ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ. 2014-2015 ГГ.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. МОСКВА.
Решения задач. Критерии проверки.

Общие положения о проверке работ

Приведённые ниже решения задач не являются единственно возможными. Участники, вероятно, найдут и другие верные решения. При проверке и оценке решения учитывается только его верность и полнота. Приведённые ниже критерии по проверке задач также носят рекомендательный характер и могут быть уточнены и дополнены школьным жюри олимпиады в соответствии с особенностями решений школьников данной школы.
Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.
Основные принципы оценивания задач приведены в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.
Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи.
Победителем в параллели считается участник, набравший наибольший суммарный балл и решивший не менее половины задач (не менее трех задач). Победителей в параллели может быть несколько. Призерами рекомендуется считать участников, решивших не менее половины задач, но набравших меньше баллов, чем победитель. Если ни один участник в данной параллели не решил более двух задач, жюри может принять решение считать призерами участников, решивших две задачи, однако победителей в этом случае не будет.

В ближайшую неделю после проверки работ и опубликования результатов рекомендуется провести с участниками олимпиады разбор решений.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос участника об изменении оценки признается обоснованным.

5 класс.

1. Впишите в каждый квадратик одну и ту же цифру, чтобы получилось верное равенство:
$\square+\square+\square+\square=\square\times\square$.

Ответ. 4+4+4+4=4×4 или 0+0+0+0=0×0.

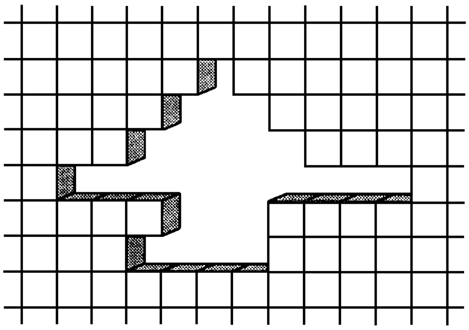
Комментарий (как можно догадаться без подбора): Сумма четырех одинаковых слагаемых – это 4 умножить на слагаемое, т.е. $\square+\square+\square+\square=4\times\square$. Поэтому вместо квадратика нужно подставить 4.

Критерии проверки.

Достаточно привести верный пример, никаких объяснений не требуется. Наличие обоснований (верных и неверных) не уменьшает и не увеличивает количество баллов.

- Правильный ответ – **7 баллов**.
- Замечено, что один из множителей справа должен быть равен 4, но примера нет – **1 балл**. (например, у ребенка может быть записано $\square+\square+\square+\square=4\times\square$)
- Неверный пример, в котором используется две цифры, при этом один из множителей справа равен 4 (например, 3+3+3+3=3×4) – **1 балл**.
- Другие неверные примеры (отличные от описанных выше) – **0 баллов**.

2. Сколько кирпичей не хватает в стене, изображённой на рисунке?



Ответ. *26.*

Комментарий.

1. Удобнее всего просто перерисовать картинку на клетчатую бумагу и посчитать клеточки:

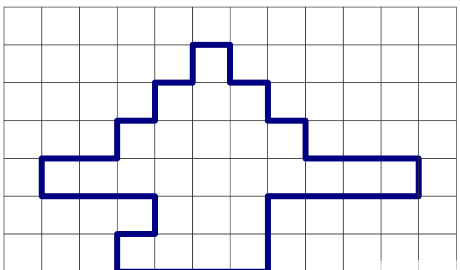


Рис.1

2. Если считать кирпичи на исходной картинке, то удобнее их считать не по горизонталям, а по вертикалям. Тогда получается (количество кирпичей в вертикалях слева направо) 1+1+3+5+6+5+2+1+1+1=26.

Критерии проверки:

- Для **7 баллов** достаточно верно указать количество кирпичей, как именно производился подсчет описывать не обязательно.

- Если ответ неправильный, а как он был найден – не описано – **0 баллов**.
- Если при подсчете в тетрадь выписана верная сумма (в сумме слагаемые дают 26) и ошибка не в подсчете клеток в фигуре или в какой-то части фигуры, а уже потом, при сложении чисел в данной сумме – **4-5 баллов.** Например, в работе написан подсчет кирпичей по горизонталям или вертикалям, т.е. есть верная сумма 1+1+3+5+6+5+2+1+1+1 или 1+3+5+10+3+4, но результат этой суммы вычислен неправильно. При этом **5 баллов** ставится, если ребенок объяснил, как именно он группирует клетки, чтобы получить нужную сумму. **4 балла** ставится, если из работы не совсем ясно, откуда берутся слагаемые в сумме.
- Если есть сумма (понятно, как ребенок группирует и считает клетки), однако он ошибается в некоторых слагаемых – **1 балл**.
- Если к работе приложено условие, в котором «дырка» <u>верно</u> разлинована на «клеточки», но подсчета нет или он неверный (при этом в тетрадь данная картинка не перерисовывалась) – **1 балл**.
- В тетради ученика <u>верно</u> перерисованы границы фигуры на клетчатую бумагу (т.е. в тетради есть рис.1), при этом ответ неверный – от **1 до 3 баллов** (3 балла, если данный ответ отличается от правильного на 1).
- В тетради ребенка есть попытка перерисовать границы фигуры на клетчатую бумагу, но перерисовано с небольшой ошибкой, для перерисованной фигуры подсчет произведён верно – **1-2 балла** (2 балла, если ошибка при перерисовке всего в 1 клеточку).

3. Жучка тяжелее кошки в 3 раза, мышка легче кошки в 10 раз, репка тяжелее мышки в 60 раз. Во сколько раз репка тяжелее Жучки? Ответ обоснуйте.

<u>*Ответ.*</u> В 2 раза.

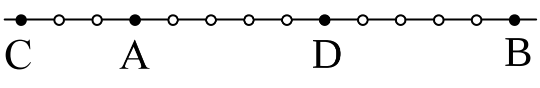
<u>*Решение*</u>. Кошка=10 мышек, репка = 60 мышек. Значит репка в 6 раз тяжелее кошки. Т.е. репка = 6 кошек. По условию Жучка = 3 кошки. Поэтому репка в 2 раза тяжелее Жучки.

<u>Критерии проверки</u>.

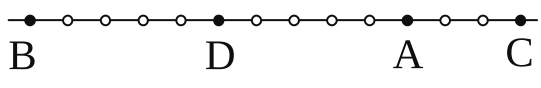
- Верное решение – **7 баллов**.
- Правильный ответ, пояснения частично присутствуют (какие-то из соотношений найдены), но полного обоснования нет – **3 балла**.
- Правильный ответ без пояснений, как он получен – **2 балла**.
- Есть частичные продвижения, например, найдено, что репка в 6 раз тяжелее кошки – **до 2 баллов.**

4. Отметьте на одной прямой четыре точки A, B, C, D так, чтобы расстояние между точками A и B было равно 10 см, между A и C – 3 см, между B и D – 5 см, а между D и C – 8 см.

