежащих в одной плоскости, две неравные сферы иметь не могут, так как, иначе, через эти четыре точки оказались бы проведенными две разные сферы, что невозможно.

Две касающиеся внутренним образом сферы имеют одну общую касательную плоскость. Она перпендикулярна их линии центров (см. рис. 40а).

Задача 31. Четыре одинаковых шара радиуса $\sqrt{3}$ расположены так, что каждый из них касается трех остальных. Найти радиус сферы, имеющей с данными четырьмя шарами внутреннее касание.

Решение. □ Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$, вершинами которого являются центры данных шаров (см. рис. 41). Его ребра равны $2\sqrt{3}$. Пусть точка O – центр сферы, касающейся внутренним образом данных шаров,

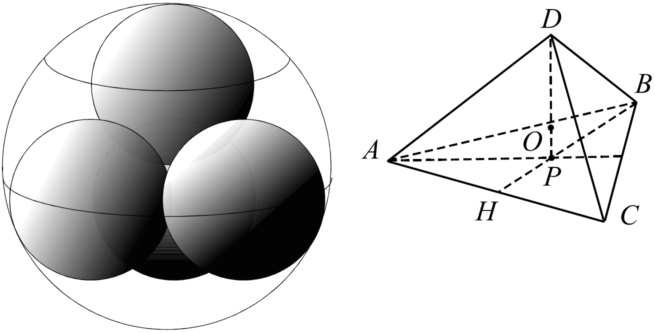


Рис. 41

R – ее радиус. Поскольку $R = OD + \sqrt{3} = OB + \sqrt{3} = OC + \sqrt{3} = = OA + \sqrt{3}$ (точка касания, центры шара и сферы лежат на одной прямой), то O – также центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$. Пусть DP – высота тетраэдра, DH – высота его боковой грани ADC, $DH = AD \cdot \sqrt{3}/2 = 3$. BH – высота грани ABC, $BH = 3$. Точка P – пересечение медиан треугольника ABC, $BP = 2BH/3 = 2$, $PH = 1$. Из теоремы Пифагора для $\triangle DHP$ $DP = \sqrt{DH^2 - HP^2} = 2\sqrt{2}$. Так как точка O совпадает с центром шара, вписанного в тетраэдр, то OH – биссектриса $\angle DHB$. Следовательно, $DO : OP = DH : HP = 3:1$, $DO = \dfrac{3}{4}DP = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Тогда $R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}$. ◆

Замечание. При решении задач следует учитывать, что если три шара имеют общую точку, не лежащую в плоскости их центров, то они имеют и вторую общую точку, симметричную первой относительно этой плоскости, потому что плоскость центров служит общей плоскостью симметрии трех шаров.

Глава 6. Векторный и координатный методы

§6.1. Векторный метод

В первой части пособия («Планиметрия») были введены операции сложения векторов и умножения вектора на число. В геометрии векторы часто используется для формулировки и доказательства теорем, решения различных планиметрических и стереометрических задач (например, на доказательство параллельности прямых или отрезков, принадлежности прямых одной плоскости, определению углов между скрещивающимися прямыми и т. д.).

Так же, как на плоскости, в пространстве справедливо ***общее правило сложения векторов,*** которое формулируется следующим образом:

чтобы построить сумму векторов $\vec{a}_1$ ***,*** $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ ***, нужно к концу вектора*** $\vec{a}_1$ ***приложить начало вектора*** $\vec{a}_2$ ***, затем к концу вектора*** $\vec{a}_2$ ***приложить начало вектора*** $\vec{a}_3$ ***и так далее до тех пор, пока не дойдем до вектора*** $\vec{a}_n$ ***. Суммой*** $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$ ***будет вектор, идущий из начала вектора*** $\vec{a}_1$ ***в конец вектора*** $\vec{a}_n$ (например, см. рис. 1 $\overrightarrow{A_1A_6} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5$).

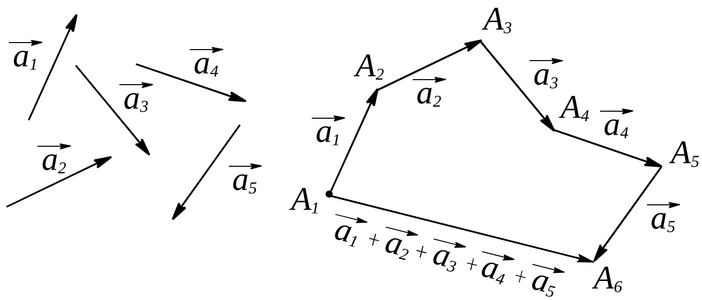


Рис. 1

В частности, если начало первого вектора совпадает с концом последнего, то сумма векторов равна нулевому вектору.

Следствием общего правила сложения векторов является ***правило многоугольника***: если $A_1, A_2, \ldots, A_n -$ произвольные точки, то

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n} .$$

При совпадении точек A_1 и A_n сумма равна нулевому вектору.

Рассмотрим задачу на применение векторного метода.

Задача 1 (о средней линии тетраэдра). Пусть в тетраэдре $SABC$ точки K и $L -$ середины противоположных ребер AB и SC соответственно. Отрезок KL называется ***средней линией тетраэдра***. Доказать, что: а) $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BS})$;

б) $KL \le \frac{1}{2}(AC + BS)$.

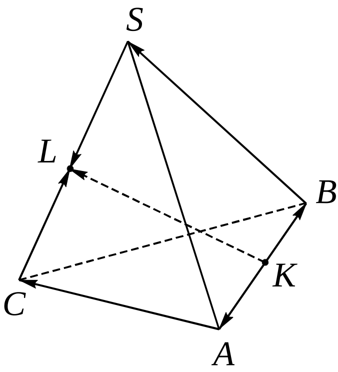


Рис. 2

Доказательство. □ а) Используя правило многоугольника, выразим вектор $\overrightarrow{KL}$ через сумму векторов двумя способами: $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL}$ и $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SL}$ (см. рис. 2). Сложив левые и правые части равенств, получим:

$$2\overrightarrow{KL} = (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}) + (\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{SL}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BS}) .$$

Поскольку $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = 0$ и $\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{SL} = 0$, то $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BS})$.

б) $KL = |\overrightarrow{KL}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BS}| \le \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BS}|) = \frac{1}{2}(AC + BS)$. ■

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются ***компланарными,*** если они параллельны одной плоскости. Алгебраически этот факт означает, что какой-нибудь из них выражается через другие; например,

$$\vec{c} = \alpha\, \vec{a} + \beta\, \vec{b} \text{, где } \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$$

Задача 2. Докажите, что биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

Решение. □ Отложим на ребрах трехгранного угла $SABC$ (см. рис. 3) SA, SB, SC и на продолжении ребра SA за вершину от точки S единичные векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ и $-\vec{e_1}$ соответственно. Тогда векторы $\vec{SK} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{SM} = \vec{e_2} + \vec{e_3}$ и $\vec{SN} = \vec{e_3} + (-\vec{e_1})$ в соответствии с правилом сложения векторов направлены вдоль биссектрис SK, SM, SN плоских углов ASB, BSC, CSD. Биссектриса угла CSD, смежного с углом ASB имеет направление вектора $\vec{SN} = \vec{e_3} + (-\vec{e_1})$. Но $\vec{e_3} + (-\vec{e_1}) = (\vec{e_2} + \vec{e_3}) - (\vec{e_1} + \vec{e_2})$, т. е. $\vec{SN} = \vec{SM} - \vec{SK}$. Следовательно, указанные векторы компланарны, а значит и прямые, вдоль которых они направлены, также лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать. �

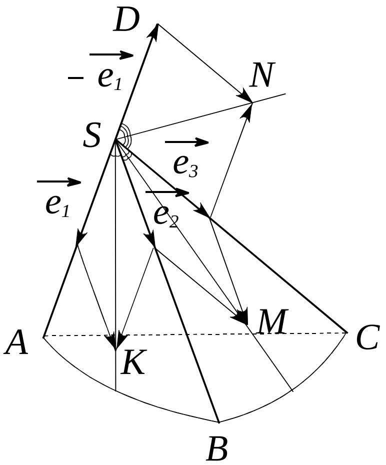


Рис. 3

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$ ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется формулой $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Если хотя бы один из векторов равен $\vec{0}$, то их произведение равно 0, т.е. $(\vec{a}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{a}) = 0$.

Заметим, что $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

Свойства скалярного произведения векторов:

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

3) $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$.

Проекция вектора

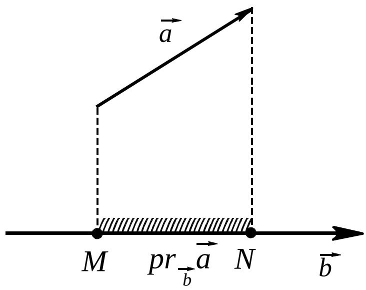


Рис. 4

Обозначим через $pr_{\vec{b}}\vec{a}$ проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ (проекция – это число, равное длине отрезка MN, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют острый угол, и равное $-MN$, если – тупой) (см. рис. 4).

С помощью скалярного произведения векторов можно находить длины векторов, проекции вектора на вектор, углы между векторами.

Справедливы формулы:

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$; (2) $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$; (3) $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Задача 3. Пусть $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Найти:

а) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$; б) $pr_{\vec{a}-\vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$;

в) $\cos\angle(\vec{a}, (\vec{a} + \vec{b}))$.

Решение. □ а) $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot (-0{,}5) = -3$.

Далее, $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+2\vec{b})^2}=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})+4(\vec{a},\vec{b})+4(\vec{b},\vec{b})}=2\cdot\sqrt{7}$;

б) $pr_{\vec{a}-\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{\sqrt{(\vec{a},\vec{a})-2(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{b})}}=-\dfrac{5}{\sqrt{19}}$;

в) $\cos\angle(\vec{a},(\vec{a}+\vec{b}))=\dfrac{(\vec{a},\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$. �

§6.2. Метод координат

Метод координат в пространстве состоит в следующем. Вводится декартова система координат, в которой все точки и векторы пространства однозначно задаются своими координатами; все прямые, плоскости и сферы определяются уравнениями. Для вычисления углов между прямыми, плоскостями, прямыми и плоскостями; расстояний между различными геометрическими объектами (точками, прямыми, плоскостями) выводятся соответствующие формулы. В итоге геометрическая задача сводится к решению алгебраических уравнений или систем уравнений.

Любой вектор плоскости можно выразить через два неколлинеарных вектора этой плоскости, а любой вектор пространства – через три некомпланарных вектора, причем эти выражения единственны. Система векторов, через которые однозначно выражаются остальные векторы (плоскости, пространства), называется ***базисом***. Базисом в пространстве является любая тройка некомпланарных векторов.

Теорема. ***Если*** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}-$ ***некомпланарные векторы пространства, то всякий вектор*** $\vec{v}$ ***единственным образом представляется в виде*** $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$***, где*** x, y, $z-$ ***действительные числа.***

Пусть в пространстве зафиксирована прямоугольная система координат с началом в точке O и единичными направляющими векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных прямых (см. рис. 5) Тогда каждый вектор $\vec{OM}$

однозначно представим в виде $\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Числа x, y, z – называют ***координатами*** вектора $\vec{OM}$. Соответственно x, y, z – ***абсцисса***, ***ордината*** и ***аппликата*** вектора. Обозначают $\vec{OM} = \{x; y; z\}$.

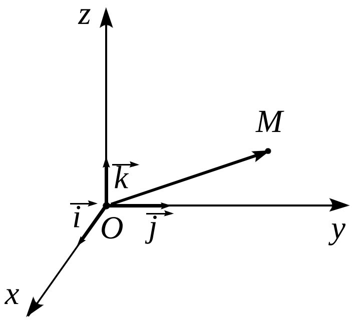


Рис. 5

Если вектор задан координатами начала $M(x_M; y_M; z_M)$ и конца $N(x_N; y_N; z_N)$, то

$$\vec{MN} = \{x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M\}.$$

Выражение операций с векторами в координатной форме: если $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ и $k-$ действительное число, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\}, \quad k\,\vec{a} = \{k\,a_1; k\,a_2; k\,a_3\}.$$

Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ имеет вид: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

Выражение скалярного произведения векторов через их декартовы координаты. Пусть $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, тогда

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Выражение длины вектора через его декартовы координаты. Пусть $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$. Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Задача 4. Пусть $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(-1;\ 0;\ 2)$, $C(1;\ 1; -5)$ – точки пространства. Найти: 1) косинус угла B треугольника ABC;

2) площадь этого треугольника;

3) $pr_{\vec{AB}}\, \vec{AM}$, где AM – медиана треугольника.

Решение. 1) $\cos\angle B=\cos\angle(\vec{BA},\vec{BC})=\dfrac{(\vec{BA},\vec{BC})}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|}$. Координаты векторов $\vec{BA}=\{1-(-1);2-0;3-2\}=\{2;2;1\}$, $\vec{BC}=\{2;1;-7\}$. Тогда $(\vec{BA},\vec{BC})=2\cdot2+2\cdot1+1\cdot(-7)=-1$, $|\vec{BA}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$, $|\vec{BC}|=3\sqrt{6}$. Следовательно, $\cos\angle B=\dfrac{(\vec{BA},\vec{BC})}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|}=\dfrac{-1}{3\cdot3\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{54}$.

2) $\sin\angle B=\sqrt{1-\cos^2\angle B}=\dfrac{\sqrt{485}}{9\sqrt{6}}$. Тогда

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|\cdot\sin\angle B=\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{485}}{9\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\sqrt{485}.$$

3) $\vec{AM}=\dfrac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})=\dfrac{1}{2}\left(\{-2;-2;-1\}+\{0;-1;-8\}\right)=$

$=\{-1;-1,5;-4,5\}$. Тогда $pr_{\vec{AB}}\vec{AM}=\dfrac{(\vec{AM},\vec{AB})}{|\vec{AB}|}=\dfrac{2+3+4,5}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{19}{6}$. �

Деление отрезка в данном отношении

Если точка $C(x;y;z)$ делит отрезок AB, координаты концов которого $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, в заданном отношении $AC:CB=k$, то координаты точки $C(x;y;z)$ определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+kx_2}{1+k};\ y=\frac{y_1+ky_2}{1+k};\ z=\frac{z_1+kz_2}{1+k}.$$

Если точка $C(x;y;z)$ делит отрезок AB пополам, то

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Уравнения плоскости

Нормальный вектор плоскости – это любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой плоскости.

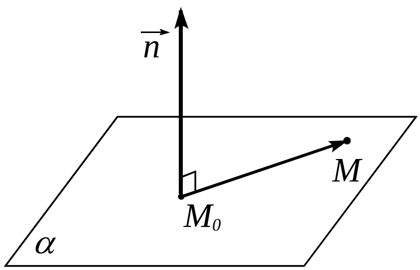


Рис. 6

Пусть $\vec{n}=\{A;B;C\}$ – нормальный вектор плоскости α, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – фиксированная точка плоскости (см. рис. 6). Точка $M(x;y;z)$ принадлежит плоскости в том и только том случае, если $(\overrightarrow{MM_0},\vec{n})=0$. Выражая скалярное произведение векторов в координатах, получим уравнение плоскости: (1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ или

(2) $Ax+By+Cz+D=0$ (***общее*** уравнение плоскости).

Пусть α_1 и α_2 – две плоскости, заданные уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Тогда:

(а) $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$;

(б) $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ (плоскости совпадают) $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$;

(в) $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow (\vec{n}_1,\vec{n}_2)=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Уравнения прямой в пространстве

Направляющий вектор прямой l – любой ненулевой вектор $\vec{q}$, коллинеарный (т. е. параллельный) прямой.

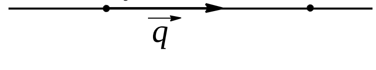


Рис. 7

Пусть $\vec{q}=\{q_1;q_2;q_3\}$ – направляющий вектор, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – фиксированная точка прямой l, точка

$M(x;y;z)-$ произвольная точка прямой (см. рис. 7). Используя условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{MM_0}$ и $\overrightarrow{q}$, уравнение прямой в пространстве можно записать в одном из следующих видов:

(1) $\dfrac{x-x_0}{q_1}=\dfrac{y-y_0}{q_2}=\dfrac{z-z_0}{q_3}$ (***каноническое*** уравнение прямой);

(2) $\begin{cases} x=x_0+q_1t, \\ y=y_0+q_2t, \\ z=z_0+q_3t, \end{cases}$ где $t\in\mathbb{R}$ (***параметрические уравнения*** прямой). Число t называется ***параметром*** и удовлетворяет уравнению $\overrightarrow{MM_0}=t\,\overrightarrow{q}$, где $M-$ точка прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$, имеет вид $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Пусть l_1 и l_2- две прямые, $\overrightarrow{q}=\{q_1;q_2;q_3\}$ и $\overrightarrow{p}=\{p_1;p_2;p_3\}$ – их направляющие вектора. Тогда:

(а) l_1 и l_2 параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{q}\parallel\overrightarrow{p}$; иначе l_1 и l_2 пересекаются в точке или скрещиваются;

(б) $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{q}\perp\overrightarrow{p}\Leftrightarrow(\overrightarrow{q},\overrightarrow{p})=0$.

Расстояния и углы

Расстояние между точками $M(x_M;y_M;z_M)$ и $N(x_N;y_N;z_N)$ выражается формулой $MN=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2+(z_M-z_N)^2}$.

Расстояние от точки $M(x_M;y_M;z_M)$ ***до плоскости*** α, заданной общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, может быть вычислено по формуле: $\rho(M,\alpha)=\dfrac{|Ax_M+By_M+Cz_M+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Расстояние между параллельными плоскостями α_1 и α_2 ($\alpha_1: Ax+By+Cz+D_1=0$ и $\alpha_2: Ax+By+Cz+D_2=0$) вычисляется по формуле: $\rho(\alpha_1,\alpha_2)=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Угол между скрещивающимися прямыми. Косинус угла φ ($0\le\varphi\le 90°$) между прямыми a и b определяется по формуле:

$$\cos\varphi=|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})|=\frac{|(\vec{a},\vec{b})|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$ где $\vec{a}$ и $\vec{b}-$ векторы,

коллинеарные прямым a и b (см. рис. 8а и 8б).

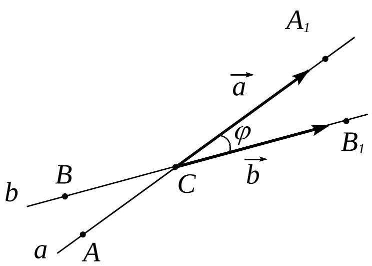


Рис. 8а

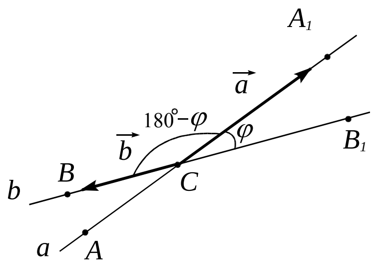


Рис. 8б

Если известны декартовы координаты векторов $\vec{a}=\{a_1;a_2;a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1;b_2;b_3\}$, то формула приобретает вид:

$$\cos\varphi=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (*)$$

Применим полученную формулу для решения следующей задачи.

Задача 5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка $K-$ центр грани $A_1B_1C_1D_1$, $AB=1$, $BC=2$, $AA_1=3$. Найти угол между прямыми DB_1 и AK.

Решение. □ Введем декартову систему координат с началом в точке A и осями, направленными по ребрам параллелепипеда AB, AD и

AA_1 (см. рис. 9). В этой системе координат точки A, K, D, B_1 имеют координаты $(0;0;0)$, $\left(3;1;0,5\right)$, $\left(0;2;0\right)$ и $(3;0;1)$, соответственно. Тогда для векторов $\overrightarrow{AK} = \left\{3;1;0,5\right\}$, $\overrightarrow{DB_1} = \left\{3;-2;1\right\}$. Найдем модули

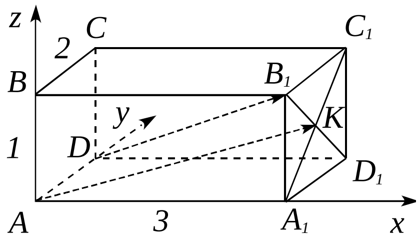


Рис. 9

векторов $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{DB_1}$:

$$|\overrightarrow{AK}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (0,5)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2} \text{ и } |\overrightarrow{DB_1}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}.$$

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты: $(\overrightarrow{DB_1}, \overrightarrow{AK}) = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 0,5 \cdot 1 = 7,5$.

По формуле (*) косинус угла между прямыми DB_1 и AK равен

$$\cos\angle(DB_1, AK) = \frac{|(\overrightarrow{DB_1}, \overrightarrow{AK})|}{|\overrightarrow{DB_1}| \cdot |\overrightarrow{AK}|} = \frac{7,5 \cdot 2}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{14}} = \frac{15}{\sqrt{574}}.$$

Тогда, искомый угол $\angle(DB_1, AK) = \arccos\dfrac{15}{\sqrt{574}}$. �

Угол между прямой и плоскостью. Пусть в пространстве введена декартова система координат, и плоскость α задана уравнением: $Ax + By + Cz + D = 0$, тогда вектор нормали плоскости $\overrightarrow{n} = \left\{A; B; C\right\}$. Пусть задан направляющий вектор прямой a: $\overrightarrow{q} = \left\{q_1; q_2; q_3\right\}$. Тогда синус угла φ между прямой и плоскостью определяется формулой (см. рис. 10):

$$\sin\varphi = |\cos\angle(a,\alpha)| = \frac{|(\vec{n},\vec{q})|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{q}|} = \frac{|A\cdot q_1 + B\cdot q_2 + C\cdot q_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}. \quad (**)$$

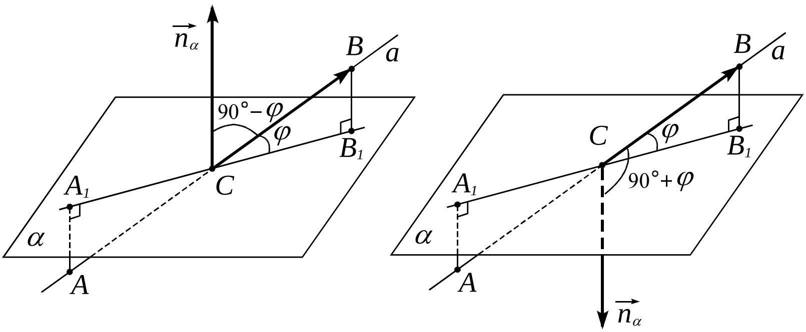


Рис. 10

Задача 6. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$. Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом, равным $60°$. Точка $R-$ середина ребра MC. Найти угол, который образует прямая DR с плоскостью MAC.

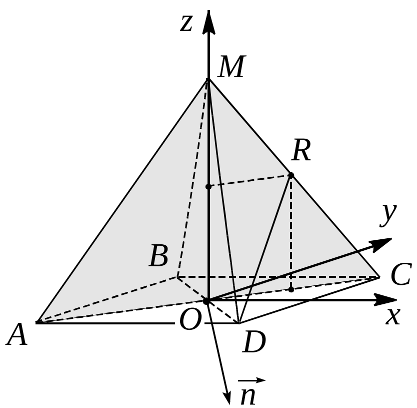


Рис. 11

Решение. □ Вершина M пирамиды $MABCD$ проектируется в точку пересечения диагоналей O прямоугольника, лежащего в основании (см. рис. 11). Введем систему координат следующим образом. Точку O примем за начало координат. Оси Ox и Oy направим параллельно сторонам основания, а ось $Oz-$ вдоль высоты пирамиды OM.

Пусть $AB = a$, тогда $AD = 2a$, диагональ основания $AC = a\sqrt{5}$, высота пирамиды $OM = OA \cdot \mathrm{tg}60^\circ = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Точки D и R имеют координаты: $D\left(a; -\dfrac{a}{2}; 0\right)$, $R\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{15}}{4}\right)$.

