

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

21 Решите уравнение $(x-1)(x^2+6x+9)=5(x+3)$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$(x-1)(x+3)^2=5(x+3); (x+3)((x-1)(x+3)-5)=0; (x+3)(x^2+2x-8)=0,$$

откуда $x=-3$, $x=-4$ или $x=2$.

Ответ: -4 ; -3 ; 2 .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

22 Первый рабочий за час делает на 5 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 200 деталей, на 2 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Решение.

Пусть второй рабочий делает за час x деталей, тогда первый рабочий делает за час $x+5$ деталей. Получаем уравнение:

$$\frac{200}{x} = \frac{200}{x+5} + 2; 200x + 1000 = 200x + 2x^2 + 10x; x^2 + 5x - 500 = 0,$$

откуда $x = 20$.

Ответ: 20.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	Максимальный балл

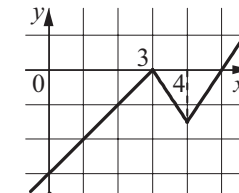
23 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x-3, & \text{если } x < 3, \\ -1,5x+4,5, & \text{если } 3 \leq x \leq 4, \\ 1,5x-7,5, & \text{если } x > 4, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = x - 3$ при $x < 3$, график функции $y = -1,5x + 4,5$ при $3 \leq x \leq 4$ и график функции $y = 1,5x - 7,5$ при $x > 4$.



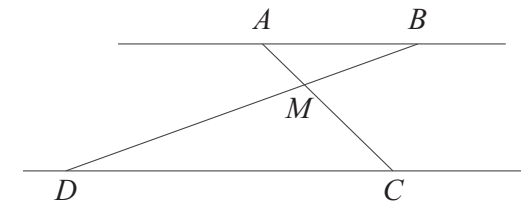
Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = -1,5$ и при $m = 0$.

Ответ: $-1,5$; 0 .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	Максимальный балл

24 Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 18$, $DC = 54$, $AC = 48$.

Решение.



Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие, углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

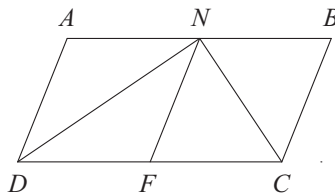
$$AC = AM + MC = \frac{1}{3}MC + MC = \frac{4}{3}MC, \text{ откуда } MC = \frac{3AC}{4} = 36.$$

Ответ: 36.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

- 25 Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC . Точка N — середина стороны AB . Докажите, что CN — биссектриса угла BCD .

Доказательство.



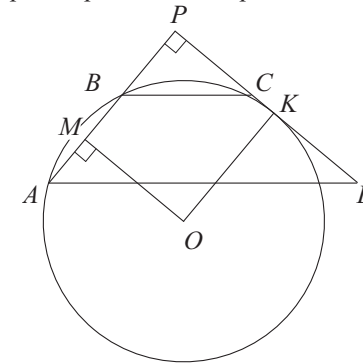
Проведём FN параллельно BC (см. рис.). Тогда $AD = AN = NB$. Следовательно, параллелограмм $BCFN$ является ромбом. Диагональ CN ромба $BCFN$ является биссектрисой угла BCD .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	Максимальный балл

- 26 В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 45 и 15, а сумма углов при основании AD равна 90° . Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD , если $AB = 9$.

Решение.

Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке P (см. рис.).



Из условия ясно, что $\angle APD = 90^\circ$. Из подобия треугольников APD и BPC получаем, что $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AD}$, то есть $\frac{BP}{BP+9} = \frac{15}{45}$, откуда $BP = 4,5$.

Пусть окружность касается прямой CD в точке K , а O — её центр. Опустим из точки O перпендикуляр OM на хорду AB . Точка M — середина AB . Так как $OMPK$ — прямоугольник, искомый радиус

$$OK = MP = BP + \frac{1}{2}AB = 4,5 + 4,5 = 9.$$

Ответ: 9.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	Максимальный балл

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

21 Решите уравнение $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$x(x+1)^2 = 2(x+1); (x+1)(x(x+1)-2) = 0; (x+1)(x^2+x-2) = 0,$$

откуда $x = -1$, $x = -2$ или $x = 1$.

Ответ: -2 ; -1 ; 1 .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

22 От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 280 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 4 часа после этого следом за ним со скоростью, на 8 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно.

Решение.

Пусть скорость первого теплохода равна v км/ч, тогда скорость второго теплохода равна $v + 8$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{280}{v} = \frac{280}{v+8} + 4; 280v + 2240 = 280v + 4v^2 + 32v; v^2 + 8v - 560 = 0,$$

откуда $v = 20$.

Ответ: 20 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	Максимальный балл

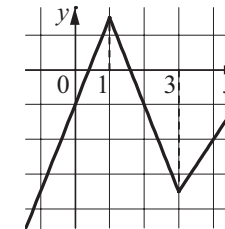
23 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2,5x - 1, & \text{если } x < 1, \\ -2,5x + 4, & \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ 1,5x - 8, & \text{если } x > 3, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = 2,5x - 1$ при $x < 1$, график функции $y = -2,5x + 4$ при $1 \leq x \leq 3$ и график функции $y = 1,5x - 8$ при $x > 3$.