<u>*Ответ.*</u> *см. рисунок.*



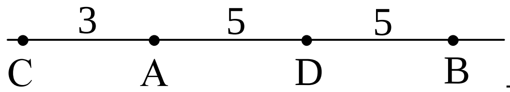
или



<u>Критерии проверки</u>.

- Правильный пример на клетчатой бумаге (объяснений как он найден не требуется) – **7 баллов**.

- Правильный пример, в котором расстояния между точками в два раза меньше требуемого (т.е. расстояния измерялись не в сантиметрах, а в клеточках) **– 6 баллов**.
- Пример, в котором на прямой точки отмечены в правильном порядке и числами указаны расстояния между соседними точками, т.е. ответ примерно в таком виде



– 6 баллов.

- На прямой отмечены точки в правильном порядке (т.е. точки следуют в порядке C, A, D, B или B, D, A, C), но при этом расстояния межу соседними точками не указаны и где-то не соответствуют требуемому **– 4 балла**.
- Отмеченные точки идут в неправильном порядке, только три из указанных в условии четырёх расстояний ему удовлетворяют **– 1 балл**.
- Отмеченные точки идут в неправильном порядке, удовлетворяют условию два или меньше из данных четырёх расстояний **– 0 баллов**.

5. Каждому из двух муравьёв, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза, из точки A (где они сейчас находятся) в точку B, расстояние между которыми равно 15 метров. Толстый муравей ходит со скоростью 3 м/мин, но может унести 5 г груза, Тонкий – со скоростью 5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них быстрее доставит весь свой груз в точку B? Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза.

Ответ. Толстый справится на 2 мин раньше.

Решение. Чтобы донести груз, Толстому нужно сделать 30 рейсов из точки A в точку B и 29 обратных рейсов из точки B в точку A. На один рейс у него уходит 5 минут, а на весь путь уйдет 5·(30+29)=295 мин. Тонкому муравью нужно сделать 50 рейсов из точки A в точку B и 49 обратных рейсов из точки B в точку A. У него на один рейс уходит 3 минуты, а на весь путь уйдет 3·(50+49)=297 мин. Поэтому Толстый окончит свою работу раньше.

Комментарий. Возможен такой вариант решения. Если бы оба муравья находились в точке B, то они бы выполнили работу за одинаковое время: Толстому нужно было сделать 60 рейсов по 5 минут, а тонкому 100 рейсов по 3 минуты. Так как муравьи уже находятся в точке A, время Толстого уменьшается на 5 минут, а время Тонкого – на 3 минуты. Значит, Толстый окончит работу раньше.

Критерии проверки.

- Верное решение **– 7 баллов**.
- Арифметическая ошибка при выполнении действий, но вся логика верна **– 5-6 баллов.**
- Правильный точный ответ (Толстый окончит работу на 2 минуты раньше) без обоснования **– 2 балла**.
- Ошибка при подсчете количества рейсов – считают, что количество рейсов туда и обратно должно быть одинаковым (т.е. считают, что нужно 30 рейсов «туда и обратно» для Толстого и 50 рейсов «туда и обратно» для Тонкого, соответственно получают 30·10=300 минут для Толстого и 50·6=300 минут для Тонкого), соответственно получен неверный ответ, что времени у муравьёв уйдет поровну **– 1 балл**.
- Только правильный ответ (Толстый окончит работу раньше) **– 0 баллов**.

6 класс.

1. В примере на сложение: $\square + \triangle + \square = \square\square$ впишите одну и ту же цифру в каждый квадратик и другую цифру в треугольник так, чтобы пример получился верным.

   Ответ. 1+9+1=11.

   Комментарий (как можно было найти ответ): Справа стоит двузначное число из двух одинаковых цифр. Т.к. самая большая сумма трех цифр это 9+9+9=27, то число справа меньше 30, т.е. это 11 или 22. Если это 11, то получаем: $\boxed{1} + \triangle + \boxed{1} = \boxed{1}\boxed{1}$, откуда $\triangle = 9$. Если это 22, то $\boxed{2} + \triangle + \boxed{2} = \boxed{2}\boxed{2}$, но тогда $\triangle = 18$, что не подходит, т.к. это должна быть цифра. Т.е. ответ единственный.

Критерии проверки.

- Правильный пример (обоснований не требуется) – 7 **баллов**.
- Пример, в котором в треугольник вписывается двузначное число, а в квадратики вписаны одинаковые цифры, например, $\boxed{3} + \overset{\triangle}{27} + \boxed{3} = \boxed{3}\boxed{3}$ **– 1 балл**.

2. На первой остановке в пустой автобус вошло 18 пассажиров. Потом на каждой остановке выходило 4 человека, а входило 6 человек. Сколько пассажиров ехало в автобусе между четвёртой и пятой остановками?

   Ответ. 24 человек.

   Решение.

   Способ 1.

   После каждой остановки, не считая первую, количество пассажиров в автобусе увеличивается на 2 человека. Значит, со второй по четвёртую остановку количество человек увеличилось на 6 человек. Т.е. стало 18+6=24 человек.

   Способ 2.

   Со второй по четвёртую остановку вышло $3 \cdot 4 = 12$ человек, а вошло $3 \cdot 6 = 18$ человек. Т.е. в автобусе стало 18-12+18=24 человека.

Критерии проверки.

- Верное решение **– 7 баллов.**
- Неверный ответ, но верная часть решения. Например, найдено, что после каждой остановки число пассажиров увеличивается на 2 – **2-3 балла.**
- Только верный ответ – **1 балл.**

3. Три лисы: Алиса, Лариса и Инесса разговаривали на полянке. Лариса: «Алиса не самая хитрая». Алиса: «Я хитрее Ларисы». Инесса: «Алиса хитрее меня». Известно, что самая хитрая лиса солгала, остальные сказали правду.

   а) Может ли самой хитрой лисой быть Алиса? Почему?
   б) Какая лиса самая хитрая? Дайте ответ и объясните, почему другие варианты не подходят.

Ответ. а) Не может, б) Инесса.

Решение.

а) Алиса не может быть самой хитрой, т.к. если она сама хитрая, то она хитрее Ларисы, т.е. Алиса сказала правду. Но самая хитрая лиса должна была солгать.

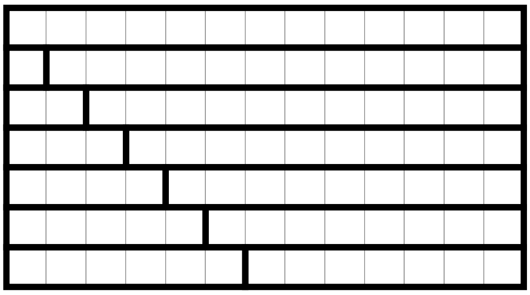
б) Самая хитрая лиса Инесса. Докажем это. Мы уже получили в пункте а), что Алиса не может быть самой хитрой лисой. Лариса тоже не может быть самой хитрой, т.к. она сказала правду про Алису, а самая хитрая лиса должна была солгать. Поэтому остался только один вариант: самая хитрая – Инесса.

Критерии проверки.