Вектор $\overrightarrow{DR} = \left\{-\dfrac{a}{2}; \dfrac{3a}{4}; \dfrac{a\sqrt{15}}{4}\right\}$, $|\overrightarrow{DR}| = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Так как плоскость AMC перпендикулярна плоскости основания (содержит прямую OM) и содержит прямую AC, которая в плоскости Oxy задается уравнением $y - \dfrac{x}{2} = 0$, то, соответственно, и уравнение плоскости AMC имеет вид $y - \dfrac{x}{2} = 0$. Тогда ее вектор нормали $\vec{n} = \left\{-\dfrac{1}{2}; 1; 0\right\}$ и $|\vec{n}| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

В соответствии с формулой (**) синус искомого угла φ равен:

$$\sin\varphi = |\cos\angle(\vec{n}, \overrightarrow{DR})| = \frac{|(\vec{n}, \overrightarrow{DR})|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{DR}|} = \frac{\left|\dfrac{a}{4} + \dfrac{3a}{4}\right|}{\dfrac{\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{35}},$$

т. е. $\varphi = \arcsin\dfrac{4}{\sqrt{35}}$. �

Угол между плоскостями. Пусть в декартовой системе координат плоскости α и β (см. рис. 12) заданы уравнениями:

$\alpha: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$\beta: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

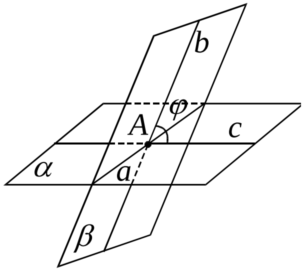


Рис. 12

Вектора нормалей плоскостей имеют координаты $\vec{n_\alpha} = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n_\beta} = \{A_2; B_2; C_2\}$. Тогда угол φ между плоскостями α и β (см. рис. 13) определяется формулой:

$$\cos\angle(\alpha, \beta) = \frac{|(\vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta})|}{|\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}|} = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (***)$$

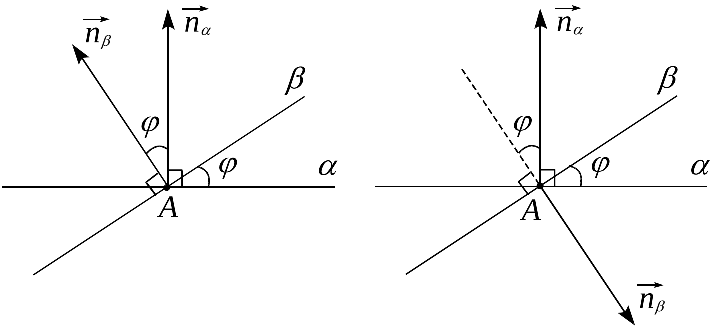


Рис. 13

Задача 7. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник с отношением сторон $AB : AD = 1 : 2$. Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом, равным $60°$. Точка $R -$ середина ребра MC. Найти угол между плоскостями MAC и ADR.

Решение. □ Введем систему координат так же, как в задаче 6 (см. рис. 14). $OM = \frac{a\sqrt{15}}{2}$. Выразим координаты точек: $A\left(-a; -\frac{a}{2}; 0\right)$,

$D\left(a;-\dfrac{a}{2};0\right)$, $R\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{15}}{4}\right)$ и векторов $\overrightarrow{AD}=\{2a;0;0\}$, $\overrightarrow{AR}=\left\{\dfrac{3a}{2};\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{15}}{4}\right\}$.

Вектор нормали плоскости MAC $\overrightarrow{n_1}=\left\{-\dfrac{1}{2};1;0\right\}$ и $|\overrightarrow{n_1}|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Найдем вектор нормали $\overrightarrow{n_2}$ плоскости ADR. Пусть $\overrightarrow{n_2}=\{p;q;r\}$. Из условий $\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{AR}$ получаем систему уравнений

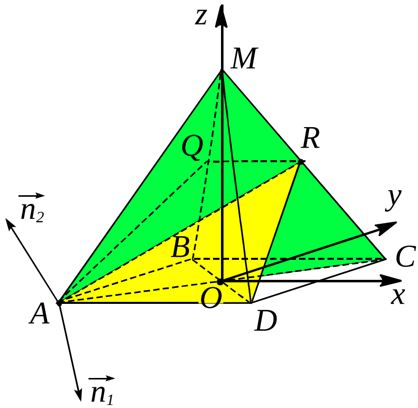


Рис. 14

$$\begin{cases}(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{AD})=0,\\(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{AR})=0\end{cases}\quad \text{или в координатах}\quad \begin{cases}p\cdot 2a+q\cdot 0+r\cdot 0=0,\\ p\cdot\dfrac{3a}{2}+q\cdot\dfrac{3a}{4}+r\cdot\dfrac{a\sqrt{15}}{4}=0.\end{cases}$$

Откуда $q=-\dfrac{\sqrt{15}}{3}\cdot r$, $p=0$. Пусть $r=1$, тогда $\overrightarrow{n_2}=\left\{0;-\dfrac{\sqrt{15}}{3};1\right\}$ и $|\overrightarrow{n_2}|=\dfrac{\sqrt{24}}{3}$.

В соответствии с формулой (***) косинус искомого угла φ равен:

$$\cos\varphi=\left|\cos\angle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})\right|=\frac{\left|-\dfrac{1}{2}\cdot 0-\dfrac{\sqrt{15}}{3}\cdot 1+0\cdot 1\right|}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{24}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Откуда $\varphi=\pi/4$. ◆

Уравнение сферы

В декартовой системе координат сфера радиуса R с центром в начале координат задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 .$$

Задача 8. Найти уравнение сферы, проходящей через точки $(0;0;0)$, $(a;0;0)$, $(0;b;0)$ и $(0;0;c)$.

Решение. □ Пусть точка $M_0(x_0; y_0; z_0) -$ центр сферы, а $R -$ радиус. Тогда уравнение сферы имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 .$$

Координаты данных точек должны удовлетворять этому уравнению, поэтому, подставляя их в него, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} {x_0}^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 = R^2, \\ (a - x_0)^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 = R^2, \\ {x_0}^2 + (b - y_0)^2 + {z_0}^2 = R^2, \\ {x_0}^2 + {y_0}^2 + (c - z_0)^2 = R^2. \end{cases}$$

Вычитая почленно первое уравнение из остальных, получим равенства: $(a - x_0)^2 - {x_0}^2 = 0,\quad (b - y_0)^2 - {y_0}^2 = 0$ и $(c - z_0)^2 - {z_0}^2 = 0$.

Отсюда следует: $x_0 = \dfrac{a}{2}$, $y_0 = \dfrac{b}{2}$ и $z_0 = \dfrac{c}{2}$.

Тогда $R^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$ и искомое уравнение имеет вид:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}. \ ◆$$

Задача 9. Докажите, что линия пересечения двух сфер есть окружность.

Доказательство. □ Введем декартову систему координат, приняв прямую, соединяющую центры сфер радиусов R_1 и R_2, за ось x. Пусть точка $O_1(a;0;0)-$ центр первой сферы, а точка $O_2(b;0;0)-$ центр второй сферы. Уравнениями сфер будут:

$$(x-a)^2+y^2+z^2=R_1^2, \qquad (1)$$

$$(x-b)^2+y^2+z^2=R_2^2. \qquad (2)$$

Точками пересечения сфер являются только те точки, координаты которых удовлетворяют одновременно уравнениям (1) и (2). Следовательно, они удовлетворяют и уравнению, которое получается почленным вычитанием одного из другого уравнений (1) и (2), т. е. уравнению

$$2(b-a)x=R_1^2-R_2^2-a^2+b^2. \qquad (3)$$

Уравнение (3) является уравнением плоскости, параллельной плоскости Oyz. Значит, точки пересечения данных сфер лежат в плоскости и пересечение сфер совпадает с пересечением их плоскостью. А пересечение сферы плоскостью – это окружность. �

Задача 10. Сфера $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ проходит через начало координат. Докажите, что уравнение касательной плоскости к сфере в начале координат имеет вид $ax+by+cz=0$.

Доказательство. □ Касательная плоскость к сфере проходит через начало координат и перпендикулярна вектору $\overrightarrow{OO_1}=\{a;b;c\}$, где точка $O_1(a;b;c)-$ центр сферы. Следовательно, уравнение касательной плоскости имеет вид $ax+by+cz=0$. �

Глава 7. Задачи по определению наибольших и наименьших значений

В решении стереометрических задачах на определение экстремальных значений искомых величин, также как и в планиметрических задачах, можно выделить два подхода – геометрический и аналитический (с использованием средств дифференциального исчисления). В практике вступительных экзаменов наиболее часто используется последний. Рассмотрим несколько примеров на его применение.

Задача 1. Из всех правильных треугольных призм, вписанных в полусферу радиуса R так, что плоскость основания призм совпадает с плоскостью, ограничивающей полусферу, выбрана призма наибольшего объема. Найти площадь полной поверхности этой призмы.

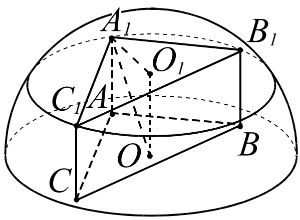


Рис. 1

Решение. □ Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма. Нижнее основание ABC лежит на плоскости, ограничивающей полусферу. Верхнее основание $A_1B_1C_1$ вписано в окружность, полученную пересечением полусферы плоскостью, проходящей через точки A_1, B_1, C_1, лежащие на полусфере. Пусть O – центр полусферы, O_1 – центр окружности, в которую вписано верхнее основание призмы. Тогда отрезок O_1A_1 – радиус этой окружности, OO_1 – высота призмы, OA_1 – радиус полусферы.

Положим $O_1A_1 = x$. Из треугольника OO_1A_1 находим $OO_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$. Длина стороны правильного треугольника $A_1B_1C_1$, выраженная через радиус описанной окружности, равна $x\sqrt{3}$, а его площадь равна $\dfrac{3\sqrt{3}\,x^2}{4}$. Тогда объем призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен $V(x) = \dfrac{3\sqrt{3}\,x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}}{4}$ или $V(x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{R^2x^4 - x^6}$. В силу условия задачи $x \in (0, R)$. Найдем наибольшее значение функции $V(x)$

на отрезке $[0,R]$. Функция $V(x)$ принимает наибольшее значение при наибольшем значении функции $f(x)=R^2x^4-x^6$. Найдем критические точки функции $f(x)=R^2x^4-x^6$:

$$f'(x)=\left(R^2x^4-x^6\right)'=4R^2x^3-6x^5.$$

$f'(x)=0$ при $x=0$ и $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}R$. Точка $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}R$ не принадлежит отрезку $[0,R]$. Так как производная функции $f(x)$ при переходе через $x=\sqrt{\frac{2}{3}}R$ меняет знак с «плюса» на «минус», то наибольшее значение функции, а значит и объема призмы, будет при $x=\sqrt{\frac{2}{3}}R$. Следовательно, сторона основания призмы с наибольшим объемом равна $R\sqrt{2}$, а высота – $\frac{R}{\sqrt{3}}$. В этом случае

$$S_{пов.}=2S_{\vartriangle ABC}+3S_{BB_1A_1A}=$$

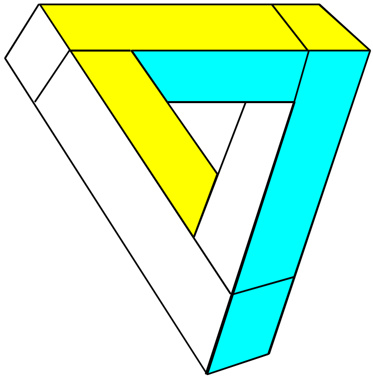
$$=2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2+3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{R}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}(1+\sqrt{2})R^2. ◆$$

Задача 2. Найти наибольший объем конуса, образующая которого имеет данную длину l.

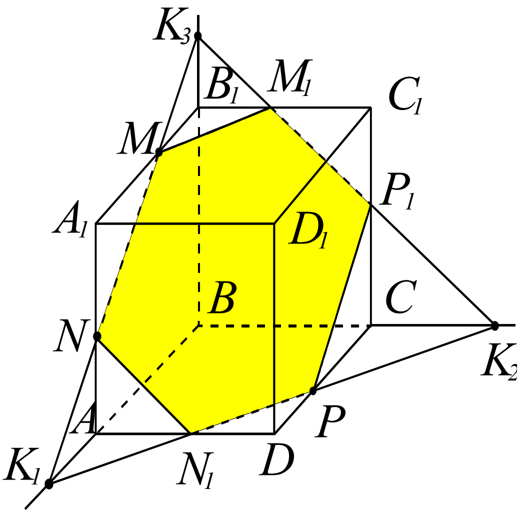
Решение. □ Объем конуса выражается через радиус основания R и высоту H формулой $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Радиус основания, образующая и высота конуса связаны соотношением $R^2=l^2-H^2$. Тогда $V(H)=\frac{1}{3}\pi(l^2-H^2)H$.

Функция $V(H)$ определена (по смыслу задачи) при $H \in [0; l]$. $V'(H) = \frac{1}{3}\pi l^2 - \pi H^2$. Критические точки функции определяются из уравнения $V'(H) = 0$ или $\frac{1}{3}\pi l^2 - \pi H^2 = 0$. Корень этого уравнения, принадлежащий отрезку $[0;\ l]$, есть $H = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Сравнивая значения $V(0) = V(l) = 0$, $V\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$, получаем, что наибольшее значение объема равно $\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$. �



Задачи для самостоятельного решения



§1. Прямые и плоскости в пространстве

Принадлежность прямой плоскости

1.1. Докажите, что через любую прямую в пространстве можно провести: а) плоскость; б) провести бесчисленное множество плоскостей.

1.2. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что не имеют общих точек прямые: а) AB и CD; б) AC и BD.

в) Могут ли какие-нибудь три из четырех точек, не лежащих в одной плоскости, принадлежать одной прямой?

1.3. Докажите, что в одной плоскости лежат все прямые, которые

а) проходят через данную точку и пересекают данную прямую;

б) пересекают две данные параллельные прямые;

в) параллельны прямой b и пересекают прямую a, где a и $b-$ пересекающиеся прямые;

г) параллельны данной плоскости и проходят через данную точку;

д) перпендикулярны данной прямой и проведены к ней через данную ее точку.

1.4. а) Докажите, что три отрезка, соединяющие середины несмежных сторон пространственного четырехугольника и середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

б) Пусть точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, точки K и M – середины отрезков AB и BC соответственно. Докажите, что не пересекаются прямые: 1) AC и DK; 2) BD и KM; 3) AD и KM.

1.5. а) Точки $E, M, F, P-$ середины соответственно ребер AD, AB, DC и CB пирамиды $ABCD$. Докажите, что отрезки EP и MF пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

б) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $E, F, P, M-$ середины отрезков A_1D_1, D_1C, CD и A_1D соответственно. Докажите, что отрезки EP и MF пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

1.6. Докажите, что если в пространстве:

а) три прямые таковы, что любые две из них пересекаются, то или все они проходят через общую точку, или – лежат в одной плоскости;

б) n прямых таковы, что каждые две из них пересекаются, то или все они проходят через одну точку, или все лежат в одной плоскости.

1.7. а) Даны плоскость α и лежащая в ней прямая a. Постройте точку A, принадлежащую α, но не принадлежащую a.

б) Даны две пересекающиеся плоскости. Постройте точку, не принадлежащую ни на одной из них.

1.8. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой a, и прямая b, которая лежит в одной из этих плоскостей и пересекает другую. Докажите, что прямые a и b пересекаются.

1.9. Докажите, что какова бы ни была

а) плоскость, существует пересекающая ее (в одной точке) прямая;

б) плоскость, существует пересекающая ее другая плоскость;

в) прямая (в пространстве), существует пересекающая ее (в одной точке) плоскость.

г) прямая, существует не лежащая с ней в одной плоскости другая прямая.

1.10. Некоторая фигура в пространстве обладает тем свойством, что любые четыре ее точки лежат в одной плоскости. Докажите, что эта фигура целиком лежит в плоскости.

1.11. Докажите, что любая плоскость разбивает пространство на две области, причем отрезок, соединяющий две точки одной области, не пересекает данную плоскость; разных областей – пересекает.

1.12. Определите число частей, на которые разбивают пространство плоскости граней: а) куба; б) тетраэдра.

Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей

1.13. а) Докажите, что две различные прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу;

б) Докажите, что линия пересечения двух различных пересекающихся плоскостей, содержащих параллельные прямые, параллельна этим прямым.

1.14. В пространстве даны два треугольника с соответственно параллельными сторонами. Что можно сказать о прямых, соединяющих соответственные вершины этих треугольников?

1.15. Докажите признак параллельности:

а) прямой и плоскости; б) двух плоскостей.

1.16. Даны две непересекающиеся плоскости. Докажите, что прямая, пересекающая одну из этих плоскостей, пересекает и другую.

1.17. Докажите, что

а) проекцией прямой на плоскость является прямая или точка;

б) проекции двух параллельных прямых на одну и ту же плоскость (не перпендикулярную им) также параллельны (или совпадают).

1.18. Докажите следующие свойства параллельных плоскостей:

а) две плоскости, параллельные третьей, параллельны друг другу или совпадают;

б) если две параллельные плоскости пересечь третьей плоскостью, то линии пересечения будут параллельны;

в) через любую точку вне плоскости можно провести единственную плоскость, параллельную данной плоскости;

г) отрезки, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

1.19. а) Точки A, B, C, D являются вершинами параллелограмма, ни одна из сторон которого не пересекает плоскость α. Точки A, B, C удалены от плоскости α на расстояние 4, 5 и 8 *см* соответственно. Найдите расстояние от вершины D до плоскости α.

б) Вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ отстоят от плоскости на расстояния, равные соответственно a, b и c. Найдите расстояние от вершины D до этой плоскости.

1.20. Докажите, что расстояние от центра треугольника до некоторой плоскости равно среднему арифметическому расстояний от его вершин до этой плоскости.

Скрещивающиеся прямые

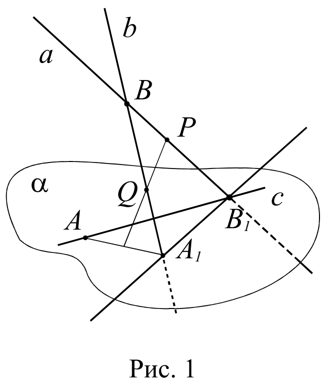


Рис. 1

1.21. Докажите, что

а) любые две скрещивающиеся прямые можно заключить в параллельные плоскости;

б) для любой прямой существует скрещивающаяся с ней прямая.

1.22. На рисунке 1 $B = a \cap b$, $P \in a$, $Q \in b$, прямая AB_1 лежит в плоскости α, точки $P, Q \notin \alpha$. Каково взаимное положение прямых PQ и AA_1, где $A_1 = b \cap \alpha$? Ответ обоснуйте.

1.23. а) Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Постройте плоскость, не пересекающую каждую из них.

б) Даны две скрещивающиеся прямые a, b и точка M вне этих прямых. Постройте прямую, скрещивающуюся с прямыми a и b, и проходящую через точку M.

1.24. а) Даны две скрещивающиеся прямые и некоторая точка M. Всегда ли существует прямая, проходящая через точку M и пересекающая эти прямые?

б) Даны две скрещивающиеся прямые. Что представляет собой геометрическое место середин отрезков с концами на этих прямых?

Перпендикулярность прямой и плоскости, плоскостей

1.25. Докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.

1.26. Докажите, что любые два перпендикуляра к данной плоскости параллельны друг другу (или совпадают).

1.27. Докажите, что

а) из всякой точки вне плоскости можно опустить на эту плоскость перпендикуляр, причем этот перпендикуляр определяется единственным образом. Опишите способ построения этого перпендикуляра.

б) из любой точки плоскости можно восставить к этой плоскости перпендикуляр и этот перпендикуляр единственный. Опишите способ построения этого перпендикуляра.

в) для любых двух скрещивающихся прямых a и b найдутся точки $A \in a, B \in b$ такие, что отрезок AB перпендикулярен прямым a и b, причем точки A и B определяются единственным образом.

г) длина отрезка AB (см. пункт в) равна расстоянию между параллельными плоскостями, содержащими прямые a и b.

1.28. Докажите, что любые две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны друг другу (или совпадают).

1.29. Докажите теорему о трех перпендикулярах и обратную к ней.

1.30. Докажите признак перпендикулярности двух плоскостей.

1.31. а) Докажите, что если плоскости α и β перпендикулярны плоскости γ, то линия пересечения α и β также перпендикулярна γ.

б) Точки M, N, P, Q расположены в пространстве так, $MN \perp PQ$, $MP \perp NP$. Докажите, что $MQ \perp NP$.

в) Плоскости α и β перпендикулярны, точка $M \in \alpha$, прямая $MN \perp \beta$. Докажите, что $MN \subset \alpha$.

1.32. Докажите, что

а) параллельные прямые составляют с одной и той же плоскостью равные углы;

б) угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям;

в) если прямая образует равные углы с тремя попарно непараллельными прямыми, лежащими в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

1.33. Докажите, что диагональ куба перпендикулярна любой скрещивающейся с ней диагонали боковой грани.

1.34. Докажите, что диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярна каждой из плоскостей BA_1D и B_1D_1C.

1.35. Докажите, что плоскости, проходящие через вершину правильной четырехугольной пирамиды и диагонали ее основания взаимно перпендикулярны.

1.36. Докажите, что любое боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды перпендикулярно не пересекающейся с ним диагонали основания.

1.37. Докажите, что точка, одинаково удаленная от вершин:

а) прямоугольника, не являющегося квадратом, неодинаково удалена от его сторон;

б) правильного многоугольника, одинаково удалена и от его сторон.

1.38. Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную:

а) данной плоскости и параллельную данной прямой.

б) каждой из двух данных плоскостей.

1.39. Через одну из сторон ромба на расстоянии 8 *см* от противолежащей стороны проведена плоскость. Ортогональные проекции сторон ромба на эту плоскость равны 10 *см* и 6 *см.* Найдите проекции диагоналей ромба на эту плоскость при условии, что отношение их проекций равно 4.

1.40. Докажите, что сумма квадратов длин ортогональных проекций ребер единичного куба на плоскость не зависит от их взаимного расположения и равна 8.

§2. Углы между прямыми в пространстве, прямой и плоскостью, между плоскостями

Угол между прямыми в пространстве

2.1. а) Найдите величину угла, образованного двумя диагоналями смежных граней куба, выходящими из одной вершины.

б) Найдите величины углов между диагональю куба и его ребрами.

в) Найдите угол между диагональю куба и пересекающейся с ней диагональю боковой грани.

2.2. а) Найдите угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю боковой грани.

б) На ребре AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка M – середина этого ребра. Найдите угол между прямыми A_1C и BM .

2.3. а) Отрезки двух прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, относятся как 2:3, а углы, которые они составляют с плоскостями – как $2:1$. Найдите эти углы.

б) Отношение длин двух отрезков, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равно k ($k>1$), а величины углов, которые каждый из них составляет с одной из плоскостей, относятся как 3:2. Найдите величины этих углов и допустимые значения k .

2.4. Прямая образует с тремя попарно перпендикулярными прямыми углы α, β и γ . Докажите, что

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

2.5. В пространстве даны точки A, B, C , D , причем $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$. Найдите угол между скрещивающимися прямыми AB и CD .

2.6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AN и DM , где точки M и N лежат на ребрах CC_1 и DD_1 соответственно так, что:

а) точка M – середина ребра CC_1 , а $DN:ND_1=1:2$;

б) $CM:MC_1=DN:ND_1=1:2$.