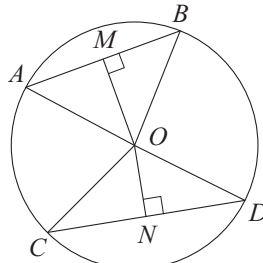
Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = -3,5$ и при $m = 1,5$.

Ответ: $-3,5$; $1,5$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	Максимальный балл

- 24** Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD , если $AB=24$, $CD=32$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 16.

Решение.



Пусть $OM=16$ и ON — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM=MB$ и $CN=ND$.

Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем

$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 20.$$

В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $CO=OB=20$, значит,

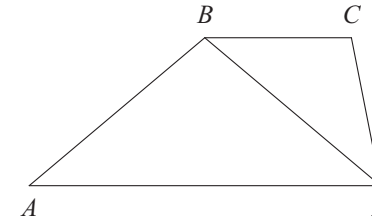
$$ON = \sqrt{OC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = 12.$$

Ответ: 12.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

- 25** Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4 и 64, $BD=16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство.



В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 4$. Поэтому указанные треугольники подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

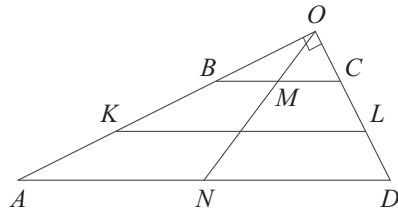
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	Максимальный балл

- 26 Углы при одном из оснований трапеции равны 77° и 13° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 10. Найдите основания трапеции.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD — большее основание, K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна $(77^\circ + 13^\circ) = 90^\circ$, так что это большее основание AD .

Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O (см. рис.). Легко видеть, что $\angle AOD = 180^\circ - (77^\circ + 13^\circ) = 90^\circ$.



Пусть N — середина основания AD . Тогда $ON = \frac{AD}{2}$ — медиана прямоугольного треугольника AOD . Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO треугольника AOD и параллельный стороне AD , она пересекает основание BC также в его середине M .

Значит, $OM = \frac{BC}{2}$. Таким образом, $MN = \frac{AD - BC}{2}$. Средняя линия KL

трапеции при этом равна $\frac{AD + BC}{2}$.

Получаем, что $AD = MN + KL = 11 + 10 = 21$; $BC = KL - MN = 11 - 10 = 1$.

Ответ: 21; 1.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	Максимальный балл

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

- 21 Решите уравнение $(x-1)(x^2 + 8x + 16) = 6(x+4)$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$(x-1)(x+4)^2 = 6(x+4); (x+4)((x-1)(x+4) - 6) = 0; (x+4)(x^2 + 3x - 10) = 0,$$

откуда $x = -4$, $x = -5$ или $x = 2$.

Ответ: -5 ; -4 ; 2 .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

- 22 Два человека одновременно отправляются из одного и того же места по одной дороге на прогулку до опушки леса, находящейся в 1,5 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,4 км/ч, а другой — со скоростью 5,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча?

Решение.

Заметим, что к моменту встречи два человека суммарно пройдут 3 км.

Значит, первый к этому моменту пройдёт $\frac{3}{2,4 + 5,6} \cdot 2,4 = 0,9$ км.

Ответ: 0,9 км.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	Максимальный балл

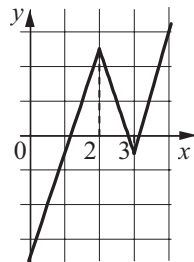
23 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 3x - 3,5, & \text{если } x < 2, \\ -3x + 8,5, & \text{если } 2 \leq x \leq 3, \\ 3,5x - 11, & \text{если } x > 3, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = 3x - 3,5$ при $x < 2$, график функции $y = -3x + 8,5$ при $2 \leq x \leq 3$ и график функции $y = 3,5x - 11$ при $x > 3$.



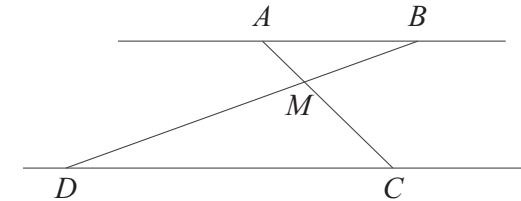
Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = -0,5$ и при $m = 2,5$.

Ответ: $-0,5; 2,5$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	Максимальный балл

24 Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 15$, $DC = 30$, $AC = 39$.

Решение.



Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие, углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{15}{30} = 0,5.$$

Следовательно,

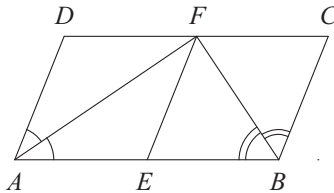
$$AC = AM + MC = 0,5MC + MC = 1,5MC, \text{ откуда } MC = \frac{AC}{1,5} = 26.$$

Ответ: 26.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

25 Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке F стороны CD . Докажите, что F — середина CD .

Доказательство.