- Верное решение пункта а) – **3 балла,** пункта б) – **4 балла.**
- Только верные ответы на каждый из пунктов – **0 баллов.**

4. Как из 13 прямоугольников размерами 1×1, 2×1, 3×1, …, 13×1 составить прямоугольник, у которого все стороны больше 1?

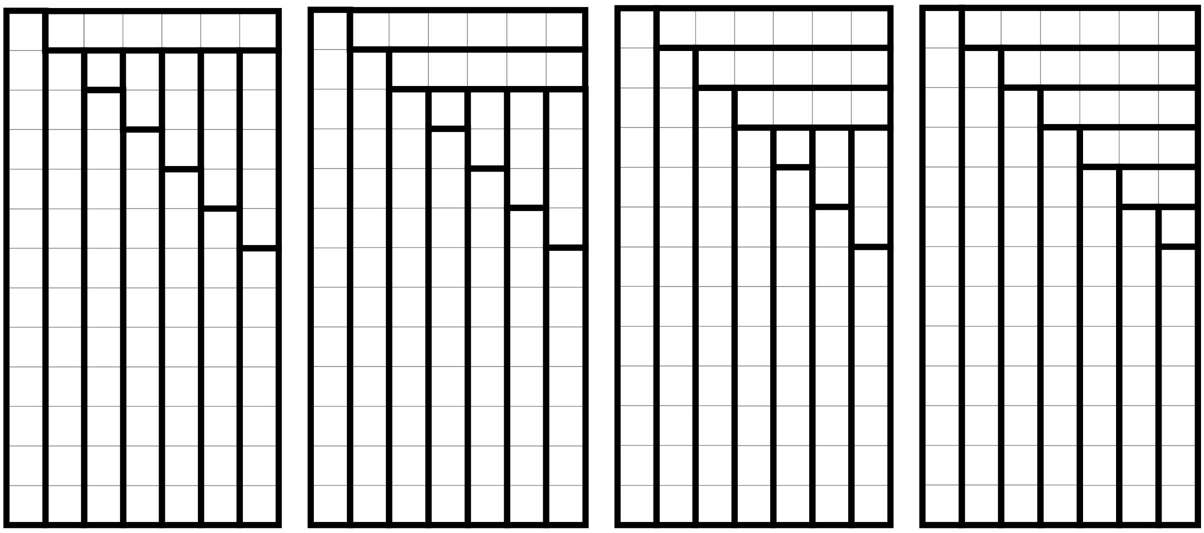
Ответ. Один из возможных примеров приведен на рисунке:



Комментарий 1 (как можно догадаться до примера). Если группировать прямоугольники: первый с последним, второй с предпоследним и т.д., то получаются одинаковые полоски длины 14: 1+13=14, 2+12=14, 3+11=14,… Из нескольких одинаковых полосок легко сложить прямоугольник, прикладывая их друг к другу длинной стороной. Однако, если мы попробуем продолжить описанный выше процесс, возникнет проблема: центральная полоска 7×1 останется без пары. Проблему можно решить так: самую длинную полоску длины 13 оставить одну, а оставшиеся сгруппировать по тому же принципу (самую короткую с самой длинной и т.д.): 13, 1+12, 2+11, 3+10, 4+9, 5+8, 6+7. Приложив получившиеся полоски длины 13 друг к другу, получаем пример, приведенный выше.

При решении использована та же идея, с помощью которой маленький Гаусс нашел сумму чисел от 1 до 100.

Комментарий 2. Площадь итогового прямоугольника равна 1+2+3+4+…+13=91. Т.к. в разложении 91 на простые множители всего два множителя: $91=7\cdot13$, то стороны итогового прямоугольника однозначно определяются – они должны быть 7 и 13. Прямоугольника других размеров (так, чтобы его стороны были больше 1) сложить из данных прямоугольничков нельзя. При этом внутри итогового прямоугольника исходные прямоугольнички могут размещаться по-разному. Некоторые варианты расположения приведены ниже:



Критерии проверки.

- Верный рисунок (никаких обоснований и рассуждений не требуется) – **7 баллов**.
- Полное описание того, как составить искомый прямоугольник (например, такое: из прямоугольников 1×1 и 12×1 составим прямоугольник 13×1. Такие же прямоугольники составим из 2×1 и 11×1, 3×1 и 10×1, … , 6×1 и 7×1. Затем из семи прямоугольников 13×1 сложим прямоугольник 13×7) – **7 баллов**.
- Идея разбиения полосок на «первая-последняя, вторая-предпоследняя», не доведенная до конца – **1-2 балла**.

5. Гравировщик делает таблички с буквами. Одинаковые буквы он гравирует за одинаковое время, разные — возможно, за разное. На две таблички «ДОМ МОДЫ» и «ВХОД» вместе он потратил 50 минут, а одну табличку «В ДЫМОХОД» сделал за 35 минут. За какое время он сделает табличку «ВЫХОД»?

Ответ. 20 минут.

Решение.

В табличках ДОМ МОДЫ ВХОД и В ДЫМОХОД отделим буквы, образующие слово ВЫХОД, тогда от первой таблички останется Д, О, М, М, О, Д, а от второй – Д, М, О. Заметим, что ДОМ МОДЫ ВХОД отличается от В ДЫМОХОД на буквы Д, О, М, а по времени – на 15 минут (50-35=15). Значит, на изготовление букв Д, О, М уходит 15 мин.

Теперь мы знаем, что при изготовлении В ДЫМОХОД, 15 минут ушло на изготовление букв Д, М, О, т.е. оставшиеся 35-15=20 минут понадобилось на изготовление букв В, Ы, Х, О, Д.

Критерии проверки.

- Верное решение – **7 баллов**.
- Найдено время, необходимое для гравировки букв Д, О, М – **2 балла**.
- Арифметическая ошибка при выполнении действий – минус **1 балл**.

7 класс

1. Расставьте скобки, чтобы равенство стало верным: $0{,}5+0{,}5:0{,}5+0{,}5:0{,}5=5$.

Ответ: $((0{,}5+0{,}5):0{,}5+0{,}5):0{,}5=5$.

Критерии проверки.

- Верный ответ **– 7 баллов**.

2. Три медвежонка делили три кусочка сыра массой 10 г, 12 г и 15 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно откусить и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить медвежатам равные кусочки сыра?

Ответ. Сможет.
Решение. Приведем один из возможных примеров того, как лиса могла это сделать. Для удобства запишем результаты «работы» лисы в таблицу.

10	12	15
9	12	14
8	12	13
7	12	12
7	11	11
7	10	10
7	9	9
7	8	8
7	7	7

Как можно догадаться до решения. Сначала попытаться уравнять только два куска сыра, а потом уже все три.

Критерии проверки.

- Верный алгоритм (неважно какой длины, записанный словами или таблицей) **– 7 баллов**.
- Верный в целом алгоритм с пропущенными звеньями **– 5 баллов**.
- Показано, как уравнять два куска, но дальше продвижений нет **– 2 балла**.
- Только ответ «да» или «сможет» **– 0 баллов**.

3. В подводном царстве живут осьминоги с семью и восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда врут, а те, у кого 8 ног, всегда говорят правду. Однажды между тремя осьминогами состоялся такой разговор.