Угол между прямой и плоскостью

2.7. а) Определите величину угла, образуемого с плоскостью α гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника, один катет которого лежит на плоскости α, а другой катет образует с α угол 45°.

б) Через гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом φ к плоскости треугольника. Вычислите угол между этой плоскостью и катетами треугольника.

2.8. а) Плоскость проходит через сторону квадрата и составляет угол α с плоскостью квадрата. Определите, какой угол эта плоскость составляет с диагональю квадрата.

б) Два одинаковых квадрата имеют общую сторону, плоскости квадратов составляют угол α. Найдите угол между их диагоналями, имеющими общую вершину.

2.9. а) Через гипотенузу прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом α к его плоскости, составляющая с одним из катетов угол β. Вычислите угол между этой плоскостью и другим катетом.

б) Угол между плоскостью квадрата $ABCD$ и некоторой плоскостью γ равен α, а угол между стороной AB и той же плоскостью равен β. Найдите угол между стороной AD и плоскостью γ.

2.10. В прямоугольнике длины сторон равны 1 и 2. Меньшая из его сторон лежит в плоскости α, а его диагональ образует с плоскостью α угол, величина которого равна φ. Найдите величину угла между плоскостью прямоугольника и плоскостью α.

2.11. Через диагональ ромба проведена плоскость, отличная от плоскости ромба. Докажите, что угол между этой плоскостью и прямой, на которой лежит сторона ромба, не зависит от выбора стороны.

2.12. Углы между диагональю прямоугольного параллелепипеда и его гранями, пересекающимися в одной вершине, равны α, β и γ. Докажите, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$.

2.13. а) Прямая l лежит в одной из граней двугранного угла величиной α и составляет угол β с его ребром. Какой угол составляет прямая l с другой гранью?

б) Прямая l образует углы α и β с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями. Найдите величину угла между прямой l и линией пересечения этих плоскостей.

2.14. Прямоугольный треугольник повернут вокруг биссектрисы прямого угла на угол 45°. На какой угол повернулись его катеты?

2.15. а) Три луча с общей вершиной составляют попарно углы величиной α. Найдите угол между одним из лучей и плоскостью, проходящей через два других луча.

б) На плоскости γ дан угол BAC величиной α. Луч AS составляет с лучами AB и AC равные углы величиной β. Найдите угол между лучом AS и плоскостью γ.

Угол между плоскостями

2.16. Катеты прямоугольного треугольника принадлежат граням двугранного угла и образуют с его ребром острые углы α и β. Найдите косинус двугранного угла.

2.17. а) Все ребра пирамиды $SABC$ равны между собой. Точки K и $L-$ середины ребер AB и BC. Найдите угол между плоскостями ABS и KSL.

б) Все ребра пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны между собой. Найдите угол между плоскостями SBM и SCD, где точка $M-$ середина ребра CD.

в) В правильной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро в 2 раза больше стороны основания. Найдите угол между плоскостями SAF и SFD.

2.18. а) В правильной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все боковые грани – квадраты. Найти угол между плоскостями AA_1F_1 и A_1B_1C.

б) Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Найдите угол между плоскостями AB_1C и BB_1C_1.

2.19. а) В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб с острым углом α при вершине A. Грани SAB и SAD перпендикулярны плоскости основания, а угол SCA равен β. Найдите величину угла наклона грани SBC к плоскости основания.

б) В основании пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC. Грани SAB и SAC перпендикулярны плоскости основания, а угол SCA равен β. Найдите величину угла наклона грани SBC к плоскости основания.

§3. Расстояние между объектами в пространстве

Расстояние между точками, от точки до прямой или плоскости

3.1. Отрезок длины a имеет концы на двух взаимно перпендикулярных плоскостях и составляет с одной из них угол в 45°, а с другой – угол в 30°. Определите длину части линии пересечения плоскостей, заключенную между перпендикулярами, опущенными на нее из концов данного отрезка.

3.2. а) Дан равнобедренный треугольник с основанием 6 и боковой стороной 5. Из центра вписанного круга восстановлен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 2. Найдите расстояние от конца этого перпендикуляра до сторон треугольника.

б) Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. В основании лежит треугольник со сторонами 7, 9, 12. Найдите расстояние от вершины пирамиды до плоскости основания.

3.3. а) В равнобедренном треугольнике основание равно 2, высота опущенная к основанию – 3. точка, равноудаленная от всех вершин треугольника, удалена от плоскости на $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$. Найдите расстояние от этой точки до вершин треугольника.

б) Отрезки, соединяющие вершины треугольника со сторонами 7, 8, 9 с точкой, не лежащей в плоскости треугольника, составляют с плоскостью треугольника угол $60°$. Найдите расстояние от точки до плоскости треугольника.

3.4. а) Точка M, лежащая вне плоскости данного прямого углы, удалена от вершины угла на расстояние a, а от его сторон на расстояние b. Найдите расстояние от точки M до плоскости угла.

б) Дан угол BAC, равный $60°$. Точка S удалена от вершины A на 25, а от сторон AB и AC на 7 и на 20 соответственно. Найдите расстояние от точки S до плоскости угла.

3.5. Дан двугранный угол величиной α. В гранях проведены два перпендикуляра к ребру длины a и b соответственно. Расстояние между основаниями перпендикуляров равно c. Найдите расстояние между другими концами перпендикуляров.

3.6. Круг радиуса R и равносторонний треугольник со стороной $R\sqrt{3}$ лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Одна из сторон треугольника лежит в плоскости круга. Отрезок, соединяющий центры круга и треугольника, образует с их плоскостями углы, равные $30°$. Найдите длину части стороны треугольника, лежащей внутри круга.

3.7. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами длины 2. Найдите периметр четырехугольника, зная, что длина одной из его сторон равна $\sqrt{5}$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

3.8. а) В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите расстояние между прямыми BC и AM, где точка $M -$ середина ребра B_1C_1, $AB = 4\sqrt{3}$ и $AA_1 = 8$.

б) В правильной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ найдите расстояние между прямыми AC и BE_1, если $AB = 2$, а $AA_1 = 3$.

3.9. а) В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S стороны основания равны 2, а боковые ребра 5. Найдите расстояние между прямыми AC и BM, где $M -$ середина ребра SD.

б) Через центр основания правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S параллельно ребру BC проведена прямая a. Найдите расстояние между прямыми AS и a, если $AS = 6$, $AB = 3$.

в) На ребре прямого двугранного угла, образованного плоскостями α и β, взяты точки M и N ($MN = a$). В плоскостях α и β к ребру двугранного угла проведены перпендикуляры MP и NQ длиной a. Найдите расстояние между ребром двугранного угла и прямой PQ.

3.10. Угол между плоскостями квадратов ABC_1D_1 и ABC_2D_2 с общей стороной AB длиной a равен α. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AC_2 и BD_1.

3.11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно a, найдите расстояние между прямыми AC и B_1M, где $M \in DD_1$ и $DM = k \cdot D_1M$.

3.12. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, сторона основания которой равна a, а высота h, найдите расстояние между прямыми AC и B_1M, где $M \in DD_1$ и $DM = k \cdot D_1M$.

3.13. В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна a, а боковое ребро l, найдите расстояние между:

а) боковым ребром и не пересекающейся с ним стороной основания;

б) апофемой и не пересекающейся с ним стороной основания.

3.14. а) Основанием пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной a. Ребро SA равно b и перпендикулярно плоскости основания. Найдите расстояние между прямыми AC и SB.

б) Сторона основания и боковое ребро правильной треугольной пирамиды равны соответственно a и b. Найдите расстояние между скрещивающимися ребрами пирамиды.

3.15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания которой равна a, а боковое ребро l, найдите расстояние между:

а) боковым ребром и не пересекающейся с ним диагональю основания;

б) апофемой и не пересекающейся с ней стороной основания;

в) боковым ребром и не пересекающейся с ним стороной основания.

3.16. а) В правильной четырехугольной пирамиде, сторона основания которой равна a, а боковое ребро l, найдите расстояние между апофемой и диагональю основания.

б) В правильной пирамиде $SABCD$ (S вершина) $AB = a$, $SA = b$, M и N – середины ребер SC и SD. Найдите расстояние между прямыми SA и MN.

3.17. В основании четырехугольной пирамиды, боковые ребра которой равны, лежит прямоугольник со сторонами a и b. Высота пирамиды равна h. Найдите расстояние между боковым ребром и не пересекающейся с ним диагональю основания.

3.18. В правильном тетраэдре, ребра которого равны a, найдите расстояние между непересекающимися высотами любых двух граней.

3.19. В правильной шестиугольной пирамиде, сторона основания которой равна a, а боковое ребро l, найдите расстояние между:

а) боковым ребром и не пересекающейся с ним стороной основания;

б) боковым ребром и не пересекающейся с ним диагональю основания.

3.20. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1 = b$, $AD = c$. Найдите расстояние между прямыми A_1B_1 и AM, где M – центр грани CC_1D_1D.

3.21. В правильной треугольной призме высотой h со стороной основания a найдите расстояние между диагональю боковой грани и не пересекающейся с ней стороной основания.

3.22. Все боковые грани призмы $ABCA_1B_1C_1$ являются квадратами со стороной a. Точки M, N, P, Q – середины отрезков AB, AC, BC, A_1C соответственно. Найдите расстояние между прямыми MN и A_1C_1.

3.23. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, высотой h и стороной основания a, найдите расстояние между прямыми:

а) AA_1 и D_1E; б) AF и BE_1;

в) BE_1 и DF; г) A_1F_1 и C_1E.

3.24. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Докажите, что расстояние от точки M на прямой a до прямой b увеличивается при увеличении расстояния от точки M до точки пересечения прямой a и общего перпендикуляра данных прямых.

3.25. а) На прямой l в пространстве последовательно расположены точки A, B и C такие, что $AB = 10$, $BC = 22$. Найдите расстояние между прямыми l и m, если расстояния от точек A, B и C до прямой m равны 12, 13 и 20 соответственно.

б) На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A, B и C такие, что $AB = 27$, $BC = 18$. Найдите расстояние между прямыми p и q, если расстояния от точек A, B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

§4. Построения в пространстве

Построение точки пересечения прямой и плоскости

4.1. Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью грани CC_1D_1D, где M и N – точки соответственно на ребрах AA_1, BB_1:

а) призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$; б) призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

4.2. На ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка M. Постройте точку пересечения прямой A_1M с плоскостью:

а) AB_1C_1; б) AB_1C.

4.3. На ребре SA пирамиды $SABCDE$ с вершиной S взята точка M. Постройте точку пересечения: а) прямой MD с плоскостью SBE; б) прямой SC с плоскостью MED.

4.4. На ребре CD призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ взята точка M. Постройте точку пересечения прямой A_1M с плоскостью:

а) AB_1C_1; б) AB_1C.

Построение прямой пересечения плоскостей

4.5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте линию пересечения плоскостей: а) AA_1C_1 и B_1D_1C; б) AA_1C_1 и B_1D_1D; в) AA_1C_1 и ADC_1.

4.6. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

а) на ребре CC_1 взята точка M. Постройте линию пересечения плоскостей A_1MD и AB_1C_1.

б) на ребрах CC_1 и AB взяты соответственно точки M и N. Постройте линию пересечения плоскостей A_1MD и CNB_1.

в) на гранях AA_1BB_1 и $ABCD$ взяты соответственно точки M и N. Постройте линию пересечения плоскостей DMC_1 и D_1NB_1.

4.7. В пирамиде $SABCD$ с вершиной S взяты точки M и N:

а) на ребрах SA, SC соответственно. Постройте линию пересечения плоскостей MCD и NAB.

б) на гранях SAB, SBC соответственно. Постройте линию пересечения плоскостей MCD и NAB.

Построения на изображениях

4.8. Нарисуйте параллельную проекцию равностороннего треугольника, а в нем изобразите проекцию средней линии, радиуса описанной окружности и радиуса вписанной окружности исходного треугольника.

4.9. Нарисуйте параллельную проекцию прямоугольника, а в нем изобразите проекции осей симметрии исходного прямоугольника.

4.10. Нарисуйте параллельную проекцию равнобедренной трапеции, у которой одно основание в два раза больше другого, а в ней изобразите проекцию оси симметрии исходной трапеции.

4.11. Нарисуйте параллельную проекцию квадрата, а в нем изобразите проекции радиуса описанной и радиуса вписанной окружности исходного квадрата.

4.12. Нарисуйте параллельную проекцию квадрата, вписанного в правильный треугольник.

4.13. Дан эллипс, являющийся параллельной проекцией некоторой окружности. Нарисуйте проекции:

а) центра окружности;

б) касательной к ней в некоторой ее точке (проекция точки дана на эллипсе);

в) вписанного в нее равностороннего треугольника (указана проекция одной из вершин);

г) описанного около нее равностороннего треугольника (указана точка вне эллипса, являющаяся проекцией одной из вершин);

д) вписанного в нее квадрата (указана проекция одной из вершин);

е) описанного около нее квадрата (указана точка вне эллипса, являющаяся проекцией одной из вершин).

4.14. На данном изображении круга постройте изображение:

а) сектора с углом $15°$; б) сегмента с дугой $150°$.

4.15. На данном изображении окружности постройте изображение ромба с углом $60°$, описанного около этой окружности.

4.16. Постройте общий перпендикуляр:

а) диагонали куба и не пересекающей ее диагонали грани этого куба;

б) непересекающихся диагоналей граней куба.

4.17. Какую фигуру образует множество оснований перпендикуляров, проведенных из точки A, не принадлежащей плоскости α, ко всем прямым, лежащим в плоскости α и проходящим через данную точку M?

Построение плоских сечений многогранников

4.18. Какие правильные многоугольники могут получаться при пересечении куба плоскостью?

4.19. При каком условии в сечении тетраэдра плоскостью получится: а) параллелограмм; б) ромб?

4.20. Дана пирамида $SABCD$ (S – вершина). На ребрах SA, SB, SC соответственно взяты точки M, N, P. Постройте сечение пирамиды плоскостью MNP. Рассмотрите три случая:

1) MN не параллельна AB, NP не параллельна BC;

2) $MN \parallel AB$, NP не параллельна BC;

3) $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$.

4.21. Дана пирамида $SABCD$ (S – вершина). Постройте сечение пирамиды плоскостью MNP, если:

а) $M \in SA$, $N \in SB$, $P \in CD$; б) $M \in SA$, $N \in SC$, $P \in BD$;

в) $M \in AB$, $N \in AD$, $P \in SC$.

4.22. Дана призма $ABCA_1B_1C_1$. Постройте сечение призмы плоскостью MNP, если:

а) $M \in A_1B_1$, $N \in AC$, $P \in CC_1$;

б) $M \in A_1C_1$, $N \in B_1C_1$, $M \in AB$.

4.23. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNP, если:

а) $M \in AA_1$, $N \in A_1B_1$, $P \in CD$; б) $M \in AA_1$, $N \in CC_1$, $P \in BD$;

в) $M \in AA_1$, $N \in B_1C_1$, $P \in CD$; г) $M \in A_1B_1$, $N \in CC_1$, $P \in AD$;

д) $M \in AB_1$, $N \in DD_1$, $P \in CC_1$.

4.24. Постройте сечение пирамиды $SABCDEF$ (S – вершина):

а) плоскостью, проходящей через точки $M \in SA$, $N \in ED$, $P \in SC$.

б) плоскостью, проходящей через точки $M \in SA$, $N \in SD$, $P \in EF$.

4.25. Постройте сечение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки $M \in AA_1$, $N \in CC_1$, $P \in A_1D_1$.

4.26. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNP, если:

а) $M \in AB_1$, $N \in DD_1$, $P \in CC_1$;

б) $M \in AA_1$, N и P центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и CC_1D_1D;

в) $M \in AA_1$, $N \in CC_1$, $P \in BD$;

г) $M \in A_1B_1$, $N \in CC_1$, $P \in AD$.

4.27. Постройте сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью MNP, если точки M, N, P лежат на гранях ABC, ACD, BCD.

4.28. Дана пирамида $SABCD$ с вершиной S. Постройте сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки M, N и параллельной прямой m, если: а) $M \in SA$, $N \in SC$, $m = BD$;

б) $M \in SA$, $N \in SD$, $m = SC$; в) $M \in AB$, $N \in AD$, $m = SC$.

4.29. На ребрах SA, SB пирамиды $SABCDE$ с вершиной S взяты точки M и N. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M, N и параллельной прямой SD.

4.30. На ребрах B_1C_1, AC призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты точки M и N. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки M, N и параллельной прямой AB_1.

4.31. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки $M \in A_1B_1$, $N \in CC_1$ параллельно диагонали B_1D.

4.32. На ребре SA пирамиды $SABCD$ с вершиной S взята точка M. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и параллельной прямым BD и SC.

4.33. Дана пирамида $SABCDE$ с вершиной S и точка M на ребре SD. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно грани ASB.

4.34. На ребре A_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка M, а на грани CC_1D_1D точка N. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершину B параллельно плоскости AMN.

4.35. На ребре AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка M. Постройте основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость AB_1C.

4.36. а) Дана правильная пирамида $SABCD$ с вершиной S и точки M, N на ребрах AB, AD. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M и N перпендикулярно плоскости основания.

б) Дана правильная пирамида $SABC$ с вершиной S и точки M, N на ребрах SA, BC. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M и N перпендикулярно грани SBC, если известно, что боковые ребра пирамиды равны ребрам основания.

Задачи на построения в пространстве

4.37. а) Постройте прямую, проходящую через точку M и пересекающую каждую из двух данных скрещивающихся прямых a и b.

б) Постройте прямую, пересекающую каждую из трех данных попарно скрещивающихся прямых a, b и c.

4.38. Постройте: а) четыре попарно скрещивающиеся прямые;

б) n попарно скрещивающихся прямых.

4.39. Постройте плоскость, пересекающую каждую из четырех данных попарно скрещивающихся прямых a, b, c и d.

4.40. а) Постройте плоскость, пересекающую данный тетраэдр таким образом, что в сечении получается параллелограмм.

б) Даны четыре попарно скрещивающиеся прямые. Постройте плоскость так, чтобы точки ее пересечения с прямыми были вершинами параллелограмма.

4.41. В пространстве даны две пересекающиеся прямые a, b и две не принадлежащие им точки A и B. Проведите через точки A и B плоскость, пересекающую прямые a и b в точках C и D так, чтобы точки A, B, C и D принадлежали одной окружности.

4.42. Даны две перпендикулярные скрещивающиеся прямые. Постройте правильный тетраэдр так, чтобы две его вершины принадлежали одной прямой, а две другие – второй прямой.

4.43. Даны три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Постройте параллелепипед, три ребра которого лежали бы на данных прямых.

§5. Геометрические места в пространстве

5.1. Что собой представляет геометрическое место точек равноудаленных от: а) двух данных точек; б) от трех данных точек; в) двух параллельных прямых; г) двух пересекающихся прямых; д) двух пересекающихся плоскостей?

5.2. Что собой представляет геометрическое место точек пространства, равноотстоящих от всех: а) сторон треугольника; б) вершин равнобедренной трапеции.

5.3. Даны две параллельные плоскости. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на этих плоскостях.

5.4. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от трех пересекающихся плоскостей α, β, γ. Исследуйте решение.

5.5. а) Найдите геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат на двух данных скрещивающихся прямых a и b, а также точек, делящих эти отрезки в данном отношении $m:n$.

б) Найдите геометрическое место середин отрезков данной длины *a,* концы которых лежат на двух перпендикулярных скрещивающихся прямых.

5.6. Найдите геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных параллельных плоскостей α и β, расстояние между которыми равно d, равна $a-$ длине данного отрезка. Исследуйте решение.

5.7. Внутри двугранного угла найдите геометрическое место точек:

а) разность расстояний от которых до граней равна a;

б) сумма расстояний от которых до граней постоянна и равна d.

5.8. а) Доказать, что геометрическое место точек пространства, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек, взятых в определенном порядке, постоянна, есть плоскость.

б) Найдите геометрическое место точек плоскости, для которых сумма квадратов расстояний до двух данных точек, удаленных от плоскости на расстояния m и n, постоянна и равна k? Исследуйте решение.

5.9. Даны плоскость α и точки A и B вне α. Найдите на плоскости α геометрическое место точек X, таких, что прямые AX и BX одинаково наклонены к плоскости α.

5.10. Найдите геометрическое место прямых, проходящих через точку A и одинаково наклоненных к граням двугранного угла.

5.11. Найдите геометрическое место прямых, проходящих через данную точку A и удаленных на расстояние d от данной прямой a.

5.12. Найдите геометрическое место прямых, проходящих через точку O и составляющих равные углы с скрещивающимися прямыми a и b.

5.13. Найдите геометрическое место точек:

а) пространства, из которых данный отрезок виден под прямым углом;

б) данной плоскости α, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

5.14. Дана сфера. Найдите геометрическое место центров сфер, вписанных в тетраэдры, вписанные в эту сферу.

5.15. В пространстве дана точка A. Найдите геометрическое место проекций A на всевозможные плоскости, проходящие через прямую l, не содержащую точку A.

5.16. В пространстве дана точка O и две прямые. Найдите геометрическое место точек M, для которых сумма длин проекций отрезка OM на данные прямые есть величина постоянная.

5.17. Найдите геометрическое место середин общих касательных к двум заданным сферам.

5.18. Прямые l_1 и l_2 касаются сферы. Пусть точки M и N – точки на l_1 и l_2 соответственно, такие, что отрезок MN тоже касается сферы. Найдите геометрическое место точек касания всевозможных отрезков MN со сферой.

5.19. В пространстве дан треугольник ABC. На прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через точку A берется произвольная точка D. Найдите геометрическое место точек пересечения высот треугольника DBC.

5.20. В пространстве дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M пространства таких, что $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

5.21. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от трех попарно пересекающихся плоскостей, не проходящих через одну прямую и перпендикулярных некоторой данной плоскости α.

5.22. Даны две скрещивающиеся прямые и точка A на одной из них. Через прямые проведены перпендикулярные плоскости. Найдите геометрическое место проекций точки A на прямые пересечения этих плоскостей.

5.23. Дана прямая l и точка A, ей не принадлежащая. Через точку A проведена прямая l_1, скрещивающаяся с l. Пусть точки $M \in l_1$ и $N \in l$ таковы, что общий перпендикуляр к прямым l_1 и l. Найдите геометрическое место всевозможных точек M.

5.24. На плоскости α дан остроугольный треугольник ABC. Найдите геометрическое место проекций на плоскость α таких точек M, что все треугольники ABM, AMC и $MBC-$ остроугольные.

5.25. Найдите геометрическое место центров сфер, касающихся двух данных пересекающихся прямых.

5.26. Дан трехгранный угол, все плоские углы которого прямые. Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса R, касающихся всех граней этого угла.

5.27. Дан плоский выпуклый четырехугольник $ABCD$, не являющийся трапецией. Найдите геометрическое место таких точек M, что боковую поверхность пирамиды $MABCD$ можно пересечь плоскостью и в сечении получится прямоугольник.

5.28. Дан плоский выпуклый четырехугольник $ABCD$, не являющийся трапецией. Пусть P и $Q-$ точки пересечения продолжений противоположных сторон. Известно, что ни одна из диагоналей $ABCD$ не параллельна PQ. Найдите геометрическое место таких точек M, что боковую поверхность пирамиды $MABCD$ можно пересечь плоскостью и в сечении получится ромб.

5.29. Дан прямой круговой конус. Сфера с центром в точке O лежит внутри конуса, касаясь его основания и боковой поверхности. Найдите геометрическое место таких точек O.

5.30. Для данной сферы найдите геометрическое место центров сфер:

а) вписанных в конусы, вписанные в данную сферу;

б) описанных около конусов, описанных около данной сферы.