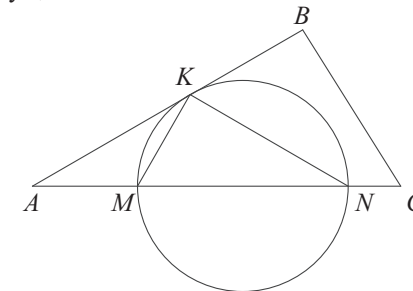
Проведём EF параллельно AD (см. рис.). Тогда в каждом из параллелограммов $ADFE$ и $FEBC$ диагональ является биссектрисой, то есть это ромбы. Значит, $DF = FE = FC$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	Максимальный балл

26 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 18 и 22 от вершины A . Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB , если $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Решение.

Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN = 18 \cdot 22 = 396$.



По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos \angle BAC = 324 + 396 - 2 \cdot 18 \cdot \sqrt{396} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 324.$$

Значит, $KM = 18$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому

$$\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC.$$

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.

Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M , N и K . По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2 \sin \angle KNM} = \frac{18}{2 \sqrt{1 - \frac{11}{36}}} = 10,8.$$

Ответ: 10,8.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	Максимальный балл

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

21 Решите уравнение $(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$(x-2)(x+1)^2=4(x+1); (x+1)((x-2)(x+1)-4)=0; (x+1)(x^2-x-6)=0,$$

откуда $x=-1$, $x=-2$ или $x=3$.

Ответ: -2 ; -1 ; 3 .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

22 Первые 300 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 300 км — со скоростью 100 км/ч, а последние 300 км — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Заметим, что всего автомобиль проехал $300+300+300=900$ км, затратив на

весь путь $\frac{300}{60} + \frac{300}{100} + \frac{300}{75} = 12$ часов. Таким образом, его средняя скорость

$$\text{равна } \frac{900}{12} = 75 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 75 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	Максимальный балл

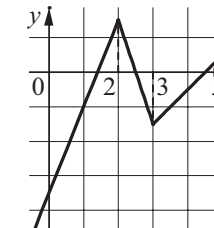
23 Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2,5x - 3,5, & \text{если } x < 2, \\ -3x + 7,5, & \text{если } 2 \leq x \leq 3, \\ x - 4,5, & \text{если } x > 3, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = 2,5x - 3,5$ при $x < 2$, график функции $y = -3x + 7,5$ при $2 \leq x \leq 3$ и график функции $y = x - 4,5$ при $x > 3$.



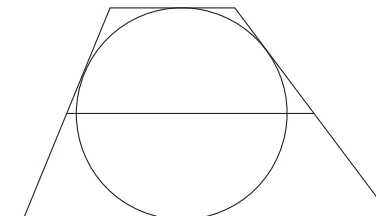
Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = -1,5$ и при $m = 1,5$.

Ответ: $-1,5$; $1,5$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	Максимальный балл

24 В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 30, вписана окружность. Найдите длину средней линии трапеции.

Решение.



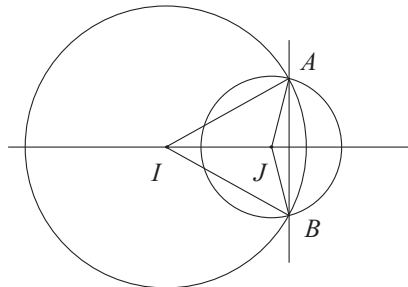
Поскольку в трапецию вписана окружность, суммы её противоположных сторон равны. Таким образом, сумма оснований трапеции равна 30, а средняя линия равна полусумме оснований, то есть 15.

Ответ: 15.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

- 25 Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B , причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB . Докажите, что $AB \perp IJ$.

Доказательство.



Точка I равноудалена от A и B , поэтому она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB . То же можно сказать и о J . Значит IJ — серединный перпендикуляр к AB , то есть $AB \perp IJ$.

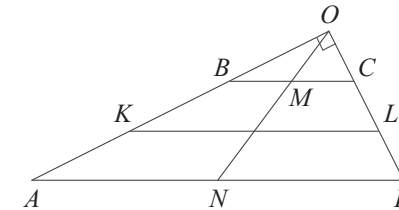
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	Максимальный балл

- 26 Углы при одном из оснований трапеции равны 50° и 40° , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 15 и 13. Найдите основания трапеции.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD — большее основание, K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна $(50^\circ + 40^\circ) = 90^\circ$, так что это большее основание AD .

Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O (см. рис.). Легко видеть, что $\angle AOD = 180^\circ - (50^\circ + 40^\circ) = 90^\circ$.



Пусть N — середина основания AD . Тогда $ON = \frac{AD}{2}$ — медиана прямо-угольного треугольника AOD . Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO треугольника AOD и параллельный стороне AD , она пересекает основание BC также в его середине M .

Значит, $OM = \frac{BC}{2}$. Таким образом, $MN = \frac{AD - BC}{2}$. Средняя линия KL трапеции при этом равна $\frac{AD + BC}{2}$.

Получаем, что $AD = MN + KL = 15 + 13 = 28$; $BC = KL - MN = 15 - 13 = 2$.

Ответ: 28; 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
3	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	Максимальный балл