Зелёный осьминог: «У нас вместе 21 нога».
Синий осьминог (зелёному): «Всё ты врёшь!»
Красный осьминог: «Да оба вы врёте!»

1) Мог ли зеленый осьминог сказать правду? Почему?
2) Сколько ног было у каждого осьминога? (Ответ обоснуйте.)

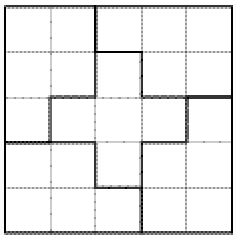
Ответ. 1) Не мог.
2) У зеленого осьминога 7 ног, у синего – 8 ног, у красного – 7 ног.
Решение.
1) Если бы зелёный осьминог сказал правду, то у каждого осьминога было бы по 7 ног. Значит, сам зелёный осьминог согласно условию должен был солгать. Получаем противоречие, следовательно, зелёный осьминог солгал.
2) Так как зелёный осьминог солгал, то у него 7 ног. Синий осьминог сказал про зелёного правду, значит, у него 8 ног. Красный осьминог солгал, так как перед ним солгали не оба, а только один, значит, у красного 7 ног.

Критерии проверки.

- Верное решение обоих пунктов – **7 баллов**.
- Верное решение первого пункта + часть решения второго – **4-5 баллов**.
- Верное решение первого пункта – **3 балла**.
- Частично верные, но неполные рассуждения – **1-2 балла**.
- Только ответы по всем пунктам – **0 баллов**.

4. На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной 5 клеток. Его требуется разбить на 5 частей одинаковой площади, проводя отрезки внутри квадрата только по линиям сетки. Сделайте это так, чтобы сумма длин всех проведенных отрезков была равна 16 клеткам.

Решение. Один из возможных примеров приведен на рисунке.



Критерии проверки.
Верное решение – **7 баллов**.
Квадрат разбит на 5 равновеликих частей, но суммарная длина проведенных отрезков больше 16 – **2 балла**.
Другие случаи – **0 баллов**.

5. Рядовой Петров взял ведро нечищеной картошки и за 1 час её почистил. При этом 25% картошки ушло в очистки. За какое время у него набралось полведра очищенной картошки?

Ответ. За 40 минут.
Решение. Так как четверть картошки ушло в очистки, то Петров получил за 1 час три четверти ведра почищенной картошки. Значит, четверть ведра почищенной картошки Петров получил за 20 минут, а половину ведра – за 40 минут.

Критерии проверки.

- Верное решение – **7 баллов**.
- Верный ход решения, но арифметическая ошибка в конце решения (при этом ответ должен получиться разумным, не 1 час и не 10 минут) – **5 баллов**.
- Верные соображения – до **2 баллов**.
- Только ответ – **1 балл**.

8 класс

1. Подберите такие не равные нулю числа n и m, чтобы равенство $(n \cdot 5^n)^n = m \cdot 5^9$ было верным.

Решение.

Таких пар чисел бесконечно много.

Покажем одно из самых естественных решений. Нам нужно, чтобы $n^n \cdot 5^{n^2} = m \cdot 5^9$. Если $n = 3$, то $5^{n^2} = 5^9$. Теперь вычислим m: $m = 3^3 = 27$. Пара $n = 3$, $m = 27$ является решением.

Покажем, как можно получить другие решения. Возьмем произвольное n. Например, $n = 6$.

Тогда в левой части равенства мы получаем: $6^6 \cdot 5^{36}$, следовательно, $m = 6^6 \cdot 5^{27}$.

Критерии проверки.

- Приведена верная пара чисел n и m и показано, что при таких n и m получается верное равенство (или показано, как найти n и m, или проведена проверка) – **7 баллов**.
- Приведена верная пара чисел n и m без каких-либо пояснений – **5 баллов.**
- Показано, что n может быть равно 3, но для этого n неверно найдено m – **2 балла**.
- Приведен только верный ответ – **1 балл**.
- Приведен верный ответ при неверных рассуждениях – **0 баллов.**

2. В подводном царстве живут осьминоги с семью и восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда врут, а те, у кого 8 ног, всегда говорят правду. Однажды между тремя осьминогами состоялся такой разговор.

> Зеленый осьминог: «У нас вместе 24 ноги».
> Синий осьминог: «Ты прав!»
> Красный осьминог: «Глупости, Зелёный говорит ерунду!»

Сколько ног было у каждого осьминога? (Ответ обоснуйте.)

Ответ. У Зеленого осьминога 7 ног, у Синего осьминога 7 ног, у Красного осьминога 8 ног.

Решение. Из условия задачи следует, что количество ног и правдивость высказываний связаны однозначно. Синий и Красный осьминоги про слова Зеленого осьминога произнесли противоречащие друг другу фразы. Значит, кто-то из них сказал правду, а кто-то ложь. А это, в свою очередь, означает, что у кого-то из них 7 ног. Таким образом, слова Зеленого осьминога – ложь (в противном случае у каждого из трех осьминогов должно быть по 8 ног, иначе общее количество ног меньше 24). Подведем итоги: Зеленый осьминог сказал ложь, у него 7 ног; тогда Синий осьминог сказал ложь, у него 7 ног, а Красный осьминог сказал правду, у него 8 ног.

Критерии проверки.

- Приведен полный верный анализ ситуации задачи и дан верный ответ – **7 баллов**.
- Приведен верный анализ ситуации, но по каким-либо причинам дан неверный ответ (например, перепутана связь между количеством ног и правдивостью высказываний) – **5-6 баллов.**
- Приведен верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию задачи (проведена проверка) – **3 балла**.
- Приведен только верный ответ – **1 балл**.
- Приведен верный ответ при неверных рассуждениях – **0 баллов.**

3. Фирма изготавливает лимонный напиток, разбавляя лимонный сок водой. Сначала фирма производила напиток, содержащий 15% лимонного сока. Через некоторое время генеральный

директор отдал указание снизить содержание лимонного сока до 10%. На сколько процентов увеличится количество производимого лимонного напитка при тех же объёмах поставок лимонов?

Ответ. На 50%.

Решение. *1 способ.* Содержание лимонного сока в напитке после указания генерального директора снизилось в полтора раза. Значит, из тех же лимонов можно приготовить в полтора раза больше лимонного напитка. Иными словами, количество производимого лимонного напитка увеличится в полтора раза или на 50%.
2 способ. Пусть x – количество производимого напитка до указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке – $0{,}15 \cdot x$. Пусть теперь y – количество производимого напитка после указания генерального директора. Тогда количество лимонного сока в этом напитке – $0{,}1 \cdot y$. Так как подразумевается, что количество лимонного сока не изменилось, получаем равенство $0{,}15 \cdot x = 0{,}1 \cdot y$. Умножив обе части этого равенства на 10, получим: $y = 1{,}5 \cdot x$; или: $y = x + 0{,}5 \cdot x$. Значит, количество производимого напитка увеличилось на 50%.
Критерии проверки.