5.31. Дан трехгранный угол с прямыми плоскими углами и вершиной O. Точки A, B и C лежат на различных ребрах этого угла, причем ни одна из них не совпадает с точкой O. Найдите геометрическое место точек:

а) пересечения высот всевозможных треугольников ABC;

б) пересечения биссектрис всевозможных треугольников ABC.

§6. Призма

Куб и прямоугольный параллелепипед

6.1. а) Вычислите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если известно, что площади его граней равны 6, 12, 18.

б) Вычислите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если известно, что площади кругов, описанных вокруг его граней, равны 22π, 35π, 41π.

в) Найдите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, если известно, что периметры его граней равны 10, 12, 14.

6.2. а) Найдите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если известно, что длины диагоналей трех его граней равны 5, $\sqrt{39}$, $\sqrt{34}$.

б) Докажите, что квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен $\frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$, где d_1, d_2, d_3 – длины диагоналей граней, имеющих общую вершину.

6.3. Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения куба, являющегося правильным шестиугольником.

6.4. Найдите угол между двумя диагональными плоскостями куба, проходящими через смежные стороны основания.

6.5. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d. Найдите его объем.

6.6. Через вершины куба проведены плоскости, перпендикулярные диагонали. Найдите отрезки, на которые эти плоскости разбивают диагональ, если ребро куба равно 1.

6.7. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. На ребрах AA_1, BB_1, CC_1 соответственно взяты точки M, N, P так, что $AM = \frac{a}{3}$, $BN = \frac{2a}{3}$, $CP = \frac{a}{2}$. Определите, в каком отношении:

а) плоскость MNP делит ребро DD_1;

б) плоскость MNP делит объем куба.

в) Найдите площадь сечения куба плоскостью MNP.

6.8. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найдите угол между этими диагоналями.

6.9. Сечение плоскостью прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием есть ромб с острым углом α. Определите, под каким углом пересекает эта плоскость боковые ребра параллелепипеда?

6.10. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a, высота призмы равна b. Найдите расстояние между стороной основания и скрещивающейся с ней диагональю призмы.

6.11. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна m и образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, если площадь его основания равна S.

6.12. а) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Через точки M и N, лежащие соответственно на ребрах BB_1 и DD_1, такие, что $BM = \dfrac{3a}{4}$ и $DN = \dfrac{a}{4}$, параллельно прямой AC проведена плоскость. Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

б) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Через точки M и N, являющиеся серединами ребер AA_1 и CC_1 соответственно, параллельно прямой DK, где точка K лежит на ребре BB_1 и $BK = \dfrac{a}{3}$, проведена плоскость. Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

6.13. Найдите площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a, плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер B_1C_1 и D_1C_1.

6.14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = a$, $BB_1 = b$ $(b > a)$. Через вершину A перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью.

Призма

6.15. а) Докажите, что число ребер любой призмы кратно трем.

б) Определите число диагоналей n-угольной призмы.

6.16. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, а площади диагональных сечений равны P и Q. Определите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

6.17. а) Все боковые грани правильной шестиугольной призмы – квадраты. Найдите объем призмы, если ее наибольшая диагональ равна d.

б) Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно a. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону основания и большую диагональ призмы.

6.18. Боковые грани правильной треугольной призмы являются квадратами. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней призмы.

6.19. а) Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы высотой h, если прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом α.

б) Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α и меньшей диагональю, равной d. Определите объем призмы, если ее большая диагональ образует с плоскостью основания угол β.

6.20. а) Основание призмы – правильный треугольник, длина стороны которого равна 4. Одна из боковых граней, перпендикулярная плоскости основания, – ромб, длина диагонали которого равна 6. Найдите объем призмы.

б) В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, проходящая через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего, наклонена к плоскости нижнего основания под углом φ. Площадь сечения призмы этой плоскостью равна Q. Найдите объем призмы.

6.21. Стороны основания прямого параллелепипеда равны a и b, угол между ними α. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, пересекающей все ее боковые ребра и образующей с плоскостью основания угол β.

6.22. Докажите, что сумма квадратов площадей диагональных сечений параллелепипеда равна сумме квадратов площадей всех его боковых граней.

6.23. а) В призме проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Пусть $P_{\perp}-$ периметр перпендикулярного сечения, $S_{\perp}-$ его площадь, а $b-$ длина бокового ребра. Докажите, что для объема и площади боковой поверхности призмы справедливы формулы: $V=S_{\perp}\cdot b$, $S_{\text{бок.}}=P_{\perp}\cdot b$.

б) Двугранный угол при боковом ребре наклонного параллелепипеда равен $30°$. Расстояния от этого ребра до двух соседних ребер равны 5 и 4. Боковое ребро равно 6. Найдите объем параллелепипеда.

в) Двугранный угол при боковом ребре наклонного параллелепипеда равен α, расстояния от этого ребра до двух соседних ребер равны a и b. Боковое ребро равно c. Найдите объем параллелепипеда.

6.24. а) Боковые ребра наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 6 *см*. Сечение плоскостью, пересекающей все боковые ребра призмы и перпендикулярной им, представляет собой треугольник, стороны которого относятся как 9:10:17. Определите площадь боковой поверхности этой призмы, если известно, что объем пирамиды A_1ABC равен 288 *см*^{3}.

б) Боковые ребра наклонной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 6 *см*. Определите площадь боковой поверхности этой призмы, если известно, что объем пирамиды A_1ABC равен $36\sqrt{3}$ *см*^{3}, а сечение плоскостью, пересекающей все боковые ребра призмы и перпендикулярной им, представляет собой прямоугольный треугольник один из углов, которого равен $30°$.

в) Боковые ребра наклонной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 5 *см*, а сечение плоскостью, пересекающей все боковые ребра призмы и перпендикулярной им, представляет собой ромб с острым углом $30°$. Определите площадь боковой поверхности этой призмы, если объем пирамиды A_1ABCD равен 160 *см*^{3}.

6.25. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из одной вершины равны a, b и c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Найдите объем параллелепипеда.

6.26. Основание параллелепипеда – квадрат со стороной b, а все боковые грани – ромбы. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найдите объем параллелепипеда.

6.27. а) Найдите объем параллелепипеда, если все его грани ромбы со стороной a и острым углом $60°$.

б) Найдите объем параллелепипеда, если все его грани ромбы, длины сторон которых равны a, а острые углы равны α.

6.28. Найдите объем треугольной призмы, если площадь одной из ее боковых граней равна S, а расстояние от этой грани до противоположного бокового ребра равно H.

6.29. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки M и N так, что отрезки MN и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

6.30. Вычислите объем наклонного параллелепипеда, если длины его ребер, выходящих из одной вершины, равны a, b и c, а плоские углы при этой вершине – α, β и γ.

6.31. а) На боковом ребре CC' правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, сторона основания которой равна 2, а высота 10, взята точка M. Через точку M проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, каждая из которых перпендикулярна плоскости $CC'F$. Кроме того, одна из проведенных плоскостей проходит через точку F, а другая – через точку F'. Найдите площади сечений призмы проведенными плоскостями.

б) На боковом ребре BB' правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, сторона основания которой равна 2, а высота $-4\sqrt{2}$, взята точка M, не принадлежащая ни одному из оснований. Через точку M проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, каждая из которых перпендикулярна плоскости $BB'E$. Кроме того, одна из проведенных плоскостей проходит через центр симметрии верхнего основания, а другая – через точку E. Найдите площади сечений призмы проведенными плоскостями.

§7. Пирамида

Правильная пирамида

7.1. Плоские углы при вершине правильной пирамиды равны α. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды при условии, что пирамида: а) треугольная; б) четырехугольная.

7.2. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра перпендикулярны. Найдите расстояние между скрещивающимися ребрами правильного тетраэдра с ребром a.

7.3. а) В правильную четырехугольную пирамиду с высотой 6 и стороной основания 3 вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании, а остальные на боковых ребрах. Определите площадь поверхности куба.

б) В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб объема 8 так, что четыре его вершины лежат на основании, а другие четыре на боковых ребрах. Сторона основания равна 3. Определите высоту пирамиды.

7.4. Сторона основания правильной пирамиды равна a, высота равна h. Найдите расстояние от вершины основания до противоположной ей боковой грани при условии, что пирамида:

а) треугольная; б) четырехугольная.

7.5. Все ребра правильной пирамиды равны a. Найдите высоту и объем пирамиды при условии, что она:

а) треугольная; б) четырехугольная.

7.6. Найдите плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что он равен углу между боковым ребром и плоскостью основания.

7.7. Докажите, что если все двугранные углы треугольной пирамиды равны между собой, то все ее ребра также равны между собой.

7.8. Найдите объем правильной n-угольной пирамиды со стороной a и боковым ребром b.

7.9. Найдите соотношения между углами правильной n-угольной пирамиды (см. §4.3 стр. 81): а) α и β; б) α и γ; в) α и φ; г) β и γ; д) β и φ; е) γ и φ.

7.10. Найдите объем правильной n-угольной пирамиды, если известны (см. §4.3 стр. 81):

а) a и α; б) a и β; в) a и γ; г) a и φ.

7.11. Вычислите площадь боковой поверхности правильной n-угольной пирамиды, если известны (см. §4.3 стр. 81):

а) a и β; б) a и γ; в) a и α; г) a и φ.

7.12. Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды в k раз больше площади ее основания. Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

7.13. В правильной треугольной пирамиде расстояния от центра основания до плоскости боковой грани и до бокового ребра равны соответственно p и q. Найдите объем пирамиды.

7.14. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, а угол между смежными боковыми гранями равен φ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

7.15. а) В правильной четырехугольной пирамиде через две соседние вершины основания и середины двух противоположных боковых ребер проведена плоскость. Определите, в каком отношении эта плоскость делит высоту пирамиды.

б) В правильной треугольной пирамиде проведено сечение через середины двух сторон основания перпендикулярно плоскости основания. Определите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды.

7.16. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, боковое ребро b. Через середины двух смежных сторон основания проведено сечение параллельно пересекающему их боковому ребру. Найдите площадь сечения.

Произвольная пирамида

7.16. Докажите утверждения:

а) если боковые ребра пирамиды равны между собой, то около многоугольника, лежащего в основании, можно описать окружность и вершина пирамиды проектируется в ее центр;

б) если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, то в многоугольник, лежащий в основании, можно вписать окружность и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

7.17. а) В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найдите высоту пирамиды.

б) Найдите объем пирамиды, в основании которой лежит треугольник со сторонами 3, 4, 5 и все ее боковые ребра равны 5.

7.18. а) Основанием пирамиды служит треугольник, стороны которого равны 12, 10 и 10. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом $45°$. Найдите объем пирамиды.

б) Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 8, 9, 11. Найдите объем пирамиды.

7.19. а) В пирамиде $SABC$ с основанием ABC на ребрах SA, SB, SC или на их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $SA : SA_1 = 2,\ SB : SB_1 = 1{,}5,\ SC : SC_1 = 0{,}5$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SA_1B_1C_1$, если площади боковых граней $SAB,\ SBC,\ SAC$ пирамиды $SABC$ равны соответственно 3, 4 и 5.

б) В пирамиде $SABC$ с основанием ABC на ребрах SA, SB, SC или на их продолжениях взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно так, что $\dfrac{SA}{SA_1} = 4,\ \dfrac{SB}{SB_1} = \dfrac{1}{4},\ \dfrac{SC}{SC_1} = \dfrac{3}{4}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SABC$, если площади боковых граней пирамиды $SA_1B_1C_1$ $SA_1B_1, SB_1C_1, SA_1C_1$ равны соответственно 4, 5 и 6.

7.20. а) Определите, как изменится объем пирамиды $SABC$, если ребро SA изменить в k, SB в m, а SC в n раз соответственно?

б) Докажите, что плоскость, проходящая через середины противоположных ребер тетраэдра, делит его на два равновеликих многогранника.

7.21. Все плоские углы при вершине D тетраэдра $ABCD$ прямые. В тетраэдр вписан куб так, что одна из его вершин совпадает с вершиной D тетраэдра, а противоположная ей вершина принадлежит грани ABC. Вычислите длину ребра куба, если $DA = a$, $DB = b$ и $DC = c$.

7.22. а) Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм. На боковых ребрах SB и SC взяты точки K и L такие, что $SK : KB = 4:1$ и $SL = LC$. Плоскость AKL пересекает ребро SD в точке M. Найдите отношение $SM : MD$.

б) Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребро SC в точке L, а ребра SB и SD в точках K и M, таких, что $SK : KB = 2$ и $SM : MD = 1:2$. Найдите отношение $SL : LC$.

7.23. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны соответственно

а) a, b, c. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

б) $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$ и $\sqrt{126}$ *см*. Найдите площадь основания пирамиды.

7.24. Найдите объем треугольной пирамиды, если ее:

а) боковые ребра попарно перпендикулярны и равны a, b, c;

б) боковые ребра попарно перпендикулярны, а площади ее боковых граней равны S_1, S_2 и S_3;

в) боковые грани взаимно перпендикулярны и их площади равны a^2, b^2 и c^2.

7.25. В пирамиде $SABC$ $\angle ACB = 60°$, $AC = 1$, $BC = 2$, $SC = 3$, ребро SC перпендикулярно плоскости ABC. Найдите расстояние от точки C до плоскости ASB.

7.26. В основании пирамиды $SABCD$, длины всех боковых ребер которой равны 3, лежит прямоугольник $ABCD$. Точка M – середина ребра AS. Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Найдите величину угла между этой плоскостью и плоскостью SAC, если $AB = 4$, $BC = 2$.

7.27. Основанием пирамиды служит ромб со стороной 4 и углом $30°$. Вершина пирамиды проектируется в центр основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если высота ее равна $\sqrt{3}$.

7.28. а) Две плоскости, параллельные плоскости основания пирамиды, делят ее высоту на 3 равные части, а саму пирамиду на три части так, что объем средней из них равен 84. Найдите объем пирамиды.

б) Площадь основания пирамиды равна 54, объем равен 108. Определите, на каком расстоянии от плоскости основания надо провести параллельную ей плоскость, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью равнялась 24?

7.29. а) Найдите объем выпуклого многогранника с вершинами в серединах ребер куба, если длина ребра куба равна a.

б) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Точки M и N середины ребер AB и AD, точка P лежит на ребре A_1B_1, причем $A_1P = \frac{a}{3}$. В каком отношении плоскость MNP делит объем куба?

7.30. а) В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 12, а диагональ $DB = 6$. Высота пирамиды SO проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна $3\sqrt{13}$. Точки E и F лежат на ребрах AD и AB соответственно, причем $AE = 4$, $FB = 8$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, F и параллельной ребру SC.

б) В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 12, а диагональ $DB = 8$. Высота пирамиды SO проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна $2\sqrt{19}$. Точки E и F лежат на ребрах AD и AB соответственно, причем $ED = 3$, $AF = 9$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E и F параллельно ребру SC.

7.31. а) В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник, основание которого $AC = 6$, а боковые стороны равны 9. Высота пирамиды SO проходит через середину AC и равна $6\sqrt{2}$. Точки D и E лежат на ребрах AB и CB соответственно, причем $AD = 3$, $BE = 6$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки D и E перпендикулярно ребру SB.

б) В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник, основание которого $AC = 8$, а боковые стороны равны 12. Высота пирамиды SO проходит через середину AC и равна $2\sqrt{17}$. Точки D и E лежат на ребрах AB и CB соответственно, причем $DB = 3$, $CE = 9$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки D и E перпендикулярно ребру SB.

Усеченная пирамида

7.32. а) В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 1 и 2, боковое ребро равно 3. Найдите объем полной пирамиды.

б) Плоскости α и β параллельны плоскости основания пирамиды. Площади сечений пирамиды этими плоскостями равны 2 и 3. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью γ, параллельной α и β и одинаково удаленной от каждой из них.

7.33. а) Объем усеченной пирамиды равен 76, отношение площадей оснований равно 2,25. Найдите объем полной пирамиды.

б) Объем усеченной пирамиды составляет 48,8% объема полной. Найдите площадь меньшего основания пирамиды, если площадь большего равна 50.

7.34. а) В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b, боковые ребра равны c. Найдите высоту пирамиды.

б) В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b, а высота пирамиды равна h. Найдите длину бокового ребра.

7.35. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны a и b. Найдите:

а) ее объем, если острый угол боковой грани равен α;

б) ее объем и двугранные углы при основании, если ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α.

7.36. В правильной усеченной треугольной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно a и b ($a > b$). Найдите:

а) объем усеченной пирамиды, если ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α;

б) полную поверхность усеченной пирамиды, если ее боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α.

Трехгранный угол

7.37. Плоские углы трехгранного угла равны α, β, γ. Вычислите его двугранные углы φ_A, φ_B и φ_C. Определите, при каких значениях α, β, γ задача имеет решение.

7.38. Двугранные углы трехгранного угла равны φ_A, φ_B и φ_C. Вычислите его плоские углы α, β, γ.

7.39. Даны два плоских угла α, β трехгранного угла и двугранный угол между ними φ_C. Вычислите третий плоский угол и два остальных двугранных угла.

7.40. Даны два двугранных угла и плоский угол между ними. Вычислите третий двугранный угол и два остальных плоских угла.

7.41. Даны два плоских угла α, β трехгранного угла и двугранный угол φ_A, противолежащий одному из них. Вычислите третий плоский угол и два остальных двугранных угла.

7.42. Основанием пирамиды служит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие составляют с ней углы, равные α. Чему равен двугранный угол между этими последними боковыми гранями?

7.43. В трехгранном угле $OABC$ ($O-$ вершина) все внутренние двугранные углы равны α. Найдите угол между ребром OA и биссектрисой угла BOC.

7.44. Докажите, что если все плоские углы треугольной пирамиды равны между собой, то все двугранные углы также равны между собой.

7.45. В трехгранном угле плоские углы при вершине α и β острые и связаны с третьим углом γ неравенством $\cos\alpha\cos\beta > \cos\gamma$. Тупым или острым является двугранный угол, противолежащий углу γ?

7.46. Докажите, что сумма углов, составленных ребрами трехгранного угла с противоположными гранями, заключается между суммой углов и половиной этой суммы.

7.47. Существует ли трехгранный угол, плоские углы которого равны $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$?

7.48. Докажите, что если все двугранные углы некоторой треугольной пирамиды равны, то все ребра этой пирамиды также равны.

7.49. Стороны угла α наклонены к плоскости P под углами β и γ. Найдите косинус угла, являющегося проекцией угла α на плоскость P.

7.50. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью его основания углы α и β. Найдите угол между этими диагоналями.

§8. Круглые тела (цилиндр и конус)

Цилиндр

8.1. а) Радиус основания цилиндра равен 26, образующая – 48. Определите, на каком расстоянии от оси цилиндра следует провести сечение, параллельное оси цилиндра, чтобы оно имело форму квадрата.

б) Осевое сечение цилиндра – квадрат. Площадь полной поверхности цилиндра равна 24π. Определите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси и расположенной на расстоянии $\sqrt{3}$ от оси.

8.2. а) Объем цилиндра равен 200π, высота равна 8. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной его оси и расположенной на расстоянии 4 от нее.

б) Цилиндр пересечен плоскостями, параллельными друг другу и образующей цилиндра. Площади сечений равны 40. Найдите объем цилиндра, если расстояние между плоскостями равно 6, а площадь боковой поверхности цилиндра равна 50π.

8.3. а) Вершины прямоугольника лежат на боковой поверхности цилиндра. Докажите, что две параллельные стороны прямоугольника перпендикулярны оси цилиндра.

б) Высота цилиндра и радиус основания равны H и R соответственно. В него вписан квадрат так, что все его вершины лежат на окружностях нижнего и верхнего оснований. Найдите сторону квадрата.

8.4. Все вершины правильной пирамиды $SABCD$ лежат на боковой поверхности цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости SAB. Найдите радиус цилиндра, если $AB = a$.

8.5. Радиус основания цилиндра равен R, высота цилиндра равна H. В плоскости нижнего основания взята прямая l, касающаяся окружности основания, и через l проведены плоскости под углами α и β к плоскости основания ($\beta > \alpha$, $H >> 2R\,\mathrm{tg}\beta$). Найдите объем части цилиндра, лежащей между плоскостями.

8.6. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 10π, площадь основания равна 2π. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите расстояние от центра одного основания цилиндра до стороны шестиугольника, вписанного в другое основание.

8.7. В цилиндре высота h равна диаметру окружности основания. Через точки окружностей верхнего и нижнего оснований проведена прямая, образующая с плоскостью основания угол α. Определите кратчайшее расстояние между нею и осью цилиндра.

Конус

8.8. а) Две плоскости, перпендикулярные оси конуса, делят высоту на три равные части. Большая из площадей сечений конуса этими плоскостями, равна 28. Определите площадь основания конуса.

б) Объем усеченного конуса составляет $7/8$ объема полного. Найдите отношение площадей оснований конуса.

8.9. а) Радиус основания и высота конуса равны соответственно 2 и 3. В конус вписана правильная треугольная пирамида. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и противоположной боковой гранью.

б) Радиус основания и образующая конуса равны соответственно 3 и 5. В конус вписана правильная четырехугольная пирамида. Найдите косинус угла между плоскостями, содержащими противоположные боковые грани пирамиды.

8.10. Образующая конуса и его высота равны соответственно10 и 8. Около конуса описана правильная треугольная пирамида. Найдите угол между боковыми ребрами пирамиды.

8.11. а) Три образующие конуса взаимно перпендикулярны и равны $\sqrt[4]{6}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

б) Найдите косинус угла α при вершине в осевом сечении прямого кругового конуса, зная, что на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.

8.12. Докажите, что объем конуса равен $1/3$ произведения площади боковой поверхности на расстояние от центра основания до образующей.

8.13. Три конуса с общей вершиной и углами при вершине, равными α, касаются друг друга своими боковыми поверхностями. Четвертый конус с той же вершиной касается своей поверхностью трех данных. Найдите угол при вершине четвертого конуса.

8.14. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определите отношение объемов получившихся частей конуса.

8.15. а) Разверткой боковой поверхности конуса служит полукруг. Найдите угол при вершине осевого сечения.

б) Угол в развертке боковой поверхности конуса равен α. Найдите угол при вершине в осевом сечении конуса.

8.16. Площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину и составляющей угол $30°$ с осью конуса, равна площади осевого сечения. Найдите угол раствора конуса.

8.17. а) Найдите угол при вершине в осевом сечении конуса, если известно, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину, в два раза больше площади осевого сечения.

б) Угол раствора конуса равен 2α, длина образующей l. Найдите наибольшее значение, которое может принимать площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину, и определите величину угла между осью и плоскостью сечения наибольшей площади.

8.18. Две взаимно перпендикулярные образующие конуса делят площадь его боковой поверхности в отношении 1:2. Найти объем конуса, если его образующая равна L.

8.19. а) Через вершину конуса проведено сечение под углом $30°$ к его высоте. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$, а радиус основания 5.

б) Площадь сечения конуса плоскостью, составляющей угол $30°$ с осью конуса, равна площади осевого сечения. Найдите угол раствора конуса.

8.20. а) Образующая конуса равна $5\sqrt{2}$, а площадь его боковой поверхности равна 30π. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в конус.

б) В конус вписана правильная треугольная пирамида. Площадь боковой грани пирамиды равна площади осевого сечения конуса. Найдите отношение площадей боковых поверхностей конуса и пирамиды.

8.21. Объем конуса равен V. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Найдите объем пирамиды.

8.22. а) В конус с высотой H и радиусом основания R вписан куб так, что четыре вершины куба лежат в плоскости основания конуса, а четыре другие вершины – на его боковой поверхности. Найдите длину ребра куба.

б) Конус описан около куба следующим образом: четыре вершины куба лежат в плоскости основания конуса, а четыре другие вершины – на его боковой поверхности. Определите, какой наименьший объем может иметь такой конус, если ребро куба имеет длину a.