- Полное решение **– 7 баллов.**
- Верно составлено уравнение по условию задачи, но дальнейшие рассуждения отсутствуют или ошибочны **– 2 балла.**
- Верный ответ получен с помощью введения конкретного количества (например, 100 литров) производимого напитка или лимонного сока **– 1 балл.**
- Приведен только верный ответ или верный ответ, сопровожденный неверными рассуждениями **– 0 баллов.**

4. Все натуральные числа, сумма цифр в записи которых делится на 5, выписывают в порядке возрастания: 5, 14, 19, 23, 28, 32, … Чему равна самая маленькая положительная разность между соседними числами в этом ряду? Приведите пример и объясните, почему меньше быть не может.

Ответ. Наименьшая разность равна 1, например, между числами 49999 и 50000.

Решение. Разность меньше 1 быть не может, так речь идет про разность различных натуральных чисел.
Комментарий. Как догадаться до решения.

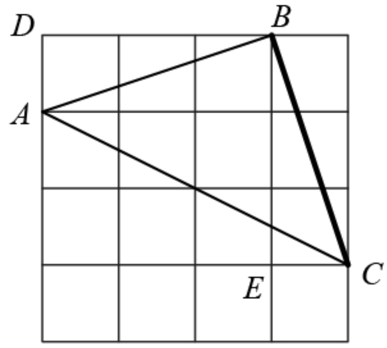
Понятно, что если два соседних числа отличаются только в разряде единиц, то разность между ними равна 5 (например, 523 и 528). Значит, нужно, чтобы числа отличались и в других разрядах. Можно попробовать взять б**о**льшее число круглым, тогда числа будут отличаться минимум в двух разрядах. Возьмем, например, 50, предыдущее число 46, а разность равна 4. Если взять 500, то предыдущее число 497 и разность равна 3. Осталось подобрать такое число нулей, чтобы разность была равна 1.

Критерии проверки.

- Приведен пример требуемых чисел с разностью 1 – **7 баллов**.
- Приведены рассуждения, позволяющие сконструировать последовательные числа ряда с минимальной разностью, и сконструированы числа, разность между которыми 2, но не сконструированы числа, дающие разность 1 – **4 балла**.
- Приведены примеры, показывающие, что разность может быть меньше 4, но без обоснования минимальности **– 2 балла**.
- Остальные случаи **– 0 баллов.**

5. На стандартном тетрадном листе в клетку нарисован угол (см. рисунок). Найдите его величину, не используя измерительные инструменты. Ответ обоснуйте.

<u>*Ответ.*</u> 45°.



<u>*Решение.*</u> Соединим две «крайние» точки отрезком (как на рисунке). Получившийся треугольник – равнобедренный, так как две его стороны *AB* и *BC* являются диагоналями трёхклеточных прямоугольников. Диагональ *AB* делит угол прямоугольника с вершиной *B* на два угла, дополняющих друг друга до прямого. Треугольники *ADB* и *CEB* равны по двум катетам, значит, равны их соответствующие углы. И значит, угол *CBE* дополняет угол *ABE* до прямого. Таким образом, треугольник *ABC* – равнобедренный и прямоугольный. Его углы *A* и *C* при основании *AC* равны по свойству равнобедренного треугольника и имеют величину 45° по теореме о сумме углов треугольника.

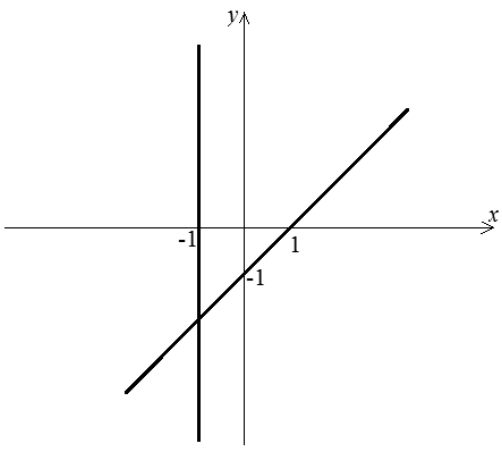
<u>*Комментарий*</u>. Если соединить точку *B* с серединой *AC*, мы также получим равнобедренный прямоугольный треугольник. Рассуждения аналогичны.

<u>Критерии проверки.</u>

- Приведено верное обоснованное решение **– 7 баллов.**
- Приведены в целом верные рассуждения, в которых допущены ошибки, не имеющие для сути решения принципиального характера, и дан верный ответ **– 5 баллов.**
- Сделаны дополнительные построения и обозначения на чертеже, из которых ясен ход решения, дан верный ответ, но не приведены сами рассуждения **– 3 балла.**
- Приведен верный ответ без обоснования либо с неверным обоснованием **– 0 баллов.**

6. На координатной плоскости есть точки, координаты (*x;y*) которых удовлетворяют уравнению $y(x+1)=x^2-1$. Например, одна из них – точка с координатами (1;0). Изобразите *все* точки, координаты (*x;y*) которых удовлетворяют этому уравнению.

<u>*Ответ.*</u> См. рисунок.



<u>*Решение*</u>. Преобразуем уравнение следующим образом:

$y(x+1)=(x-1)(x+1)$;

$y(x+1)-(x-1)(x+1)=0$;

$(x+1)(y-x+1)=0$. Отсюда $x=-1$ или $y=x-1$. Таким образом, все точки с координатами, удовлетворяющими уравнению, представляют собой совокупность двух прямых: прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку (-1;0) и прямой, являющейся графиком функции $y=x-1$ (см. рисунок).

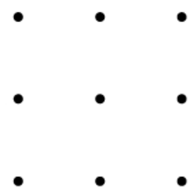
<u>Критерии проверки.</u>

- Верно проведены преобразования и верно построено множество точек **– 7 баллов**.
- Верно проведены преобразования, выделены два случая, но множество точек для какого-либо из них не построено или построено неверно **– 4 балла**.

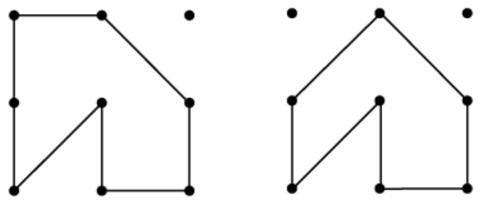
- Верно проведены ключевые преобразования, но множество точек не построено или построено неверно **– 3 балла**.
- Потерян случай $x + 1 = 0$ (например, за счет «сокращения» обеих частей уравнения на это выражение) и построена только прямая «$y = x - 1$» **– 2 балла**.
- Указано несколько точек с подходящими координатами и через них проведены (пусть даже и правильно) прямые или отрезки без каких-либо дополнительных рассуждений – **0 баллов**.
- Указано несколько точек с подходящими координатами **– 0 баллов**.
- Указано несколько точек с подходящими координатами и через них проведены (пусть даже и правильно) прямые или отрезки без каких-либо дополнительных рассуждений – **0 баллов**.

9 класс.

1. Отмечено 9 точек, как показано на рисунке. Нарисуйте два различных по форме семиугольника с вершинами в отмеченных точках. Для каждого семиугольника сделайте отдельный чертёж.



<u>Ответ</u>. Примеры семиугольников изображены на рисунке. Возможны и другие варианты.



<u>Критерии проверки.</u>

- Найдены два или более семиугольников – **7 баллов.**
- Найден один семиугольник – **3 балла.**

2. В тот день, когда Диму поздравляли с днём рождения его брат и сестра, Дима сказал: «Смотрите, как интересно, я теперь вдвое старше брата и втрое старше сестры!» – «А ваш средний возраст 11 лет», – подхватил папа. Сколько лет исполнилось Диме?

<u>Ответ</u>.18 лет.

<u>Решение. Первый способ</u>. По условию задачи можно составить уравнение. Пусть возраст Димы – x лет, тогда возраст сестры $x/3$, а брата – $x/2$; $(x + x/3 + x/2):3=11$. После решения этого уравнения получаем, что $x=18$. Диме исполнилось 18 лет.

Будет полезным привести несколько иное решение, «в частях».

<u>Второй способ</u>. Если возрасты Димы, его брата и сестры изобразить отрезками, то «Димин отрезок» состоит из двух «отрезков брата» или трех «отрезков сестры». Тогда, если возраст Димы поделить на 6 частей, то возраст сестры – две такие части, а возраст брата – три такие части. Тогда сумма их возрастов – 11 таких частей. С другой стороны, если средний возраст равен 11 лет, то сумма возрастов – 33 года. Откуда следует, что в одной части – три года. Значит, Диме исполнилось 18 лет.

<u>Критерии проверки.</u>

- Полное верное решение – **7 баллов**.
- Верно составлено уравнение, но при решении допущены ошибки **– 3 балла.**
- Приведен верный ответ и выполнена проверка **– 2 балла.**
- Приведен только верный ответ **– 0 баллов.**

3. Однажды следователю пришлось допрашивать трёх свидетелей ограбления: Джона Уайта, Сэма Грэя и Боба Блэка. Джон уверял, что все показания Сэма – сплошная ложь, а Сэм только и делал, что твердил, будто Боб говорит неправду. Боб же всё это время уговаривал следователя не верить ни Уайту, ни, тем более, Грэю. Следователь, будучи человеком сообразительным и умным, попросил всех троих замолчать и, не задав более ни одного вопроса, быстро определил, с кем из них стоит иметь дело, а с кем – нет. Кто же из свидетелей не лгал?

<u>Ответ</u>.Сэм Грэй.

Решение. Из условия задачи ясно, что высказывания каждого из свидетелей произнесены по поводу высказываний остальных двух свидетелей. Рассмотрим заявление Боба Блэка. Если то, что он говорит – правда, то Сэм Грэй и Джон Уайт лгут. Но из того, что Джон Уайт лжет следует, что не все показания Сэма Грэя – сплошная ложь. А это противоречит словам Боба Блэка, которому мы решили поверить и который утверждает, что Сэм Грэй лжет. Итак, слова Боба Блэка не могут быть правдой. Значит, он солгал, и мы должны признать слова Сэма Грэя правдой, а, следовательно, утверждения Джона Уайта – ложью. Ответ: не лгал Сэм Грэй.
Критерии проверки**.**

- Приведен полный верный анализ ситуации задачи и дан верный ответ **– 7 баллов.**
- Приведен полный верный анализ ситуации, но по каким-либо причинам дан неверный ответ (например, вместо того, кто НЕ солгал, в ответе указаны те, кто солгал) **– 6 баллов.**
- Приведен верный анализ ситуации, но по каким-либо причинам не дан верный ответ (например, доказано, что Боб Блэк лгал, но не сделаны дальнейшие выводы) **– 4 балла.**
- Приведен верный ответ и показано, что он удовлетворяет условию задачи (проведена проверка), но не доказано, что ответ единственный **– 3 балла.**
- Приведен только верный ответ **– 1 балл.**
- Приведен верный ответ при неверных рассуждениях **– 0 баллов.**

4. Сколько существует трёхзначных чисел, которые в 5 раз больше произведения своих цифр?

Ответ. Одно число 175.

Решение. *Первый способ.* В составе цифр, которыми записывается число, нет цифры 0, иначе не может быть выполнено условие задачи. Данное трехзначное число получено умножением на 5 произведения своих цифр, следовательно, оно делится на 5. Значит, его запись оканчивается цифрой 5. Получаем, что произведение цифр, умноженное на 5, должно делиться на 25. Заметим, что четных цифр в записи числа быть не может, иначе произведение цифр было бы равно нулю. Таким образом, трехзначное число должно делиться на 25 и не содержать четных цифр. Таких чисел только пять: 175, 375, 575, 775 и 975. Произведение цифр искомого числа должно быть меньше 200, иначе, умноженное на 5, даст четырехзначное число. Поэтому числа 775 и 975 заведомо не подходят. Среди оставшихся трех чисел только 175 удовлетворяет условию задачи.

Второй способ. Заметим (аналогично первому способу решения), что последняя цифра искомого числа – 5. Пусть a, b, 5 – последовательные цифры искомого числа. По условию задачи имеем: $100a + 10b + 5 = a\cdot b\cdot 5\cdot 5$. Поделив обе части уравнения на 5, получаем: $20a + 2b + 1 = 5ab$. После вычитания из обеих частей равенства $20a$ и вынесения за скобки общего множителя в правой части, получаем: $2b + 1 = 5a(b - 4a)$ (**1**). Учитывая, что a и b могут принимать натуральные значения от 1 до 9, получаем, что возможные значения a – только 1 или 2. Но a=2 не удовлетворяет равенству (**1**), в левой части которого нечетное число, а в правой при подстановке a=2 получается четное. Итак, единственная возможность a=1. Подставив это значение в (**1**), получаем: $2b + 1 = 5b - 20$, откуда b=7. Ответ: единственное искомое число – 175.

Критерии проверки.

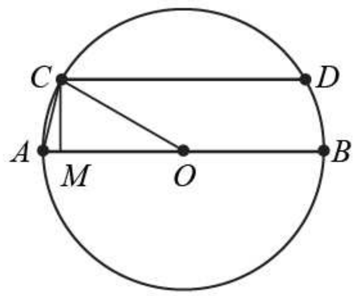
- Полное верное решение **– 7 баллов.**
- Получен верный ответ и присутствуют рассуждения, существенно сокращающие перебор вариантов, но полного решения нет **– 4 балла.**
- Верно составлено уравнение и приведены преобразования и рассуждения, позволяющие решить задачу, но решение не доведено до конца **– 4 балла.**

- Перебор вариантов сокращен, но нет объяснений, почему, и указан верный ответ **– 3 балла.**
- Верно составлено уравнение, но задача не решена **– 2 балла.**
- В решении есть рассуждения, позволяющие исключить из рассмотрения какие-либо числа или рассматривать числа с определенными свойствами (например, оканчивающиеся цифрой 5), но далее существенного продвижения в решении нет **– 1 балл.**

- Приведен только верный ответ или ответ с проверкой **– 1 балл.**

5. В окружности провели диаметр *AB* и параллельную ему хорду *CD* так, что расстояние между ними равно половине радиуса этой окружности (см. рисунок). Найдите угол *CAB*.