8.23. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a, точки M и N – середины ребер AA_1 и A_1B_1 соответственно. Плоскость D_1MN касается боковой поверхности конуса, осью которого служит прямая CC_1, а центром основания – точка C. Найдите объем конуса.

8.24. Два равных конуса с общей вершиной S, высотой h и радиусом основания $R(R < h)$ касаются друг друга и плоскости α. Пусть $l-$ прямая пересечения плоскостей оснований конусов. Вычислите угол между прямой l и плоскостью α.

8.25. Около конуса, высота которого равна радиусу основания, описана пятиугольная пирамида. Ее полная поверхность в два раза больше полной поверхности конуса. Найдите объем пирамиды, если боковая поверхность конуса равна $\pi\sqrt{2}$.

8.26. В конусе с вершиной S угол между образующими SA и SB равен α, а угол между их проекциями на плоскость основания β. Вычислите угол между осью и образующей этого конуса.

8.27. а) Два равных конуса имеют общую вершину и касаются по общей образующей. Угол осевого сечения конуса равен 2α. Найдите двугранный угол между двумя плоскостями, каждая из которых касается обоих конусов, но не проходит через их общую образующую.

б) Два конуса с равными углами раствора имеют общую вершину и касаются друг друга (т.е. их боковые поверхности имеют одну общую касательную). Каждая грань двугранного угла, имеющего величину 2α, касается боковой поверхности каждого из конусов. Найдите угол раствора этих конусов.

8.28. Два конуса имеют общую вершину, и образующая первого конуса является высотой второго. Угол раствора первого конуса равен $1/3$, угол раствора второго равен $120°$. Определите угол между образующими, по которым пересекаются боковые поверхности.

8.29. Три конуса с равными углами раствора имеют общую вершину. Каждый из конусов касается двух других. Все три конуса касаются одной плоскости. Определите угол раствора этих конусов.

8.30. а) Через вершину конуса проведена секущая плоскость, составляющая с плоскостью основания угол $45°$. Найдите объем конуса, если известно, что расстояние от центра основания конуса до секущей плоскости в три раза меньше длины образующей конуса и равно d.

б) Через вершину конуса проведена секущая плоскость, составляющая с плоскостью основания угол в $45°$. AB – диаметр основания, перпендикулярный линии пересечения секущей плоскости с плоскостью основания. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если известно, что расстояния от точек A и B до секущей плоскости равны d и $3d$ соответственно.

8.31. а) Даны два конуса объемов V и $4V$, основания которых лежат в параллельных плоскостях. Конусы расположены таким образом, что вершина одного совпадает с центром основания другого. Найдите объем их общей части.

б) Два конуса имеют общую высоту, а вершина каждого из них совпадает с центром основания другого. Найдите объем общей их части, если их объемы равны V_1 и V_2.

Усеченный конус

8.32. Усеченный конус вписан в правильную треугольную усеченную пирамиду, у которой ребра оснований равны 1 и 4, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем конуса.

8.33. Осевое сечение усеченного конуса – трапеция со сторонами 2, 2, 2 и 4. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной усеченной пирамиды, вписанной в конус.

8.34. Радиус меньшего основания усеченного конуса равен $3r$, радиус большего основания – $7r$. Вершины S и A правильной пирамиды $SABC$ лежат на окружности меньшего основания конуса, вершины B и C основания ABC лежат на окружности большего основания конуса. Найдите объем пирамиды $SABC$.

8.35. В шар радиуса R вписан усеченный конус. Отношение площадей оснований конуса равно 4. Одно из оснований содержит центр шара. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса.

8.36. Докажите, что для того, чтобы в усеченный конус можно было вписать сферу (касающуюся его обоих оснований и каждой образующей), необходимо и достаточно, чтобы длина образующей была равна сумме радиусов оснований.

Цилиндр и конус

8.37. а) В конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, вписан цилиндр, имеющий квадратное осевое сечение. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.

б) Цилиндр вписан в конус объема V. Найдите объем цилиндра, если площади оснований конуса и цилиндра относятся как 1:3.

8.38. а) Конус и цилиндр одинакового объема V расположены таким образом, что их оси совпадают, а основания принадлежат одной плоскости. Найдите объем общей части конуса и цилиндра, если их высоты равны.

б) Конус и цилиндр одинакового объема V расположены таким образом, что их оси совпадают, а основания принадлежат одной плоскости. Найдите объем общей части конуса и цилиндра, если радиусы их оснований равны.

8.39. В конус вписан цилиндр, объем которого составляет 37,5% объема конуса. Определите, в каком отношении площадь боковой поверхности конуса делится верхним основанием цилиндра.

Тела вращения

8.40. а) Треугольник со сторонами 3, 4, 5 вращается вокруг большей стороны. Найдите площадь поверхности и объем тела вращения.

б) Ромб площади Q вращается вокруг одной из сторон. Найдите площадь поверхности тела вращения.

8.41. а) Равнобедренный остроугольный треугольник ABC (AC – основание) угол, при основании которого равен α, а боковые стороны равны b, вращается вокруг оси, проходящей через точку C параллельно стороне AB. Определите объем полученного тела вращения.

б) Прямоугольный треугольник ABC (AC – гипотенуза), с катетом, равным b, и прилежащим к нему углом, равным α, вращается вокруг оси, параллельной гипотенузе и проходящей через точку B. Определите объем полученного тела вращения.

в) Ромб $ABCD$ со стороной, равной α и углом ABC, равным β, вращается вокруг оси, параллельной диагонали BD и проходящей через точку A. Определите объем полученного тела вращения.

§9. Круглые тела (сфера и шар)

Сечение шара и сферы плоскостью

9.1. а) Сечение шара плоскостью имеет площадь 36π. Найдите радиус шара, если сечение удалено от его центра на 8.

б) Линия пересечения сферы с плоскостью имеет длину 18π. Найдите расстояние от центра сферы до этой плоскости, если радиус сферы равен 15.

9.2. а) Докажите, что все касательные к шару, проведенные из одной точки имеют одинаковую длину.

б) Докажите, что если все ребра тетраэдра касаются одного шара, то суммы длин всех пар противоположных ребер одинаковы.

9.3. а) Радиус шара равен R. На его поверхности даны две равные окружности, лежащие в перпендикулярных плоскостях и имеющие общую хорду длиной a. Найдите радиусы окружностей.

б) Две окружности, лежащие на поверхности сферы, имеют одну общую точку. Докажите, что прямая пересечения плоскостей, в которых лежат эти окружности, имеет с поверхностью сферы единственную общую точку.

9.4. а) Через конец радиуса шара под углом $45°$ к нему проведена секущая плоскость. Найдите площадь полученного сечения, если площадь поверхности шара равна 125.

б) Через конец радиуса шара под углом $60°$ к нему проведена секущая плоскость. Площадь полученного сечения равна 11. Найдите площадь поверхности шара.

9.5. а) Через касательную к поверхности шара проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, которые пересекают шар по кругам радиусов r_1 и r_2. Найдите радиус шара.

б) Через касательную к шару радиуса R, проведены две плоскости под углом $45°$ друг к другу. Найдите радиусы сечений шара этими плоскостями, если известно, что они относятся как 1:2.

9.6. а) Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

б) Шар радиуса R касается всех сторон правильного шестиугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости шестиугольника.

9.7. а) Докажите, что точки пересечения двух (неодинаковых) сфер лежат в одной плоскости и линия пересечения двух сфер является окружностью.

б) Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

9.8. Тело ограничено двумя концентрическими сферами. Докажите, что его сечение плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению, касательному к внутренней сфере.

9.9. а) Три взаимно перпендикулярные хорды шара, исходящие из одной точки, равны a. Найдите радиус шара.

б) Три хорды шара, исходящие из одной точки, равны a, а углы между ними равны $60°$. Найдите радиус шара.

9.10. а) Шар радиуса R касается плоскости α в точке A. Прямая l, образуя с этой плоскостью угол величиной φ, пересекает ее в точке C и касается шара в точке B. Найдите длину отрезка AB, если $AC = 2R$.

б) Из точки A, удаленной от центра шара радиуса R, на расстояние l, проведены n касательных к шару так, что все плоские углы многогранного угла при вершине A равны между собой. Определите расстояние между точками касания двух соседних лучей.

Шары и сферы, касающиеся плоскости или вписанные в двугранный угол. Касание шаров и сфер

9.11. На плоскости лежат два шара, радиусы которых равны R_1 и R_2. Известно, что шары имеют единственную общую точку. Найдите:

а) расстояние от плоскости до этой точки;

б) расстояние между точками касания шаров плоскости;

в) наименьший радиус сферы, касающейся этих шаров и плоскости.

9.12. а) На плоскости лежат три сферы, каждая из которых касается двух других. Точки касания шаров с плоскостью образуют прямоугольный треугольник с катетом, равным 3, и противоположным углом $30°$. Найдите радиусы сфер.

б) На плоскости лежат три сферы, каждая из которых касается двух других. Расстояние между точками касания сфер с плоскостью равны соответственно a, b, c. Найдите радиусы сфер.

9.13. а) Три шара радиуса R лежат на плоскости α и касаются друг друга. Найдите радиус четвертого шара, касающегося плоскости α и каждого из шаров.

б) Три шара радиуса R лежат на плоскости α и касаются друг друга. Сверху на них положен шар радиуса $R/3$. Найдите расстояние от его центра до плоскости α.

9.14. Три шара радиуса R лежат на плоскости α и касаются друг друга. Прямая a, параллельная плоскости α, касается каждого из шаров. Найдите расстояние между прямой a и плоскостью α.

9.15. а) В двугранный угол вписаны два одинаковых касающихся друг друга шара. Третий шар меньшего радиуса, вписанный в этот угол, касается данных. Дано отношение m радиуса меньшего шара к радиусу данных. Найдите величину двугранного угла. В каких пределах может изменяться величина m.

б) В двугранный угол величиной 2α вписаны два одинаковых касающихся друг друга шара радиуса R. Третий шар, вписанный в этот угол, касается данных. Найдите его радиус.

9.16. а) Шары радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга, а также двух плоскостей. Найдите угол между плоскостями.

б) Шары радиусов 2, 3, 4, касаются друг друга. Найдите угол между плоскостью, проходящей через центры шаров, и плоскостью, касающейся шаров.

9.17. а) В двугранный угол величиной α вписаны 2 касающихся друг друга шара, радиусы которых равны R_1 и R_2. Найдите угол между линией центров шаров и ребром двугранного угла.

б) В двугранный угол величиной α вписаны две одинаковых сферы, касающихся друг друга. Пусть $A-$ точка касания одной сферы с одной гранью двугранного угла, а $B-$ точка касания другой сферы с другой гранью. Определите, в каком отношении отрезок AB делится сферами.

9.18. Два шара одинакового радиуса R и два других одинаковых шара неизвестного радиуса расположены так, что каждый касается трех других и плоскости, на которой они лежат. Найдите радиусы двух последних шаров.

9.19. Четыре сферы радиуса R расположены так, что каждая из них касается трех других. Найдите радиус сферы, которая касается каждой из данных сфер.

Комбинации шара с многогранниками

Пирамида

9.20. Докажите, что

а) центр вписанного в пирамиду шара является точкой пересечения биссектральных плоскостей всех двугранных углов пирамиды;

б) если в основание пирамиды можно вписать окружность, а основание высоты пирамиды является центром этой окружности, то в пирамиду можно вписать сферу.

9.21. Докажите, что

а) центр описанного около пирамиды шара является точкой пересечения серединных перпендикулярных плоскостей ко всем ее ребрам;

б) для того, чтобы около пирамиды можно было описать шар, необходимо и достаточно, чтобы около ее основания можно было описать окружность.

9.22. Докажите, что объем многогранника, описанного вокруг шара, равен произведению полной поверхности многогранника на треть радиуса шара.

9.23. Найдите радиус шара,

а) описанного около правильного тетраэдра с ребром a;

б) вписанного в правильный тетраэдр с ребром a.

9.24. а) В шар радиуса 13 вписана правильная треугольная пирамида. Высота пирамиды в два раза больше стороны основания. Найдите объем пирамиды.

б) В шар радиуса R вписан правильный тетраэдр. Найдите объем этого тетраэдра.

9.25. а) Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен φ. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

б) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро b. Найдите радиус шара, касающегося плоскости основания и боковых ребер пирамиды.

9.26. Сфера радиуса R делит каждое из ребер SA, SC, AB и CB треугольной пирамиды $SABC$ на три равные части и проходит через середины ребер AC и SB. Найдите высоту пирамиды, опущенную из вершины S.

9.27. а) Найдите радиус шара, описанного около правильной n-угольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

б) Найдите радиус шара, описанного около правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.

9.28. а) В правильной четырехугольной пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

б) В правильной шестиугольной пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

9.29. а) Два противоположных ребра треугольной пирамиды равны 6 и 8, остальные ребра $\sqrt{74}$. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

б) В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Высота пирамиды проходит через середину одного из ребер основания и равна $1{,}5a$. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

9.30. Одна из граней правильного тетраэдра лежит в плоскости α. Шар радиуса R, расположенный вне тетраэдра, касается плоскости α и другой грани тетраэдра в ее центре. Найдите ребро тетраэдра.

9.31. Все плоские углы при вершине S пирамиды $SABC$ прямые. Ребра SA, SB, SC равны a, b и c соответственно. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

9.32. а) Высота SH правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит диаметром сферы. Известно, что $AS = b$, а двугранный угол при основании пирамиды равен β. Найдите длину линии пересечения сферы с поверхностью пирамиды.

б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна a, а двугранный угол при основании пирамиды равен α. Сфера касается основания ABC в его центре и проходит через вершину S. Найдите длину линии пересечения сферы с поверхностью пирамиды.

9.33. Докажите, что треугольная пирамида – правильная, если существует сфера, касающаяся:

а) трех сторон основания пирамиды в их серединах и пересекает боковые ребра в их серединах;

б) всех боковых граней пирамиды в центрах описанных около них окружностей, а плоские углы при вершине этой пирамиды равны.

9.34. а) Докажите, что если противоположные ребра тетраэдра попарно равны, то центры вписанного в тетраэдр и описанного вокруг него шаров концентричны.

б) Докажите, что если в треугольной пирамиде сумма длин противоположных ребер одна и та же для любой пары таких ребер, то вершины этой пирамиды являются центрами четырех шаров, попарно касающихся друг друга.

9.35. Докажите, что существует сфера, касающаяся всех ребер правильной треугольной пирамиды. Найдите ее радиус, если сторона основания пирамиды имеет длину a, а боковое ребро – длину b.

Усеченная пирамида

9.36. Вокруг шара описана четырехугольная усеченная пирамида. Докажите, что объемы пирамиды и шара относятся как их полные поверхности.

9.37. В правильную треугольную усеченную пирамиду с боковым ребром a можно поместить сферу, касающуюся всех граней, и сферу, касающуюся всех ребер. Найдите стороны оснований пирамиды.

9.38. а) В шар радиуса R вписана правильная усеченная четырехугольная пирамида, у которой большее основание проходит через центр шара, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $\pi/3$. Найдите объем усеченной пирамиды.

б) В шар вписана правильная усеченная четырехугольная пирамида, у которой большее основание проходит через центр шара, боковое ребро равно a, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $\pi/3$. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

9.39. а) Шар радиуса R вписан в правильную усеченную четырехугольную пирамиду, боковое ребро которой составляет с плоскостью основания угол, равный $\pi/3$. Найдите объем усеченной пирамиды.

б) Шар вписан в правильную усеченную четырехугольную пирамиду, боковое ребро которой составляет с плоскостью основания угол, равный $\pi/3$, а сторона большего основания равна a. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

Призма

9.40. а) Докажите, что для того чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая, и чтобы около ее основания можно было описать окружность.

б) Докажите, что для любой призмы, описанной около сферы, отношение площади боковой поверхности к площади основания равно 4.

в) Докажите, что для того, чтобы в призму можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность, и, чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности.

9.41. Правильная n-угольная призма вписана в шар радиуса R. Ребро основания призмы равно a. Найдите высоту призмы при:

а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

9.42. а) В шар радиуса $\sqrt{7}$ вписан прямоугольный параллелепипед, с отношением ребер 1:2:3. Найдите объем параллелепипеда.

б) Прямоугольный параллелепипед, одна из граней которого – квадрат площади 40, вписан в шар. Объем шара равен 288π. Найдите объем параллелепипеда.

9.43. а) Основания призмы – ромбы с острым углом $30°$. В нее вписан шар объема 36π. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

б) В правильную шестиугольную призму, объем которой равен 36, вписан шар. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

9.44. Около шара описан прямой параллелепипед с диагоналями равными $\sqrt{10}$ и 4. Найдите радиус шара.

9.45. а) Около шара описана правильная треугольная призма, а около нее описана сфера. Найдите отношение поверхностей шара и сферы.

б) Сфера касается всех ребер треугольной призмы. Определите отношение объемов сферы и призмы.

9.46. В куб с ребром a вписан шар. Найдите радиус шара, касающегося этого шара и трех граней куба.

9.47. а) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) $AB = BC = 2a$, $AA_1 = a$. Плоскость сечения проходит через точки B_1 и D параллельно прямой AC. Найдите радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной B.

б) В прямоугольном параллелепипеде $KLMNK_1L_1M_1N_1$ ($KK_1 \parallel LL_1 \parallel MM_1 \parallel NN_1$) $KL = LM = b$, $KK_1 = 2b$. Плоскость сечения проходит через точки M_1 и K параллельно прямой LN. Найдите радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной M.

Полушар

9.48. В полушар радиуса R вписан куб так, что четыре его вершины лежат на плоскости основания полушара, а четыре другие – на его поверхности. Найдите ребро куба.

9.49. а) Определите наименьшее значение радиуса полусферы, которой можно накрыть два лежащих на плоскости α шара одинакового радиуса r, так чтобы ее большой круг также лежал на плоскости α.

б) В полусферу радиуса R вписаны три одинаковых шара так, что каждый касается двух других, полусферы и ее основания. Найдите радиус этих шаров.

9.50. а) Полушар радиуса R вписан в правильную усеченную четырехугольную пирамиду так, что его большой круг лежит в плоскости большего основания пирамиды. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $\pi/3$.

б) В правильную усеченную четырехугольную пирамиду, боковая грань которой наклонена к плоскости основания под углом $\pi/3$, вписан полушар так, что большее основание пирамиды лежит в плоскости большого круга полушара. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если сторона ее меньшего основания равна a.

9.51. а) В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α, вписан полушар, большой круг которого лежит на основании конуса. Расстояние от вершины конуса до ближайшей к ней точки полушара равно h. Найдите объем конуса.

б) В правильный тетраэдр, ребро которого равно 1, вписан полушар так, что три грани тетраэдра касаются его сферической поверхности, а четвертая служит ему диаметральной плоскостью. Определите площадь полной поверхности полушара.

Конус и цилиндр

9.52. а) Объем конуса равен 6, угол при вершине равен 120°. Найдите объем шара, описанного около конуса.

б) В шар радиуса R вписан прямой круговой конус. Найдите боковую поверхность конуса, если его высота равна h.

9.53. а) В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найдите отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

б) В шар вписан конус, высота и радиус основания которого соответственно равны 3 и $\sqrt{3}$. Найдите радиус шара.

9.54. а) Образующая конуса равна l, а высота в 4 раза больше радиуса вписанного в него шара. Найдите боковую поверхность конуса и радиус описанного около него шара.

б) Середина высоты прямого конуса с образующей l и углом при вершине α является центром шара, проходящего через его вершину. Определите радиус круга, получившегося в результате пересечения поверхностей конуса и шара.

9.55. а) В конус вписан шар. Окружность касания шаровой и конической поверхностей делит площадь боковой поверхности конуса в отношении 1:3, считая от вершины. Найдите угол между образующей конуса и его высотой.

б) В конус с углом при вершине осевого сечения 2α вписан шар. Площадь круга, по окружности которого поверхность шара касается боковой поверхности конуса, равна S. Найдите объем данного конуса.

в) В конус вписан шар. Докажите, что отношение объемов конуса и шара равно отношению площадей полной поверхности конуса и шара.

9.56. а) В прямой круговой конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Определите, в каком отношении боковая поверхность конуса делится линией касания шара и конуса?

б) В шар вписан прямой круговой цилиндр. Определите, во сколько раз объем шара больше объема цилиндра, если известно, что отношение радиуса шара к радиусу основания цилиндра в вдвое меньше, чем отношение поверхности шара к боковой поверхности цилиндра?

9.57. а) Расстояние от центра вписанного в конус шара до вершины конуса равно a. Угол между образующей и плоскостью основания равен α. Найдите объем конуса.

б) В конус вписан шар. Найдите объем конуса, если известно, что плоскости, касающиеся шара и перпендикулярные одной из образующих конуса, отстоят от вершины конуса на расстоянии d_1 и d_2 ($d_2 > d_1$ и угол при вершине в осевом сечении конуса острый).

9.58. В прямом круговом конусе расположены два шара радиуса r, касающиеся основания конуса в точках симметричных относительно центра основания. Каждый шар касается боковой поверхности конуса и другого шара. Высота конуса в 4/3 раза больше радиуса основания. Найдите объем конуса.

9.59. а) В конус с углом $60°$ при вершине осевого сечения вложено три одинаковых шара радиуса R так, что каждый из них касается двух других, основания и боковой поверхности конуса. Найдите радиус основания конуса.

б) На плоскости лежат три шара радиуса R так, что каждый из них касается двух других. Основание конуса лежит в той же плоскости, а данные шары касаются его извне. Высота конуса равна kR. Найдите радиус основания конуса.

9.60. а) На основании прямого кругового конуса лежат три одинаковых шара радиуса R. На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из четырех шаров касается трех других и боковой поверхности конуса. Найдите высоту конуса.

б) На основании прямого кругового конуса лежат четыре одинаковых шара радиуса R, причем каждый из них касается двух других шаров и боковой поверхности конуса. На них лежит пятый шар того же радиуса, касающийся боковой поверхности. Найдите объем конуса.

9.61. а) Внутри прямого кругового цилиндра, высота которого $3R$, лежат три одинаковых шара радиуса R так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем два шара касаются нижнего основания цилиндра, а третий верхнего. Найдите радиус основания цилиндра.

б) На нижнем основании прямого кругового цилиндра лежат три одинаковых шара радиуса R так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра. На них лежит четвертый шар, касающийся боковой поверхности цилиндра и его верхнего основания. Найдите высоту цилиндра.

в) Внутри прямого кругового цилиндра помещены четыре одинаковых шара объема V так, что каждый из них касается трех других и боковой поверхности, причем два шара касаются нижнего основания цилиндра, а два других верхнего основания цилиндра. Найдите объем цилиндра.

9.62. В прямом круговом конусе, образующая которого составляет с его осью угол α, помещены три шара так, что первый шар касается боковой поверхности конуса и второго шара, второй шар касается боковой поверхности первого и третьего шара, а третий шар касается боковой поверхности, основания конуса и второго шара. Какую долю объема конуса занимают все три шара?

9.63. Три прямых круговых конуса с углом α $(\alpha < 60°)$ в осевом сечении и радиусом основания, равным r, поставлены на плоскость таким образом, что их основания лежат в этой плоскости и попарно касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус сферы, касающейся всех трех конусов и плоскости, проходящей через их вершины.

Усеченный конус

9.64. а) Шар радиуса R вписан в усеченный конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса равен α. Найдите радиусы оснований и образующую усеченного конуса.

б) В усеченный конус с площадью боковой поверхности S вписана сфера площади s. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

9.65. а) Около сферы радиуса R описан усеченный конус, образующая которого равна a. Найдите его объем.

б) В усеченный конус с радиусами оснований равными r и r_1, вписан шар, касающийся боковой поверхности и обоих оснований. Найдите отношение объемов усеченного конуса и шара.

в) В усеченный конус объема V вписан шар, касающийся боковой поверхности и обоих оснований. Радиус шара равен R. Определите величину угла между образующей конуса и плоскостью основания.

9.66. В усеченный конус вписан шар, объем которого в 5,5 раз меньше объема конуса. Во сколько раз полная поверхность шара меньше поверхности конуса?

Части сферы и шара

9.67. а) Найдите объем общей части двух шаров радиуса R, если расстояние между центрами шаров равно R.

б) Докажите, что сфера радиуса R отсекает от любого шара большего радиуса, проходящего через ее центр, сферический сегмент, одной и той же площади поверхности. Определите значение этой площади?

9.68. Дан куб с ребром a. Центр шара, радиуса $\frac{5}{8}a$, совпадает с центром куба. Найдите объем части шара, лежащей внутри куба.

9.69. Диаметр шара разделен на 3 одинаковые части и через точки деления проведены плоскости, перпендикулярные диаметру. В каком отношении эти плоскости делят площадь сферы?

9.70. Конус и полушар имеют общее основание круг радиуса R. Высота конуса равна H, причем $H > R$. Найдите площадь части шаровой поверхности, лежащей внутри конуса.

9.71. Сфера с центром в вершине конуса касается плоскости основания конуса. Определите, в каком отношении сфера делит объем конуса, если угол при вершине в осевом сечении конуса равен α.

9.72. Сектор круга радиуса R с центральным углом α вращается вокруг своей оси симметрии. Найдите площадь поверхности и объем тела вращения.

9.73. а) Все ребра треугольной пирамиды равны a. Высота пирамиды является диаметром сферы. Найдите площадь части поверхности пирамиды, лежащей внутри сферы.

б) Все ребра треугольной пирамиды равны a. Шар касается всех ее ребер. Найдите объем части шара, лежащей внутри пирамиды.

9.74. а) Сфера касается всех ребер куба. Найдите объем части куба, лежащей внутри сферы, если ребро куба имеет длину a.

б) Сфера касается всех боковых ребер правильной четырехугольной призмы и ее оснований. Найдите отношение части площади сферы, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы.

9.75. Из конца диаметра шара проведена хорда так, что поверхность, образуемая ее вращением вокруг этого диаметра, делит объем шара на две равновеликие части. Определите угол между хордой и диаметром.

§10. Задачи на определение экстремальных значений

Задачи, решаемые геометрическими способами

10.1. Через диагональ куба проведите сечение плоскостью так, чтобы площадь сечения была наименьшей.

10.2. а) Найдите значение наибольшей площади ортогональной проекции единичного куба на плоскость.

б) Найдите из всех ортогональных проекций правильного тетраэдра на разные плоскости ту, которая имеет наибольшую площадь.

10.3. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Определите наибольшее значение площади ортогональной проекции этого параллелепипеда на плоскость.

10.4. а) Найдите наибольшее значение объема пирамиды $SABC$ при следующих условиях $SA \le 4, SB \ge 7, SC \ge 9, AB = 5, BC \le 6, AC \le 8$.

б) Найдите наибольший объем пирамиды $ABCD$, если длины ее ребер связаны соотношениями: $CD = 5$, $AD \ge 8$, $AB \ge 7$, $BD \le 9$, $AC \le 4$.

10.5. а) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром равным 1 найдите наименьшее расстояние от точки M, расположенной на окружности, вписанной в грань $ABCD$, до точки N, расположенной на окружности, описанной около треугольника A_1BD.

б) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. На прямых AA_1 и BC взяты точки M и N соответственно так, что прямая MN пересекает ребро C_1D_1. Найдите наименьшее значение длины отрезка MN.

10.6. а) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ высота в два раза меньше основания. Найдите наибольшее значение величины угла A_1MC_1, где M – точка на ребре AB.

б) Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1. Найдите наименьшее значение длины таких отрезков.

10.7. На поверхности куба найдите шесть точек, из которых диагональ видна под наименьшим углом.

Задачи, решаемые с использованием производной

10.8. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, одна сторона которого равна a, боковые ребра пирамиды равны b. Найдите наибольшее значение объема таких пирамид.

10.9. а) Найдите наибольший объем правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно a.

б) Определите длину стороны основания правильной треугольной призмы объема V, имеющей наименьшую площадь полной поверхности.

10.10. Диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы равна d. Найдите длину бокового ребра, при котором объем призмы наибольший.

10.11. Рассматриваются всевозможные треугольные призмы, каждая боковая грань каждой из которых имеет периметр, равный a. Найдите среди них призму наибольшего объема (в ответе укажите длину бокового ребра призмы).

10.12. а) Периметр осевого сечения цилиндра равен 6. Найдите наибольшее значение объема цилиндра.

б) Сумма длин радиуса основания цилиндра и его высоты равна 6. Найдите наибольшее значение объема цилиндра.

в) Сумма длин диаметра основания цилиндра и его образующей равна 6. Найдите наибольшее значение объема цилиндра.

10.13. а) Найдите наименьшее значение площади полной поверхности цилиндра, объем которого равен 16π.

б) Сумма площадей боковой поверхности и одного основания цилиндра равна 27π. Найдите наибольшее значение объема цилиндра.

в) Найдите наибольшее значение объема цилиндра, площадь полной поверхности которого равна 6π.

10.14. а) Найдите наибольшее значение объема цилиндра, диагональ осевого сечения которого равна $\sqrt{3}$.

б) Найдите наименьшее значение длины образующей конуса, объем которого равен 18π.

в) Найдите наименьшее значение длины образующей конуса, площадь осевого сечения которого равна 18.

10.15. Одно из оснований цилиндра является сечением шара, а другое основание принадлежит большому кругу этого шара. Радиус шара равен R. Определите высоту цилиндра, имеющего наибольший объем.

10.16. а) Найдите наибольшее значение объема конуса, периметр осевого сечения которого равен 8.

б) Периметр осевого сечения конуса равен 8. Найдите наибольшее значение площади боковой поверхности конуса.

10.17. а) Найдите наибольший объем цилиндра, вписанного в конус высотой H и с радиусом основания R.

б) Найдите высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

10.18. Найдите значение длины высоты цилиндра, наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

10.19. а) Из всех правильных треугольных призм, вписанных в полусферу радиуса R так, что плоскость основания призм совпадает с плоскостью, ограничивающей полусферу, выбрана призма наибольшего объема. Найдите площадь полной поверхности этой призмы.

б) Из всех цилиндров, вписанных в полусферу радиуса R так, что плоскость основания цилиндров совпадает с плоскостью, ограничивающей полусферу, выбран цилиндр, имеющий наибольший объем. Найдите площадь его боковой поверхности.

§11. Элементы аналитической геометрии и векторной алгебры в пространстве. Метод координат в пространстве

Векторы: сложение и умножение на число

11.1. а) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – центр грани CC_1D_1D. Выразите вектор $\overrightarrow{B_1M}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AA_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$.

б) В призме $ABCA_1B_1C_1$ точка $M-$ центр грани AA_1B_1B. Выразите вектор $\overrightarrow{MC_1}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$.

11.2. а) Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$ с центром O. Точка M – точка пересечения медиан треугольника SCD. Выразите векторы $\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SO}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AS}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}$.

б) В пирамиде $ABCD$ M – середина ребра BD. Разложите вектор $\overrightarrow{CM}$ по базису $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AB}$.

11.3. а) Основанием пирамиды с вершиной S служит параллелограмм $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{SD}$ по базису $\vec{a}=\overrightarrow{SA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{SB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{SC}$.

б) В правильной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S $\overrightarrow{AS}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{c}$. Выразите вектор $\overrightarrow{SE}$ через $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

11.4. а) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\vec{a}=\overrightarrow{AB_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD_1}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Разложите векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ по базису $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

б) В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ M, N, P – центры граней $A_1B_1C_1D_1$, BB_1C_1C, CC_1D_1D соответственно. Выразите вектор $\overrightarrow{AC_1}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AP}$.

11.5. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ с общей вершиной A. Докажите, что векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ компланарны.

11.6. Докажите, что в треугольной пирамиде отрезки, соединяющие середины противоположных ребер (скрещивающихся) пересекаются в одной точке и в точке пересечения делятся пополам. (На самом деле точка пересечения этих отрезков совпадает с точкой пересечения медиан пирамиды (см. предыдущую задачу)).

Прямоугольная система координат

11.7. а) Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3;-1;2)$, $B(2;2;5)$, $C(4;1;-1)$. Найдите четвертую вершину D.

б) Центр параллелограмма $ABCD$ имеет координаты $(3;5;7)$, а координаты середин сторон BC, CD есть $(-1;0;1)$ и $(2;4;-3)$ соответственно. Найдите координаты вершин A и B.

11.8. Даны точки A и B: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и число λ. Найдите координаты точки C такой, что $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = \lambda$.

11.9. а) Вершины треугольника имеют координаты $(3;-1;4)$, $(2;5;7)$, $(1;-1;-5)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника.

б) Найдите точки пересечения медиан тетраэдра с вершинами $(3;-1;4)$, $(5;2;0)$, $(3;3;-3)$, $(1;6;7)$.

11.10. а) При каких значениях α и β векторы $\{1;\ \alpha;\ \beta\}$ и $\{\alpha-\beta;\ 5;\ 4\}$ коллинеарны?

б) При каких значениях α векторы $\{1;-1;0\}$, $\{2;1;1\}$ и $\{1;2-\alpha;3\}$ компланарны?

11.11. а) В правильной призме $ABCA'B'C'$ $AB = AA' = a$. Точка M – середина ребра BB', точка N – середина ребра CC'. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NB'}$.

б) В правильной призме $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ $AB = AA' = a$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{FA'} + \overrightarrow{EF'}$.

11.12. а) В правильной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCD$ $AB = SA = a$. Точка M – центр грани SCD, O – центр основания. Найдите длину вектора $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AC}$.

б) В правильной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDEF$ $AB = a$, $SA = 2a$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{CF}$.

11.13. а) В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD -$ прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найдите SD.

б) В треугольной пирамиде $SBCD$ угол $BCD -$ прямой, $SB = 4$, $SC = 5$, $SD = 6$. Найдите расстояние от вершины S до точки A такой, что $ABCD -$ прямоугольник.

Скалярное произведение векторов

11.14. Известно, что $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Найдите:

а) $(\vec{a}, \vec{b})$; б) $(2\vec{a} - \vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b})$; в) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$;

г) $pr_{\vec{a}+\vec{b}}\vec{b}$; д) $\cos\angle(\vec{a}, \vec{a} - 2\vec{b})$.

11.15. а) Определите значения λ, при которых векторы $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

б) Докажите, что вектор $\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$.

11.16. а) Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ таковы, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ и $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=7$, $|\vec{c}|=8$. Найдите значение суммы $(\vec{a}, \vec{b})+(\vec{b}, \vec{c})+(\vec{c}, \vec{a})$.

б) Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}-$ векторы единичной длины и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Докажите, что углы между векторами равны $120°$.

11.17. а) Найдите угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что вектор $\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}-6\vec{b}$, а вектор $2\vec{a}+3\vec{b}$ перпендикулярен вектору $2\vec{a}-3\vec{b}$.

б) Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичной длины, если известно, что вектор $\vec{a}+4\vec{b}$ перпендикулярен вектору $13\vec{a}-7\vec{b}$.

11.18. а) Найдите косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаковой длины, если известно, что $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-0,75\vec{b}|$.

б) Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ и $\cos\angle(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1}{3}$.

11.19. а) Найдите $|\vec{a}-2\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $pr_{\vec{b}}\,\vec{a}=1{,}5$.

б) Найдите $pr_{\vec{b}}\,\vec{a}$, если $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=8$, $|\vec{a}-\vec{b}|=12$.

11.20. а) Найдите угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+3\vec{b}|$.

б) Вычислите $|\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=|\vec{a}+\vec{b}|=3$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=4\sqrt{3}$.

11.21. а) В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N центры граней AA_1B_1B и BB_1C_1C соответственно. Найдите угол между скрещивающимися прямыми AN и C_1M, если известно, что $AA_1 = 2AB$.

б) В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N центры граней AA_1B_1B и BB_1C_1C соответственно. Найдите угол между скрещивающимися прямыми AN и C_1M, если известно, что $AA_1 = 2AB$.

11.22. а) Боковые грани правильной треугольной призмы являются квадратами. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями боковых граней призмы.

б) В правильной шестиугольной призме боковое ребро в 2 раза больше стороны основания. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями двух смежных боковых граней призмы.

11.23. Три луча с общей вершиной образуют углы, все равные α. Найдите углы между биссектрисами данных углов.

11.24. а) Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды в два раза больше стороны основания. Найдите угол между скрещивающимися диагональю основания и апофемой боковой грани.

б) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S $AS = 2AB$. Точки M и N середины ребер AB и SC соответственно. Найдите угол между прямыми SM и BN.

11.25. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны a. Определите, где на прямых BA_1 и AC_1 следует взять точки M и N, чтобы отрезок MN осуществлял кратчайшее расстояние между этими прямыми? Чему равно расстояние MN.

11.26. а) В пирамиде $ABCD$ плоские углы при вершине A равны $60°$, $AB = 1, AC = 2, AD = 3$. Найдите длину отрезка, соединяющего вершину B с точкой пересечения медиан противоположной грани.

б) Три диагонали параллелепипеда взаимно перпендикулярны и равны соответственно a, b, c. Найдите длину четвертой диагонали.

11.27. Все ребра параллелепипеда равны a, грани ромбы с углом $60°$. Найдите наибольшую диагональ параллелепипеда.

11.28. а) Найдите угол между векторами $\vec{i} + \vec{j}$ и $2\vec{k} - \vec{j}$.

б) Определите, при каком значении λ векторы $\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{i}+\lambda(\vec{j}+\vec{k})$ перпендикулярны.

11.29. а) Найдите величину угла A и длину медианы AM треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(-3;1;3)$, $B(0;2;1)$, $C(4;1;1)$.

б) Даны точки $A(3;1;-2)$, $B(0;1;1)$, $C(-4;1;2)$, $D(-3;5;0)$. Найдите расстояние между серединой ребра AB и точкой пересечения медиан треугольника ACD.

11.30. а) Вектор $\vec{a}$ составляет с осями абсцисс и ординат углы $60°$ и $45°$ соответственно. Определите, какой угол составляет вектор $\vec{a}$ с осью аппликат.

б) Найдите вектор длины 5, составляющий одинаковые углы с осями координат.

Уравнение плоскости

11.31. а) Выведите уравнение плоскости, проходящей через точки $(-1;2;3)$, $(0;1;4)$ и $(2;3;5)$.

б) Выведите уравнение плоскости, проходящей через точку $(3;-2;-5)$ параллельно плоскости $3x+4y-2z+2001=0$.

11.32. Выведите уравнение плоскости, симметричной плоскости $3x+5y-2z+7=0$: а) относительно точки $(-1;4;3)$;

б) относительно оси абсцисс; в) относительно плоскости Oxz.

11.33. а) Найдите угол между плоскостями $3x-y+2z+4=0$ и $4x+y-5z+17=0$.

б) Найдите угол между плоскостью $3x-5y+2z-7=0$ и осью ординат.

11.34. а) Выведите уравнения плоскостей, проходящих через концы отрезка AB перпендикулярно этому отрезку, если $A(3;3;-4)$, $B(-3;1;0)$.

б) Выведите уравнение плоскости, перпендикулярной отрезку PQ и проходящей через его середину, если $P(0;4;3)$, $Q(-1;2;5)$.

11.35. а) Докажите, что расстояние от точки P до плоскости α выражается формулой: $\rho(P,\alpha)=|pr_{\vec{n}}\vec{PA}|=\dfrac{|(\vec{n},\vec{PA})|}{|\vec{n}|}$, где $\vec{n}-$ нормальный вектор плоскости α, $A-$ произвольная точка плоскости.

б) Найдите расстояние от точки $(-1;3;2)$ до плоскости $2x-y-2z+4=0$.

11.36. а) Найдите расстояние между плоскостями $x+2y-3z+1=0$ и $2x+4y-6z+1=0$.

б) Найдите расстояние между плоскостью $2x-3z-5=0$ и осью ординат.

11.37. а) На оси абсцисс найдите все точки, которые вдвое ближе к плоскости $x-y+z+1=0$, чем к плоскости $x+y-z+3=0$.

б) Выведите уравнение плоскости, находящейся на одинаковом расстоянии от плоскостей $2x-y+3z+4=0$ и $4x-2y+6z-1=0$.

11.38. Найдите высоту AH пирамиды $ABCD$, если $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;4)$, $C(3;3;-4)$, $D(-2;0;1)$.

11.39. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=1$, $AA_1=3$, $AD=2$. Точка $M-$ центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Найдите:

а) расстояние от вершины D_1 до плоскости A_1C_1D;

б) угол между плоскостями A_1C_1D и AA_1D_1;

в) угол между прямой AM и плоскостью A_1C_1D.

11.40. В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 6, высота равна 8. Точки M и N лежат на ребрах SD и SC соответственно, причем $SM=\dfrac{1}{3}SD$, $SN=\dfrac{1}{2}SC$. Найдите:

а) расстояние от вершины S до плоскости AMN;

б) угол между плоскостью AMN и плоскостью основания;

с) угол между прямой CM и плоскостью BSD.

Уравнение прямой в пространстве

11.41. а) Напишите канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $(1;3;-2)$ и $(2;5;7)$.

б) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(3;2;-5)$ параллельно прямой $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{-2}$.

11.42. Найдите угол между прямыми $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{-2}$ и $x=3+t$, $y=-2t$, $z=1+t$.

11.43. Найдите расстояние от точки P до прямой l:

а) $P(1;3;-2)$, l: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-3}$;

б) $P(0;2;-1)$, l: $x=2-t$, $y=3+2t$, $z=4t$.

11.44. Найдите расстояние между параллельными прямыми l_1 и l_2:

а) l_1: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{2}$; l_2: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+2}{2}$;

б) l_1: $x=2+3t, y=-1+4t, z=2t$; l_2: $x=7+3t, y=1+4t,\ z=3+2t$.

Прямая и плоскость в пространстве

11.45. а) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(3;-1;2)$ перпендикулярно плоскости $2x+4y-5z+2001=0$.

б) Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $(-2;3;4)$ перпендикулярно прямой $x=t$, $y=3-t$, $z=4+2t$.

11.46. Выведите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z}{2}$ и точку $(-1;4;1)$.

11.47. Спроектируйте:

а) точку $(0;-3;5)$ на прямую $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$;

б) точку $(3;5;-4)$ на плоскость $x+2y-3z-53=0$;

в) прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-9}{-5}$ на плоскость $x-2y+3z-6=0$.

11.48. а) Найдите точку, симметричную точке $(-3;1;5)$ относительно плоскости $2x+3y-z+1=0$.

б) Найдите точку, симметричную точке (4; 0; 1) относительно прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-9}{3}$.

11.49. Докажите, что расстояние от точки $P(x_p, y_p, z_p)$ до плоскости α: $Ax+By+Cz+D=0$ (см. задачу 11.35) можно выразить формулой: $\rho(P,\alpha)=\frac{|Ax_p+By_p+Cz_p+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

11.50. а) Выведите уравнение плоскости, равноудаленной от прямых $x=2y=z$ и $x=3-t, y=2+2t, z=-1+3t$.

б) Выведите уравнения плоскостей, находящихся на расстоянии 5 от плоскости $2x+2y-z+5=0$.

11.51. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Через прямую B_1C проведена плоскость, пересекающая ребро AB и составляющая угол $60°$ с прямой A_1B. Определите, в каком отношении эта плоскость делит ребро AB.

б) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра 1. На ребрах BB_1 и DD_1 взяты точки K и P соответственно, причем $BK:B_1K=1:3$, $DP=PD_1$. Плоскость, проведенная через точки A,K,P пересекает диагонали A_1D и B_1C в точках M и T. Найдите длину отрезка MT.

Уравнение сферы

11.52. Дана сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$. При каком условии на коэффициенты в уравнении плоскости сфера касается этой плоскости?

11.53. а) Составьте уравнение сферы с диаметром AB, где $A(-1;3;1)$, $B(2;0;5)$.

б) Составьте уравнение сферы, проходящей через точки (3; 1; –2), (7; –3; 4), (2; –8; 4), (4; –4; 8).

11.54. а) Составьте уравнение сферы, с центром (–3; 1; 2), касающейся плоскости $2x + 3y - 3z + 4 = 0$.

б) Составьте уравнения сфер радиуса 6, касающихся плоскости $2x - y - 2z + 3 = 0$ в точке (1; 1; 2).

11.55. а) Составьте уравнения двух сфер равного радиуса, касающихся друг друга, с центрами в точках (1; –3; 1) и (5; 1; –7).

б) Составьте уравнение сферы, с центром (1; –8; 9), касающейся сферы: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 19$.

11.56. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите радиус сферы, проходящей через вершину A, середины ребер CD, BB_1 и центр грани $A_1B_1C_1D_1$.

б) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра a. Точка $E -$ середина ребра C_1D_1, точка $F -$ середина ребра B_1C_1. Найдите радиус сферы, проходящей через точки E, F, A, C.

11.57. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Сфера с центром внутри куба проходит через вершины B_1, D_1, касается ребра AA_1 и грани $ABCD$. Найдите ее радиус.

11.58. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. На ребре AD как на диаметре построена сфера. Вторая сфера, лежащая внутри куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла с вершиной A_1. Определите радиус второй сферы.

б) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Центр сферы радиуса 1 находится в вершине D. Вторая сфера, находящаяся вне куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла с вершиной A_1. Определите радиус второй сферы.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

§1. Прямые и плоскости в пространстве

1.2. в) Нет. **1.12. а)** 27; **б)** 15. **1.14.** Либо все три прямые параллельны между собой, либо все три пересекаются в одной точке. **1.19. а)** 7 *см*; **б)** $a+c-b$. **1.22.** PQ и AA_1 – скрещивающиеся прямые. **1.23.** ***Указание.*** Заключите прямые a и b в параллельные плоскости. **1.24. а)** Нет; **б)** плоскость, параллельная данным прямым. **1.31 б)** ***Указание***. Воспользуйтесь результатом задачи 1.13б. **1.32. в)** ***Указание.*** Проведите через некоторую точку плоскости прямые, параллельные данным. **1.34.** ***Указание.*** Воспользуйтесь результатом задачи 1.33 (см. рис. 1). $AC_1 \perp A_1B$, $AC_1 \perp BD$. **1.39.** 16 *см* и 4 *см*.

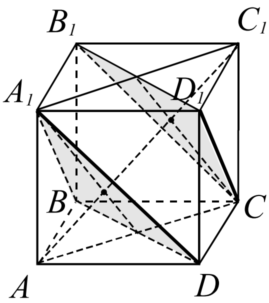


Рис. 1

§2. Углы между прямыми в пространстве, прямой и плоскостью, между плоскостями

2.1. а) $60°$; **б)** все углы равны $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; **в)** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **2.2. а)** $90°$; **б)** $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{15}$. **2.3. а)** $\arccos\dfrac{3}{4}, 2\arccos\dfrac{3}{4}$; **б)** $2\arccos\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$, $3\arccos\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{4}$; $k \in \left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{3}{2}\right)$. **2.5.** $\arcsin\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2-d^2}{2ac}\right)$.

Указание. Постройте прямоугольник $BCDE$. Искомый угол равен углу между прямыми AB и BE. **2.6. а)** $\arccos(1/\sqrt{50})$; **б)** $\arccos 0{,}1$.