Ответ. 75°.
Решение. Рассмотрим треугольник *AOC*, где *O* – центр окружности. Этот треугольник равнобедренный, так как *OC* и *OA* – радиусы. Значит, по свойству равнобедренного треугольника, углы *A* и *C* равны. Проведем перпендикуляр *CM* к стороне *AO* и рассмотрим прямоугольный треугольник *OMC*. По условию задачи, катет *CM* – половина гипотенузы *OC*. Значит, величина угла *COM* равна 30°. Тогда, по теореме о сумме углов треугольника получаем, что угол *CAO* (или *CAB*) равен 75°.



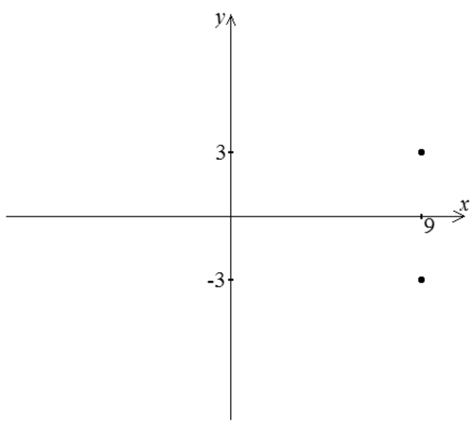
Критерии проверки.

- Верное обоснованное решение задачи **– 7 баллов**.
- Приведены верные рассуждения, являющиеся решением задачи, но по каким-либо причинам дан неверный ответ (например, указан угол *COA* вместо угла *CAO*) **– 6 баллов**.
- Приведены в целом верные рассуждения, в которых допущены ошибки, не имеющие для сути решения принципиального характера, и дан верный ответ **– 5 баллов**.
- Приведено верное решение задачи при отсутствии обоснований: указаны все промежуточные выводы без указания связей между ними (ссылок на теоремы или определения) **– 4 балла**.
- Сделаны дополнительные построения и обозначения на чертеже, из которых ясен ход решения, дан верный ответ, но не приведены сами рассуждения **– 3 балла**.
- Приведен верный ответ при неверных рассуждениях **– 0 баллов**.
- Приведен только верный ответ **– 0 баллов**.

6. Постройте график уравнения $x^2 - y^4 = \sqrt{18x - x^2 - 81}$, то есть изобразите на координатной плоскости *все* точки, координаты *(x;y)* которых удовлетворяют этому уравнению.

Ответ. См. рисунок.

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделив под знаком корня полный квадрат: $x^2 - y^4 = \sqrt{-(x\ -\ 9)^2}$. Выражение в правой части имеет смысл лишь при x = 9. Подставляя это значение в уравнение, получаем: $9^2 - y^4 = 0$. Разложим на множители левую часть: $(3 - y)(3 + y)(9 + y^2) = 0$. Откуда $y = 3$ или $y = –3$. Значит, координаты только двух точек (9; 3) или (9; –3) удовлетворяют данному уравнению. График уравнения изображен на рисунке.



Критерии проверки.

- Проведены верные преобразования и рассуждения и верно построен график **– 7 баллов**.

- Проведены верные преобразования, но потеряно значение $y = -3$; в качестве графика указана одна точка **– 3 балла**.
- Указаны одна или две подходящие точки, возможно, с проверкой, но без иных объяснений либо после неверных преобразований **– 1 балл**.
- Проведены верные преобразования, но объявлено, что выражение под корнем (или в правой части после возведения в квадрат) отрицательно и графиком является пустое множество точек **– 1 балл**.
- Проведены рассуждения, приведшие к указанию двух точек, но эти точки как-либо соединены (например, отрезком) **– 1 балл**.
- Указаны без объяснений две точки, которые как-либо соединены **– 0 баллов**.
- В остальных случаях **– 0 баллов**.

10 класс

1. Число *a* на 1 больше числа *b*. Могут ли числа a^2 и b^2 быть равными?

Ответ. Могут.

Решение. Если $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, то $a = b+1$ и $a^2 = b^2$.

Также можно решить систему уравнений: $\begin{cases} a^2 = b^2, \\ a = b+1. \end{cases}$

Критерии проверки.

- Верный ответ с указанием чисел *a* и *b* – **7 баллов.**
- Составлена система уравнений, но при ее решении допущена арифметическая ошибка – **3 балла.**
- Только ответ – **1 балл.**

2. Петя сбегает с четвёртого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем мама едет на лифте. Мама едет на лифте с четвёртого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем Петя сбегает с пятого этажа на первый. За сколько секунд Петя сбегает с четвёртого этажа на первый? (Длины пролетов лестницы между всеми этажами одинаковы).

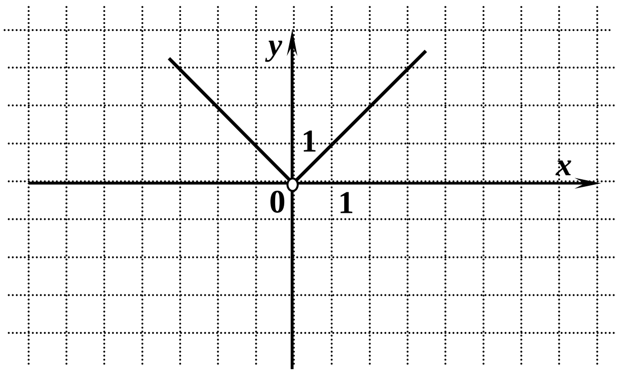
Ответ. За 12 секунд.

Решение. Между первым и четвертым этажами 3 пролета, а между пятым и первым – 4. Согласно условию, Петя 4 пролета пробегает на 2 секунды дольше, чем мама едет на лифте, а три пролета – на 2 секунды быстрее мамы. Значит, за 4 секунды Петя пробегает один пролет. Тогда с четвертого этажа на первый (т.е. на 3 пролета) Петя сбегает за $4 \cdot 3 = 12$ секунд.

Критерии проверки.

- Верный ответ с полным решением **– 7 баллов.**
- Объяснено, что на один пролет требуется 4 секунды, в ответе указано 4 секунды – **5 баллов.**
- Верное обоснование в предположении, что путь с пятого этажа на первый в 1,25 раз больше пути с четвертого этажа на первый и ответ 16 секунд – **3 балла.**
- Только ответ – **0 баллов.**

3. Постройте график функции $y = \frac{x^2}{|x|}$.



Ответ. См. рисунок.

Решение. Т.к. $x^2=|x|^2$, то $y=|x|$, причем $x\neq 0$.

Можно также, используя определение модуля, получить, что

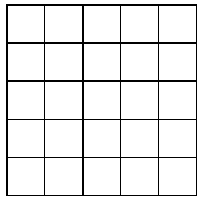
$y=\begin{cases} x, \text{ если } x>0, \\ -x, \text{ если } x<0 \end{cases}$ (при $x=0$ функция не определена).

Критерии проверки.