2.7.а) $\dfrac{\pi}{6}$; **б)** $\arcsin\left(\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\right)$. **2.8. а)** $\arcsin\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}\right)$. **б)** $\arccos\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = 2\arcsin\left(\dfrac{\sin(\alpha/2)}{\sqrt{2}}\right)$. **2.9. а)** $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$;

б) $\arcsin\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$. ***Указание.*** Сведите задачу к задаче пункта а). **2.10.** $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}\,\sin\varphi}{2}$. **2.11.** ***Указание.*** Воспользуйтесь равенством треугольников. **2.13. а)** $\arcsin\left(\sin\alpha\cdot\sin\beta\right)$;

б) $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$. **2.14.** $\arccos\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

2.15. а) $\arccos\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha/2}$; **б)** $\arccos\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos(\alpha/2)}\right)$. **2.16.** $-\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta$.

2.17. а) $\arccos\sqrt{\dfrac{3}{11}}$; **б)** $\arccos\sqrt{\dfrac{3}{11}}$; **в)** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{65}}$.

2.18. а) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. ***Указание.*** Воспользуйтесь формулой площади ортогональной проекции фигуры на плоскость. **б)** $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

2.19. а) $\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\mathrm{tg}\beta}{\sin(\alpha/2)}\right)$; **б)** $\mathrm{arctg}\left(\dfrac{2\cdot\mathrm{tg}\beta}{\sqrt{3}}\right)$.

§3. Расстояние между объектами в пространстве

3.1. $CD=0{,}5a$. **3.2. а)** 2,5; **б)** $\sqrt{15}$. ***Указание.*** Вершина пирамиды проектируется в центр вписанной окружности. **3.3. а)** 2,5; **б)** $\dfrac{21\sqrt{15}}{10}$.

3.4. а) $\sqrt{2b^2-a^2}$. ***Указание.*** Точка M проектируется на биссектрису угла. **б)** $\sqrt{37}$. **3.5.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab\cos\alpha}$. **3.6.** $R\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ***Указание.*** Опустите перпендикуляры из центров фигур на прямую пересечения плоскостей. **3.7.** $2(\sqrt{5}+\sqrt{7})$. **3.8. а)** $\dfrac{24}{5}$; **б)** $\dfrac{3}{5}$. **3.9. а)** $\sqrt{\dfrac{46}{41}}$;

б) $\frac{\sqrt{11}}{2}$; **в)** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **3.10.** $\frac{a\cdot\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1+\sin^2(\alpha/2)}}$. **3.11.** $a\cdot\frac{2k+1}{2\sqrt{(k+1)^2+1}}$. **3.12.** $\frac{ah(2k+1)}{2\sqrt{a^2(k+1)^2+h^2}}$. **3.13. а)** $\frac{a\sqrt{3l^2-a^2}}{2l}$; **б)** $a\cdot\sqrt{\frac{3l^2-a^2}{16l^2-5a^2}}$. **3.14. а)** $\frac{ab\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4b^2}}$; **б)** $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{2b}$. **3.15. а)** $\frac{a\sqrt{2l^2-a^2}}{2l}$; **б)** $\frac{a}{2}$ и $a\cdot\sqrt{\frac{4l^2-2a^2}{4l^2-a^2}}$; **в)** $a\cdot\sqrt{\frac{4l^2-2a^2}{4l^2-a^2}}$. **3.16. а)** $a\cdot\sqrt{\frac{2l^2-a^2}{16l^2-6a^2}}$; **б)** $\frac{a\sqrt{2b^2-a^2}}{\sqrt{2(4b^2-a^2)}}$. **3.17.** $\frac{abh}{\sqrt{a^2b^2+a^2h^2+b^2h^2}}$. **3.18.** Два варианта: $\frac{a\sqrt{10}}{10}$ и $\frac{a\sqrt{70}}{35}$. **3.19. а)** Два варианта: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $2a\cdot\sqrt{\frac{3l^2-3a^2}{4l^2-a^2}}$; **б)** четыре варианта: $\frac{a\sqrt{l^2-a^2}}{2l}$, $a\cdot\sqrt{\frac{3l^2-3a^2}{4l^2-a^2}}$, $2a\cdot\sqrt{\frac{l^2-a^2}{4l^2-3a^2}}$, $\frac{3a\sqrt{l^2-a^2}}{2l}$. **3.20.** $\frac{2bc}{\sqrt{b^2+4c^2}}$. **3.21.** $\frac{a^2h\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$. **3.22.** $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

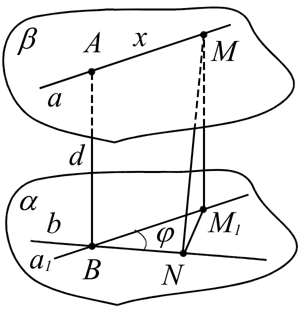


Рис. 2

3.23. а) $a\sqrt{3}$; **б)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; **в)** $\frac{3ah}{2\sqrt{h^2+4a^2}}$; **г)** $\frac{2ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2+3a^2}}$.

3.24. ***Указание.*** Поместите скрещивающиеся прямые a и b в параллельные плоскости (см. рис. 2). Выведите формулу: $MN=\sqrt{d^2+x^2\sin^2\varphi}$. **3.25. а)** 12; **б)** 8.

§4. Построения в пространстве

4.16. а) См. рис. 3. ***Указание.*** Плоскость AB_1C_1, содержащая диагональ куба B_1D перпендикулярна диагонали грани DD_1C. **б)** См. рис. 4. ***Указание.*** Воспользуйтесь результатом задачи 1.33. $MN \parallel AC_1$.

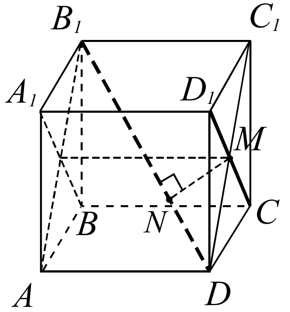


Рис. 3

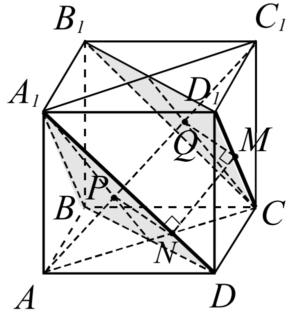


Рис. 4

4.17. Окружность, диаметром которой служит отрезок MA_1, где точка A_1 – ортогональная проекция данной точки A на плоскость α. **4.18.** Треугольник, четырехугольник и шестиугольник. Сечение куба не может быть правильным пятиугольником, так как у сечения, имеющего больше трех сторон, найдется хотя бы одна пара параллельных сторон, а у правильного пятиугольника параллельных сторон нет. **4.19. а)** Секущая плоскость должна быть параллельна противоположным ребрам тетраэдра. **б)** Секущая плоскость должна делить ребро, соединяющее противоположные ребра, в отношении, равном отношению длин противоположных ребер. **4.37. а)** ***Указание.*** Проведите через прямые a и b параллельные плоскости. Если точка M не лежит ни в одной из этих плоскостей, то можно провести через одну из прямых и точку M плоскость γ. Плоскость γ пересечет другую прямую в точке K. Прямая KM – искомая. **б)** ***Указание.*** Проведите через прямые a и b параллельные плоскости. Прямая c не может лежать ни водной из этих плоскостей. Через произвольную точку этой прямой можно провести прямую d, пересекающую a и b (см. пункт а) этой задачи). **4.38.** ***Указание.*** **а)** Постройте плоскость α и в ней четыре различные прямые

a, b, c и d, пересекающиеся в одной точке; **б)** смотри пункт а). **4.39.** ***Указание.*** Воспользуйтесь результатом задачи 4.37б. **4.40. б)** ***Указание.*** Воспользуйтесь результатом задачи 5.5а. **4.41.** ***Указание.*** Постройте след M прямой AB на плоскости α, образованной прямыми a и b. Множество точек $P \in \alpha$ таких, что $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MP} \cdot \vec{MQ}$, где $Q = b \cap MP$ – окружность. Точки пересечения этой окружности с прямой a – искомые. **4.42.** ***Указание.*** Постройте общий перпендикуляр MN данных прямых. На каждой прямой по обе стороны от точек пересечения с перпендикуляром на расстоянии $\frac{MN}{\sqrt{2}}$ возьмите точки. Эти точки будут являться вершинами правильного тетраэдра. **4.43.** ***Указание.*** Через каждые две прямые проведите параллельные плоскости.

§5. Геометрические места в пространстве

5.1. а) Плоскость, перпендикулярная отрезку, соединяющему данные точки, и проходящая через его середину; **б)** если точки лежат на одной прямой, то ГМТ – пустое множество; иначе – прямая, перпендикулярная плоскости точек и проходящая через центр окружности, содержащей эти точки; **в)** плоскость, перпендикулярная плоскости прямых и проходящая через середину любого отрезка с концами на этих прямых; **г)** две плоскости, перпендикулярные плоскости прямых и содержащие биссектрисы углов, образованных этими прямыми; **д)** биссектральные плоскости двугранных углов, образованных данными плоскостями. **5.2. а)** прямая, перпендикулярная плоскости треугольника и проходящая через центр вписанной в него окружности; **б)** прямая, перпендикулярная плоскости фигуры и проходящая через центр описанной около нее окружности. **5.3.** Плоскость, параллельная данным, проходящая через середину общего перпендикуляра к данным плоскостям. **5.4.** Линии пересечения биссекторных плоскостей между α и β, α и γ, β и γ (четыре прямые). Исключение составляет случай, когда α, β, γ пересекаются по одной прямой. **5.5. а)** Плоскость α, параллельная прямым a и b, проходящая через некоторую точку C такую, что $AC : CB = m : n$, где $A \in a$, $B \in b$. **б)** Окружность в плоскости α (см. пункт а) настоящей задачи), центр которой лежит на общем перпендикуляре прямых a и b. **5.6.** При $a < d$ ГМТ – пустое множество; при $a = d -$ все точки, лежащие между плоскостями; при $a > d$ – две плоскости, параллельные α и β, проходящие на расстоянии $a - d$ от крайней из них. **5.7. а)** Биссекторы двух двугранных углов, образованных одной из граней данного угла и плоскостью, параллельной другой грани и удаленной от нее на a. **б)** Часть плоскости, образованной прямыми a и b, параллельными ребру и лежащими в гранях на данном расстоянии d от него – между прямыми.

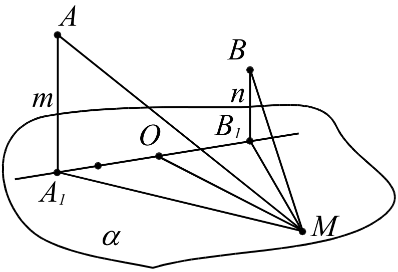


Рис. 5.

5.8. а) Окружность (см. рис. 5) с центром O радиуса $\sqrt{0,5r^2 - a^2}$, где $r^2 = k^2 - m^2 - n^2$, $A_1B_1 = 2a$, точка O – середина отрезка A_1B_1. **5.9.** Окружность, пересекающая прямую A_1B_1 под прямым углом в двух точках, делящих отрезок A_1B_1 в отношении $m:n$ внутренним и внешним образом, где A_1 и B_1 – ортогональные проекции точек A и B на α, $AA_1 = m$, $BB_1 = n$. **5.10.** Пучок прямых с центром в точке A, лежащих в плоскости образованной параллельными прямыми $a_1 \parallel a_2$, параллельными ребру a (см. рис. 6). Прямые $a_1 \parallel a_2$ можно проводить по разные стороны от ребра a. **5.11.** Два пучка прямых с центром в точке A, лежащих в двух плоскостях α и β, проходящих через точку A на одинаковом расстоянии d от данной прямой a.

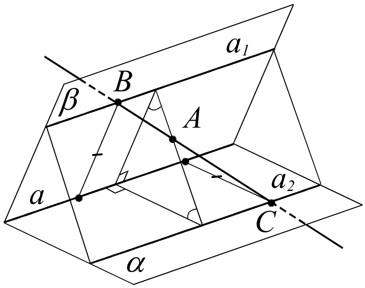


Рис. 6

5.12. Два пучка прямых с центром в точке O, лежащих в двух плоскостях α и β, перпендикулярных плоскости, образованной прямыми $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$ ($O = a_1 \cap b_1$), и проходящими через биссектрисы углов образованных прямыми a_1 и b_1. **5.13. а)** Сфера, диаметром которой является данный отрезок; **б)** окружность, расположенная на плоскости α и имеющая радиус $R=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2-OO_1^2}$, где точка $O-$ середина отрезка AB, O_1- ортогональная проекция точки O на плоскость α. **5.14.** Внутренность шара, ограниченного данной сферой. **5.15.** Пусть $B-$ проекция точки A на прямую l. Искомое ГМТ – пересечение сферы, построенной на AB как на диаметре с плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l. **5.16.** Если прямые параллельны или совпадают, то искомое ГМТ – две параллельные плоскости. Если они не параллельны, то искомое ГМТ – бесконечная цилиндрическая поверхность с прямоугольным сечением, ось которой перпендикулярна каждой из прямых и проходит через точку O. Диагонали прямоугольника, являющегося сечением поверхности, равны $2l$, где $l-$ постоянная величина из условия. **5.17.** Пусть R и $r-$ радиусы данных сфер $(R>r)$, а точки A и $B-$ их центры, $AB=a$. Пусть точка N на отрезке AB взята так, что $AN=(R^2-r^2+a^2)/2a$. Тогда искомое ГМТ – кольцо, лежащее в плоскости, перпендикулярной AB и проходящей через точку N. Центры окружностей этого кольца совпадают с точкой N. **5.18.** Две окружности на данной сфере, пересекающиеся в точках A и B. Точки A и B исключаются. **5.19.** Пусть $H-$ точка пересечения высот треугольника ABC и $L-$ основание высоты, опущенной из точки A на BC. Искомое ГМТ – построенная на отрезке HL как на диаметре окружность, плоскость которой перпендикулярна плоскости ABC. **5.20.** Пусть $D-$ точка симметричная C относительно середины отрезка AB. Если угол C тупой, то искомое ГМТ – пусто. Если угол C острый, то искомое ГМТ – сфера с центром в точке D и радиусом $\sqrt{(CD^2-AB^2)/2}$. **5.21.** Эти плоскости высекают на плоскости α треугольник. На этой плоскости надо взять центр описанной и центры вневписанных окружностей около этого треугольника. Искомое ГМТ – четыре прямых, перпендикулярных плоскости α, каждая из которых проходит через одну из указанных точек. **5.22.** Пусть k и $l-$данные прямые, и $A\in k$. Пусть $B-$ точка пересечения прямой l с плоскостью α, проходящей через точку A и перпендикулярной l. Искомое ГМТ – окружность, построенная на диаметре AB в плоскости α. **5.23.** Искомое ГМТ – цилиндр, диаметрально противоположными образующими которого являются прямая l и прямая k, проходящая через точку A параллельно l. Прямые k и l следует исключить. **5.24.** Через каждую из вершин данного треугольника ABC следует провести две прямые, перпендикулярные сторонам, содержащим эту вершину. Искомое ГМТ – внутренность шестиугольника, ограниченного этими прямыми. **5.25.** Две плоскости, каждая из которых проходит через одну из биссектрис углов, образованных данными прямыми в плоскости, их содержащей и перпендикулярных последней. **5.26.** Искомое ГМТ – часть сферы радиуса $\sqrt{2}R$ с центром в начале координат, ограниченной плоскостями $x = R,\ \ y = R,\ \ z = R$. **5.27.** Пусть P и $Q-$ точки пересечения продолжений противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. Искомое ГМТ – сфера с диаметром PQ. Точки ее, лежащие в плоскости четырехугольника, следует исключить. **5.28.** Пусть K и $L-$ точки пересечения продолжений диагоналей AC и BD с прямой PQ. Искомое ГМТ – сфера с диаметром KL. Точки ее, лежащие в плоскости четырехугольника, следует исключить. **5.29.** Пусть $O-$ центр окружности, вписанной в какое-либо осевое сечение конуса. Искомое ГМТ – боковая поверхность конуса с вершиной O и образующей OA, где $A-$ какая-нибудь точка на окружности основания исходного конуса. **5.30. а)** Внутренность шара, ограниченного данной сферой; **б)** все пространство. **5.31. а)** и **б)** Внутренность данного трехгранного угла.

§6. Призма

6.1. а) 7; **б)** 14; **в)** 52. **6.2. а)** 7. **6.3.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **6.4.** $120°$. **6.5.** $3d^3\sqrt{3}$. **6.6.** $1/\sqrt{3}$. ***Указание.*** Воспользуйтесь результатом задачи 1.34. **6.7. а)** 1:5; **б)** 7:5; **в)** $\dfrac{\sqrt{41}}{6}a^2$. ***Указание.*** Вычислите длины сторон и одной из диагоналей сечения. **6.8.** $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$. **6.9.** $\arccos\big(\operatorname{tg}(\alpha/2)\big)$. **6.10.** $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **6.11.** $2m\sin\alpha\cdot\sqrt{m^2\cos^2\alpha+2S}$. **6.12. а)** $\dfrac{3a^2}{2\sqrt{2}}$;

б) $\frac{\sqrt{38}a^2}{6}$. **6.13.** $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$. **6.14.** $\frac{a^2}{2b}\sqrt{2a^2+b^2}$. **6.15. б)** $n(n-3)$.

6.16. $2\sqrt{P^2+Q^2}$. **6.17. а)** $\frac{3d^3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}$; **б)** $3a^2$. **6.18..** $\arccos\frac{1}{4}$.

6.19. а) $6\sqrt{3}h^2\operatorname{ctg}\alpha$; **б)** $\frac{d^3}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta$. **6.20. а)** $6\sqrt{21}$;

б) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{Q^3}\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{\cos\varphi}$. **6.21.** $\frac{ab\sin\alpha}{\cos\beta}$. **6.23. б)** 60; **в)** $abc\sin\alpha$.

6.24. а) 432 *см*^{2}; **б)** $36(3+\sqrt{3})$ *см*^{2}; **в)** $160\sqrt{3}$ *см*^{2}.

6.25. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$, где $45° < \alpha < 135°$. **6.26.** $\frac{b^3}{\sqrt{2}}$. **6.27. а)** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$;

б) $2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$. **6.28.** $\frac{1}{2}SH$. **6.29.** $\frac{1}{3}$.

6.30. $2abc\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}}$.

6.31. а) $3\sqrt{15}$ и $6\sqrt{15}$; **б)** $9\sqrt{2}$ и 9.

§7. Пирамида

7.1. а) $\arccos\frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2}$; **б)** $\pi-\arccos\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **7.2.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **7.3. а)** 24;

б) 6. **7.4. а)** $\frac{3ah}{\sqrt{a^2+12h^2}}$; **б)** $\frac{2ah}{\sqrt{4h^2+a^2}}$. **7.5. а)** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; **б)**

$\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **7.6.** $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **7.8.** $\frac{na^2}{24}\frac{\cos(\pi/n)}{\sin^2(\pi/n)}\sqrt{4b^2\sin^2\frac{\pi}{n}-a^2}$.

7.9. а) $\sin\alpha=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$; **б)** $\cos\alpha=\frac{\sin(\gamma/2)}{\sin(\pi/n)}$; **в)** $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta\cos\frac{\pi}{n}$,

$(\alpha<\beta)$; **г)** $\cos\beta=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$; **д)** $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{2}\cos(\varphi/2)}{\sqrt{-\cos\varphi-\cos(2\pi/n)}}$; **е)**

$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\gamma/2)}$. **7.10. а)** $\frac{na^3\cdot \mathrm{tg}\alpha\cdot \mathrm{ctg}(\pi/n)}{24\sin(\pi/n)}$; **б)** $\frac{na^3}{24}\cdot \mathrm{tg}\beta\cdot \mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{n}$;
в) $\frac{na^3\mathrm{ctg}(\pi/n)\sqrt{-\cos\gamma-\cos(2\pi/n)}}{24\sqrt{2}\sin(\pi/n)\cdot\sin(\gamma/2)}$; **г)** $\frac{\sqrt{2}na^3\mathrm{ctg}^2(\pi/n)\cos(\varphi/2)}{24\sqrt{-\cos\varphi-\cos(2\pi/n)}}$.

7.11. а) $\frac{na^2\mathrm{ctg}(\pi/n)}{4\cos\beta}$; **б)** $\frac{na^2\mathrm{ctg}(\gamma/2)}{4}$; **в)** $\frac{na^2\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\cos^2(\pi/n)}}{4\sin(\pi/n)}$;
г) $\frac{\sqrt{2}\,na^2\cos(\pi/n)}{4\sqrt{-\cos\varphi-\cos(2\pi/n)}}$. **7.12.** $2\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{k}\right)$. **7.13.** $\frac{2{,}25\cdot p^3q^3}{(p^2-q^2)\sqrt{4p^2-q^2}}$. **7.14.** $\frac{4h^2\sqrt{-\cos\varphi}}{1+\cos\varphi}$. **7.15. а)** 2:1; **б)** 3:13. **7.16.** $\frac{5\sqrt{2}}{16}ab$. **7.17. а)** $\frac{21\sqrt{15}}{10}$; **б)** $5\sqrt{3}$. **7.18. а)** 48; **б)** $30\sqrt{3}$. **7.19. а)** $\frac{34}{3}$; **б)** $22\frac{15}{16}$. **7.20. а)** В kmn. **7.21.** $\frac{abc}{ab+bc+ac}$. **7.22. а)** $\frac{4}{3}$; **б)** $\frac{SL}{LC}=\frac{2}{5}$.
7.23. а) $\frac{1}{2}(ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2})$; **б)** $21\sqrt{55}\quad см^2$; **в)** $\frac{a^2(\sqrt{7}+6)}{2}$. **7.24. а)** $\frac{1}{6}abc$; **б)** $\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$; **в)** $\frac{abc\sqrt{2}}{3}$. **7.25.** $\frac{3}{\sqrt{10}}$.
7.26. $\mathrm{arctg}\sqrt{5}$. **7.27.** 16. **7.28. а)** 324; **б)** 2. **7.29. а)** $\frac{5}{6}a^3$; **б)** 19:197; **в)** $\frac{h}{6}\left(2ab+2a_1b_1+a_1b+ab_1\right)$. ***Указание.*** Разбейте фигуру на пирамиды.
7.30. а) $\sqrt{7}$; **б)** $\frac{9\sqrt{51}}{4}$. **7.31. а)** 8; **б)** $\frac{2\sqrt{34}}{7}$. **7.32. а)** $\frac{4\sqrt{34}}{3}$; **б)** $\frac{5+2\sqrt{6}}{4}$. **7.33. а)** 108; **б)** 32. **7.34. а)** $\sqrt{\frac{3c^2-(b-a)^2}{3}}$; **б)**

$\sqrt{\dfrac{3h^2+(b-a)^2}{3}}$. **7.35. а)** $\dfrac{a^3-b^3}{6}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$; **б)** $V=\dfrac{a^3-b^3}{3\sqrt{2}}\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $\varphi=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha)$. **7.36. а)** $\dfrac{a^3-b^3}{12}\cdot\operatorname{tg}\alpha$; **б)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{\cos\alpha}+a^2+b^2\right)$. **7.37.** ***Решение.*** По трем данным плоским углам можно построить трехгранный угол, если $0<\alpha<\beta+\gamma,\ 0<\beta<\alpha+\gamma,\quad 0<\gamma<\alpha+\beta,\quad 0<\alpha+\beta+\gamma<\pi$. Для вычисления двугранных углов достаточно воспользоваться теоремой косинусов: $\cos\varphi_A=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$; $\cos\varphi_B=\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$; $\cos\varphi_C=\dfrac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$. Решением задачи будут являться значения φ_A,φ_B и φ_C, удовлетворяющие системе неравенств: $0<\varphi_A<\pi$, $0<\varphi_B<\pi,\ 0<\varphi_C<\pi,\ \varphi_A+\varphi_B+\varphi_C>\pi$. **7.38.** ***Решение.*** Пусть даны три двугранных угла $\varphi_A,\varphi_B,\varphi_C$. Задача о нахождении плоских углов α,β,γ трехгранного угла решается с использованием формул: $\cos\alpha=\dfrac{\cos\varphi_A+\cos\varphi_B\cos\varphi_C}{\sin\varphi_B\sin\varphi_C}$; $\cos\beta=\dfrac{\cos\varphi_B+\cos\varphi_A\cos\varphi_C}{\sin\varphi_A\sin\varphi_C}$; $\cos\gamma=\dfrac{\cos\varphi_C+\cos\varphi_A\cos\varphi_B}{\sin\varphi_A\sin\varphi_B}$. Задача имеет решение и притом единственное, если $\pi<\varphi_A+\varphi_B+\varphi_C<3\pi$. Полученные значения углов α,β,γ должны удовлетворять условиям: $0<\alpha<\beta+\gamma,\ 0<\beta<\alpha+\gamma$, $0<\gamma<\alpha+\beta,\ 0<\alpha+\beta+\gamma<\pi$. **7.39.** ***Решение.*** Третий плоский угол находится из формулы (теорема «косинусов»): $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\varphi_C$. Два остальных двугранных угла φ_B и φ_C можно найти из формул: $\cos\varphi_B=\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$ и

$\cos\varphi_C = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$. **7.40.** ***Указание.*** Задача решается аналогично предыдущей. **7.41.** ***Решение.*** Угол φ_B находим из теоремы «синусов» для трехгранного угла $\sin\varphi_B = \sin\varphi_A \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Далее задача решается с использованием формул: $\cos\alpha = \dfrac{\cos\varphi_A + \cos\varphi_B\cos\varphi_C}{\sin\varphi_B\sin\varphi_C}$; $\cos\beta = \dfrac{\cos\varphi_B + \cos\varphi_A\cos\varphi_C}{\sin\varphi_A\sin\varphi_C}$; $\cos\gamma = \dfrac{\cos\varphi_C + \cos\varphi_A\cos\varphi_B}{\sin\varphi_A\sin\varphi_B}$. **7.42.** $\arccos(-\cos^2\alpha)$. **7.43.** $\arccos\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin(\alpha/2)}\right)$. **7.45.** Тупой. **7.47.** Не существует, так как каждый его плоский угол меньше суммы двух других плоских углов; в частности, должно быть $3\alpha < \alpha + 2\alpha$, что не выполняется. **7.49.** $\dfrac{\cos\alpha - \sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}$. **7.50.** $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$.

§8. Круглые тела (цилиндр и конус)

8.1. а) 10; **б)** 8. **8.2. а)** 48; **б)** 125π. **8.3. б)** Задача имеет решение, если $2R > H$. Сторона квадрата равна H или $\sqrt{2R^2 + \dfrac{H^2}{2}}$. **8.4.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **8.5.** $\pi R^3(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha)$. **8.6.** $\sqrt{14}$. **8.7.** $\dfrac{h}{2}\dfrac{\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$. **8.8. а)** 63; **б)** 4. **8.9. а)** $\arccos\dfrac{7}{\sqrt{130}}$; **б)** $\dfrac{23}{41}$. **8.10.** $\pi - \arccos\dfrac{1}{26}$. **8.11. а)** 2π; **б)** $-\dfrac{1}{3}$. **8.13.** $\arcsin\left(\dfrac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3}}\right) \pm \alpha$. **8.14.** $\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$. **8.15. а)** $60°$; **б)** $2\arcsin\dfrac{\alpha}{2\pi}$. **8.16.** $2\mathrm{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **8.17. а)** $150°$; **б)** если $2\alpha \le \dfrac{\pi}{2}$, то наибольшая площадь равна $0{,}5l^2\sin 2\alpha$; если $2\alpha > \pi/2$, то наибольшую площадь, равную $l^2/2$ имеет сечение плоскостью, составляющей с осью угол, равный $\arccos(\sqrt{2}\cos\alpha)$. **8.18.** $\frac{2}{27}\pi L^3\sqrt{3}$. **8.19. а)** 24; **б)** $2\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$. **8.20. а)** $12\sqrt{41}$; **б)** $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$. **8.21.** $\frac{2V}{\pi}\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **8.22. а)** $\frac{RH\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$; **б)** $\frac{9}{8}\pi a^3$. **8.23.** $\frac{32}{15}a^3$. **8.24.** $\arccos\frac{R}{h}$. **8.25.** $\frac{2}{3}\pi$. **8.26.** $\arcsin\left(\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)}\right)$. **8.27. а)** $2\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$, если $2\alpha>\frac{\pi}{2}$; **б)** $2\operatorname{arctg}\sin\alpha$. **8.28.** $\frac{\pi}{3}$. **8.29.** $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.30. а)** $\frac{7\sqrt{2}\pi d^3}{3}$; **б)** $4\sqrt{5}\pi d^3$. **8.31. а)** $\frac{4V}{9}$; **б)** $\frac{V_1\cdot V_2}{\left(\sqrt{V_1}+\sqrt{V_2}\right)^2}$. **8.32.** $\frac{7\pi}{4}$. **8.33.** $6\sqrt{7}$. **8.34.** $16\sqrt{3}r^3$. **8.35.** $\frac{11\pi R^2}{4}$. **8.37. а)** $\frac{18}{(\sqrt{3}+2)^3}$; **б)** $V\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **8.38. а)** $V\cdot\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$; **б)** $\frac{19V}{27}$. **8.39.** 1:3 или $\frac{5+2\sqrt{5}}{5}$. ***Указание.*** Пусть $R-$ радиус основания конуса, $r-$ цилиндра. Тогда, задача сводится к решению уравнения $r^3-r^2R+R^3/8=0$. Положительные корни этого уравнения $r_1=\frac{R}{2}$ и $r_2=\frac{R(1+\sqrt{5})}{4}$. **8.40. а)** $16{,}6\pi$; **б)** $4\pi Q$. **8.41. а)** $\frac{2}{3}\pi b^3\sin^2 2\alpha$; **б)** $\frac{2}{3}\pi b^3\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$; **в)** $2\pi a^3\sin\beta\sin(\beta/2)$.

§9. Круглые тела (сфера и шар)

9.1. а) 10; **б)** 12. **9.3. а)** $r=\sqrt{\frac{R^2}{2}+\frac{a^2}{8}}$. **9.4. а)** $\frac{125}{8}$; **б)** 176. **9.5. а)** $R=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$; **б)** $R\sqrt{(10+4\sqrt{2})/17}-$ радиус большего сечения. ***Ука-***

зание. Учтите расположение центра шара и меньшего сечения относительно большего сечения. **9.6. а)** $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{12}}$; **б)** $\sqrt{R^2-\frac{3a^2}{4}}$. **9.7. б)** $\pi R\sqrt{3}$. **9.9. а)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; **б)** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **9.10. а)** $AB=2R\sqrt{\sin\varphi}$. ***Указание.*** Опустите из точки B перпендикуляр на α; **б)** $\frac{2R\sqrt{l^2-R^2}}{l}\cdot\sin\frac{\pi}{n}$. **9.11. а)** $\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$; **б)** $2\sqrt{R_1R_2}$; **в)** $\frac{R_1R_2}{\left(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\right)^2}$. **9.12. а)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$; **б)** $\frac{ab}{2c}$, $\frac{bc}{2a}$, $\frac{ac}{2b}$. **9.13. а)** $\frac{R}{3}$; **б)** $\frac{5R}{3}$. **9.14.** $\frac{R}{2}$ или $\frac{3R}{2}$. ***Указание.*** Проекция прямой a на плоскость α содержит среднюю линию треугольника с вершинами в точках касания шаров плоскости. **9.15. а)** $2\arcsin\frac{1-m}{\sqrt{m^2+2m}}$, $\frac{1}{4}<m<1$; **б)** $r=R\cdot\frac{1+\sin^2\alpha\pm\sqrt{3\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}}{\cos^2\alpha}$. **9.16.а)** $\arccos\frac{5}{18}$; **б)** $\arcsin\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{6}}$. **9.17.а)** $\arcsin\left(\frac{|R_1-R_2|}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{\sin(\alpha/2)}\right)$; **б)** $1:\mathrm{tg}^2\alpha:1$. **9.18.** $R(2\pm\sqrt{3})$. **9.19.** $R\cdot\frac{\sqrt{6}\pm 2}{2}$. **9.23. а)** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; **б)** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **9.24. а)** $288\sqrt{3}$; **б)** $\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$. ***Указание.*** Используйте результат задачи 9.23а. **9.25. а)** $\frac{a}{2}\cdot\frac{\mathrm{tg}(\varphi/2)}{\mathrm{tg}(\pi/n)}$; **б)** $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{\sqrt{3}a+3b}$. **9.26.** $\frac{4\sqrt{14}}{7}R$. **9.27. а)** $\frac{a}{2\sin 2\alpha\cdot\sin(\pi/n)}$; **б)** $\frac{h^2+a^2}{2h}$. **9.28. а)** $45°$; **б)** $30°$. **9.29. а)** 5. ***Указание.*** Докажите, что центр шара лежит на отрезке, соединяющем середины сторон длины 6 и 8; **б)** $a\sqrt{7}/3$. **9.30.** $R\sqrt{6}$.

9.31. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. **9.32.а)** $\frac{8b\sin^2\beta\,\mathrm{arctg}(\cos\beta)}{\sqrt{1+\cos^2\beta}}$;

б) $a\sqrt{3}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{3}\cos\alpha)$. **9.35.** $R=\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$. **9.36.** ***Указание.*** Воспользуйтесь формулой $R=\frac{3V}{S}$. **9.37.** $a\left(1\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. ***Указание.*** Воспользуйтесь тем, что сумма длин верхнего и нижнего основания пирамиды равна $2a$. **9.38. а)** $\frac{124\sqrt{6}R^3}{375}$; **б)** $\frac{12a^2}{5}$. **9.39. а)** $\frac{88R^3}{9}$; **б)** $14a^2(4-\sqrt{7})/9$. **9.40. в)** ***Указание.*** Точки касания сферы с боковыми гранями призмы принадлежат перпендикулярному сечению, проведенному через центр сферы. **9.41. а)** $2\sqrt{R^2-a^2/3}$; **б)** $2\sqrt{R^2-a^2/2}$; **в)** $2\sqrt{R^2-a^2}$. **9.42. а)** $12\sqrt{2}$; **б)** 320. **9.43 а)** 288; **б)** $24\sqrt{3}$. **9.44.** 1. **9.45 а)** 5:1. ***Указание.*** Смотри задачу 1.41.а. **б)** $\frac{16\pi}{27}$. ***Указание.*** Докажите, что призма правильная. **9.46.** $a(2-\sqrt{3})/2$.

9.47. а) $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}a=\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\mathrm{ctg}(0,5\cdot\mathrm{arctg}(\sqrt{2}/4))}$; **б)** $\frac{3-3\sqrt{3}}{3}b=$ $=\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\mathrm{ctg}(0,5\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{2})}$. **9.48.** $R\sqrt{\frac{2}{3}}$. **9.49.а)** $r(1+\sqrt{2})$; **б)** $\frac{(\sqrt{21}-3)R}{4}$. **9.50. а)** $\frac{28R^3}{9}$; **б)** $6a^2$. **9.51. а)** $\frac{1}{24}\pi h^3\cdot\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{\sin^6(\alpha/2)}$; **б)** $\frac{2\pi}{9}$. **9.52. а)** 64; **б)** $\pi h\sqrt{2R(2R-h)}$. **9.53. а)** $\frac{9}{16}$; **б)** 2. **9.54. а)** $S_{бок.}=\frac{\pi l^2}{3}$, $R=\frac{3l}{4\sqrt{2}}$; **б)** $l\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. **9.55. а)** $30°$; **б)**

$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^3}{\cos^5\alpha\cdot\sin\alpha}}$. **9.56. а)** $4:21$; **б)** $16:9$. **9.57. а)** $\frac{1}{3}\pi a^3\mathrm{ctg}^3\alpha(1+\cos\alpha)^3$; **б)** $\frac{\pi}{24}\left(\sqrt{2d_2^2+2d_1^2}+d_2-d_1\right)^3\left(\frac{d_2-d_1}{d_2+d_1}\right)^2$.

9.58. $12\pi r^3$. **9.59. а)** $\frac{5R}{\sqrt{3}}$; **б)** $\frac{2\sqrt{3}(k-1)-\sqrt{9k^2-18k+12}}{3(k-2)}\cdot R$ при $k\neq 2$ и $\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot R$ при $k=2$. **9.60. а)** $R\left(1+\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; **б)** $\frac{\pi R^3(1+2\sqrt{2})^3}{3}$. **9.61. а)** $R\cdot\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$; **б)** $\frac{2R\cdot(3+\sqrt{3}+\sqrt{9+6\sqrt{3}})}{3}$; **в)** $(6+3\sqrt{2})\cdot V$. **9.62.** $\frac{4(\mathrm{tg}^{15}\alpha+\mathrm{tg}^9\alpha+\mathrm{tg}^3\alpha)}{\mathrm{tg}\alpha}$. **9.63.** $\frac{2r}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$.

9.64. а) $R\cdot\mathrm{tg}(\alpha/2)$, $R\mathrm{ctg}(\alpha/2)$, $2R/\sin\alpha$; **б)** $\arcsin\sqrt{s/S}$. **9.65. а)** $\frac{2}{3}\pi R(a^2-R^2)$; **б)** $\frac{r^2+rr_1+r_1^2}{2rr_1}$; **в)** $\arccos\sqrt{\frac{4V-2\pi R^3}{3V+2\pi R^3}}$. **9.66.** В 5,5.

9.67. а) $\frac{5}{12}\pi R^3$; **б)** πR^2. **9.68.** $\frac{13}{48}\pi a^3$. **9.69.** 1:1:1.

9.70. $\frac{2\pi R^2(H-R)^2}{H^2+R^2}$. **9.71.** $\frac{\cos^2(\alpha/2)}{\sin(\alpha/4)\cdot\sin(3\alpha/4)}$.

9.72. $S=\pi R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}+2\right)$, $V=\frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

9.73. а) $\frac{6\sqrt{3}+4\pi}{27}\cdot a^3$; **б)** $\frac{\pi a^3(18\sqrt{3}-31)}{12\sqrt{2}}$. **9.74. а)** $\frac{\pi a^3(15-8\sqrt{2})}{12}$; **б)** $\frac{\pi(5\sqrt{2}-6)}{7}$. **9.75.** $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

§10. Задачи на экстремальные значения

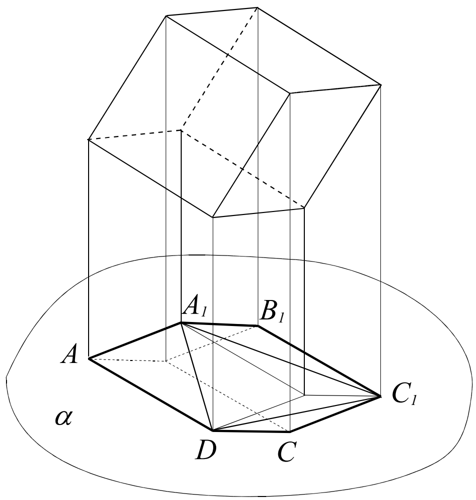


Рис. 7

10.2. а) $\sqrt{3}$. ***Указание.*** В общем случае проекцией куба на плоскость является шестиугольник. На рис. 7 площадь шестиугольника $AA_1B_1C_1CD$ в два раза больше площади треугольника A_1C_1D, являющегося проекцией равностороннего треугольника со стороной $\sqrt{2}$. Площадь его проекции максимальна, если он параллелен заданной плоскости, и равна $\sqrt{3}/2$; **б)** проекция на плоскость, параллельную двум скрещивающимся ребрам; $S_{пр.} = a^2/2$, где a – длина ребра тетраэдра. **10.3.** $\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2}$. **10.4. а)** $8\sqrt{6}$. ***Указание.*** $\cos\angle SAB \le -1/5$. Следовательно $\angle SAB > \pi/2$, $\sin\angle SAB \le \frac{2\sqrt{6}}{5}$. $V_{CSAB} \le \frac{1}{3}\cdot BC\cdot\frac{1}{2}\cdot AS\cdot AB\sin\angle SAB \le 8\sqrt{6}$; **б)** $\frac{3\sqrt{119}}{2}$. **10.5. а)** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; **б)** $3a$. **10.6. а)** $\frac{\pi}{2}$; **б)** $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **10.7.** Вершины куба, кроме концов данной диагонали. **10.8.** $\frac{a(4b^2-a^2)}{12}$. **10.9. а)** $\frac{a^3}{6}$; **б)** $\sqrt[3]{4V}$. **10.10.** $\frac{d\sqrt{3}}{3}$. **10.11.** $\frac{a}{6}$. **10.12. а)** π; **б)** 32π; **в)** 8π. **10.13. а)** 24π; **б)** 27π; **в)** 2π. **10.14. а)** $\frac{\pi}{2}$; **б)** $3\sqrt{3}$; **в)** 6. **10.15.** $\frac{R}{\sqrt{3}}$.

10.16. а) $\dfrac{256\pi}{75\sqrt{5}}$; **б)** 4π. **10.17. а)** $\dfrac{4}{27}\pi HR^2$; **б)** $\dfrac{4R}{3}$. **10.18.** $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. **10.19. а)** $\sqrt{3}(1+\sqrt{2})R^2$; **б)** $\dfrac{2\pi\sqrt{2}R^2}{3}$.

§11. Элементы аналитической геометрии и векторной алгебры в пространстве. Метод координат в пространстве

11.1. а) $-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$; **б)** $-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$. **11.2. а)** $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$, $-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$; **б)** $-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$. **11.3. а)** $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; **б)** $-\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$. **11.4. а)** $\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$, $\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$; **б)** $\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. **11.5.** ***Указание:*** докажите, что $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{DD_1}$. **11.7. а)** $(5;-2;-4)$; **б)** (8;11;23), (0;1;11). **11.8.** $\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$. **11.9. а)** $(2;1;2)$; **б)** $(3;2{,}5;2)$. **11.10. а)** $\alpha_1=5$, $\beta_1=4$ или $\alpha_2=-5$, $\beta_2=-4$; **б)** – 6. **11.11. а)** $2a$; **б)** $a\sqrt{7}$. **11.12. а)** $a\sqrt{\dfrac{17}{6}}$; **б)** $a\sqrt{10}$. **11.13. а)** $\sqrt{11}$; **б)** $3\sqrt{3}$. **11.14. а)** –5; **б)** 4; **в)** $2\sqrt{21}$; **г)** $\dfrac{20}{\sqrt{19}}$; **д)** $\dfrac{7}{2\sqrt{31}}$. **11.15. а)** $\pm\dfrac{3}{5}$. **11.16. а)** -61. ***Указание.*** Воспользуйтесь тем, что $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=0$. **б)** ***Указание.*** Запишите поочередно скалярное произведение вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ на векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$. **11.17. а)** $120°$; **б)** $1/3$. **11.18. а)** $-0{,}125$; **б)** $-1/3$ или $-23/27$. **11.19. а)**

$\sqrt{22}$; **б)** $-2,75$. **11.20. а)** $120°$; **б)** 2. **11.21. а)** $\arccos(11/14)$; **б)** $\arccos\frac{8}{9}$. **11.22. а)** $\arccos\frac{1}{4}$; **б)** $\arccos 0,9$. **11.23.** $\arccos\frac{3\cos\alpha+1}{2\cos\alpha+2}$. ***Указание.*** Отложите на лучах отрезки равной длины и рассмотрите полученную правильную пирамиду. **11.24. а)** $\arccos\frac{1}{\sqrt{30}}$;

б) $\arccos\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$. **11.25.** $\frac{BM}{MA_1}=\frac{C_1N}{NA}=\frac{3}{2}$, $MN=\frac{a}{\sqrt{5}}$. ***Указание.*** Воспользуйтесь тем, что $BA_1 \perp MN$ и $AC_1 \perp MN$. **11.26. а)** $\frac{\sqrt{13}}{3}$; **б)** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. ***Указание.*** Введите систему координат с центром в точке пересечения диагоналей основания. **11.27.** $a\sqrt{6}$. ***Указание.*** Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный параллелепипед, AC_1 – его большая диагональ. Воспользуйтесь тем, что $\vec{AC_1}=\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}$ и $|\vec{AC_1}|=\sqrt{(\vec{AC_1},\vec{AC_1})}$. **11.28. а)** $\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$; **б)** 1. **11.29. а)** $\arccos\frac{25}{\sqrt{742}}$, $\frac{\sqrt{117}}{2}$; **б)** $\frac{\sqrt{362}}{6}$. **11.30. а)** $60°$ или $120°$; **б)** $\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot(1;1;1)$. **11.31. а)** $3x-y-4z+17=0$; **б)** $3x+4y-2z-11=0$. **11.32. а)** $3x+5y-2z-29=0$; **б)** $3x-5y+2z+7=0$; **в)** $3x-5y-2z+7=0$. **11.33. а)** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{42}$; **б)** $\arccos\frac{5}{\sqrt{38}}$. **11.34. а)** $3x+y-2z-20=0$ и $3x+y-2z+8=0$; **б)** $2x+4y-4z+5=0$. **11.35. б)** $\frac{5}{3}$. **11.36. а)** $\frac{1}{2\sqrt{14}}$; **б)** $\frac{5}{\sqrt{13}}$. **11.37.** $(1;0;0)$, $\left(-\frac{5}{3};0;0\right)$.

11.38. $\frac{40}{\sqrt{762}}$. **11.39. а)** $\frac{6}{7}$; **б)** $\arccos\frac{6}{7}$; **в)** $\arcsin\frac{12}{7\sqrt{41}}$. **11.40. а)** $\frac{48}{\sqrt{401}}$; **б)** $\arccos\frac{9}{\sqrt{401}}$; **в)** $\arcsin\frac{9}{\sqrt{218}}$.

11.41. а) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{9}$; $3\ x=1+t,\quad y=3+2t,\quad z=-2+9t$; **б)** $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+5}{-2}$. **11.42.** $\arccos\sqrt{\frac{6}{17}}$. **11.43. а)** $\sqrt{\frac{138}{7}}$; **б)** $\frac{\sqrt{110}}{\sqrt{21}}$.

11.44. а) $\sqrt{\frac{86}{29}}$; **б)** 3. **11.45. а)** $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{-5}$;

б) $x-y+2z-3=0$. **11.46. а)** $17x+6y-8z+1=0$;

б) $4x-9y-z-8=0$. **11.47. а)** $(-2;1;4)$; **б)** $(5;9;-10)$;

в) $\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{-2}$. **11.48. а)** $(-1;4;4)$; **б)** $(-4;2;5)$. **11.50. а)** $x+8y-5z-12=0$; **б)** $2x+2y-z-10=0$, $2x+2y-z+20=0$.

11.51. а) 1:1; **б)** $\frac{\sqrt{38}}{6}$. **11.52.** $\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=R$. **11.53. а)** $(x-0,5)^2+(y-1,5)^2+(z-3)^2=8,5$; **б)** $(x-1)^2+(y+2)^2+$ $+(z-3)^2=38$. **11.54. а)** $(x+3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\frac{25}{22}$;

б) $(x-5)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=36,\ (x+3)^2+(y-3)^2+(z-6)^2=36$.

11.55. а) $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=24$,

$(x-5)^2+(y-1)^2+(z+7)^2=24$; **б)** $(x-1)^2+(y+8)^2+(z-9)^2=76$, $(x-1)^2+(y+8)^2+(z-9)^2=304$. **11.56. а)** $\frac{\sqrt{371}}{28}$; **б)** $\frac{a\sqrt{41}}{8}$.

11.57. $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$. **11.58. а)** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$.

Содержание