- Верный график с объяснением **– 7 баллов.**
- Верный график без каких-либо пояснений – **5 баллов.**
- График функции $y=|x|$ без выколотой точки **– 3 балла.**

4. В квадрате со стороной 5 произвольным образом отметили 201 точку. Верно ли, что какие-то 5 точек можно накрыть квадратом со стороной 1?

Ответ. Да.
Решение. Разделим данный квадрат со стороной 5 прямыми, параллельными его сторонам, на 25 квадратов со стороной 1 (см. рис.). Если бы в каждом таком квадрате было не больше 4 отмеченных точек, то всего было бы отмечено не более 25·4=100 точек, что противоречит условию. Следовательно, хотя бы в одном из полученных квадратов должно быть 5 из отмеченных точек.



Критерии проверки.

- Верное решение – **7 баллов.**
- Только ответ – **0 баллов.**

5. На числовой прямой закрашивают красным и синим цветом точки с целыми координатами по следующим правилам: а) точки, разность координат которых равна 7, должны быть покрашены одним цветом; б) точки с координатами 20 и 14 должны быть покрашены красным, а точки с координатами 71 и 143 — синим. Сколькими способами можно раскрасить все точки с целыми координатами, соблюдая эти правила?

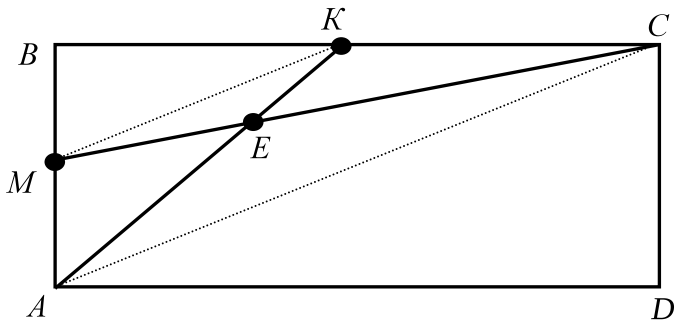
Ответ. Восемью способами.
Решение. Из пункта а) следует, что раскраска всех точек с целыми координатами однозначно определяется раскраской точек, соответствующих числам 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Точка 0=14-2·7 должна быть покрашена так же как 14, т.е. красным. Аналогично, точка 1=71-10·7 должна быть покрашена синим, точка 3=143-20·7 – синим, и 6=20-2·7 – красным. Поэтому остается только посчитать, сколькими различными способами можно раскрасить точки, соответствующие числам 2, 4 и 5. Так как каждую точку можно раскрасить двумя способами – красным или синим – то всего способов 2·2·2=8.
Примечание. При подсчете числа способов раскрашивания точек 2, 4 и 5, можно просто перечислить все способы, например, в виде таблицы:

2	*4*	*5*
кр	*кр*	*кр*
кр	*кр*	*син*
кр	*син*	*кр*
кр	*син*	*син*
син	*кр*	*кр*
син	*кр*	*син*
син	*син*	*кр*
син	*син*	*син*

Критерии проверки.

- Верный ответ с правильным обоснованием – **7 баллов.**
- Задача сведена к подсчету числа способов раскрасить 3 точки, но получен ответ 6 или 7 – 4 **балла.**
- Задача сведена к подсчету числа способов раскрасить 3 точки, но подсчет числа способов отсутствует или получен ответ, отличный от указанных ранее – **3 балла.**
- Ответ (в том числе правильный) без обоснования – **0 баллов.**

6. Дан прямоугольник $ABCD$. Точка M – середина стороны AB, точка K – середина стороны BC. Отрезки AK и CM пересекаются в точке E. Во сколько раз площадь четырехугольника $MBKE$ меньше площади четырехугольника $AECD$?



<u>*Ответ.*</u> В 4 раза.

<u>*Решение*</u>. Проведем отрезки MK и AC. Четырехугольник $MBKE$ состоит из треугольников MBK и MKE, а четырехугольник $AECD$ – из треугольников AEC и ACD. Далее можно рассуждать разными способами.

1 способ. Треугольники MBK и ACD – прямоугольные и катеты первого в 2 раза меньше катетов второго, поэтому они подобны и площадь треугольника ACD в 4 раза больше площади треугольника MBK.

Т.к. M и K – середины AB и BC соответственно, то MK – средняя линия треугольника ABC, поэтому $MK||AC$ и $MK=0{,}5AC$. Из параллельности прямых MK и AC следует подобие треугольников MKE и AEC, а т.к. коэффициент подобия равен 0,5, то площадь треугольника AEC в 4 раза больше площади треугольника MKE.

Теперь: $S_{AECD} =S_{AEC}+S_{ACD}=4S_{MKE}+4S_{MBK}=4(S_{MKE}+S_{MBK})=4S_{MBKE}$.

2 способ. Пусть площадь прямоугольника $ABCD$ равна S. Тогда площадь треугольника ACD равна $\frac{1}{2}S$ (диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника), а площадь треугольника MBK равна $\frac{1}{2}MB\cdot BK=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{2}BC=\frac{1}{8}AB\cdot BC=\frac{1}{8}S$.

Т.к. M и K –середины отрезков AB и BC, то AK и CM – медианы треугольника ABC, поэтому E – точка пересечения медиан треугольника ABC, т.е. расстояние от E до AC равно $\frac{1}{3}h$, где h – высота треугольника ABC, проведенная из вершины B. Тогда площадь треугольника AEC равна $\frac{1}{2}AC\cdot(\frac{1}{3}h)=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}AC\cdot h)=\frac{1}{3}S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}S)=\frac{1}{6}S$. Тогда для площади четырехугольника $AECD$, равной сумме площадей треугольников AEC и ACD, получаем: $\frac{1}{2}S+\frac{1}{6}S=\frac{2}{3}S$.

Далее, т.к. MK – средняя линия треугольника ABC, то площадь треугольника MKE равна $\frac{1}{2}MK\cdot(\frac{1}{2}h-\frac{1}{3}h)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}AC)\cdot(\frac{1}{6}h)=\frac{1}{12}(\frac{1}{2}AC\cdot h)=\frac{1}{12}S_{ACD}=\frac{1}{24}S$. Поэтому для площади четырехугольника $MBKE$, равной сумме площадей треугольников MBK и MKE, получаем: $\frac{1}{8}S+\frac{1}{24}S=\frac{1}{6}S$.

Таким образом, отношение площадей четырехугольников $AECD$ и $MBKE$ равно $\frac{2}{3}S:(\frac{1}{6}S)=4$.

<u>Критерии проверки</u>.

- Верное решение и верный ответ – **7 баллов.**
- Верное решение, но ответ неверен из-за арифметической ошибки – **5 баллов.**

11 класс.

1. Какое из чисел больше: 77^7 или 7^{77}?

Ответ. Второе число больше.

Решение. $7^{10} > 7^2 > 11$, поэтому $7^{11} = 7 \cdot 7^{10} > 7 \cdot 11 = 77$. Отсюда следует, что $7^{77} = (7^{11})^7 > 77^7$.

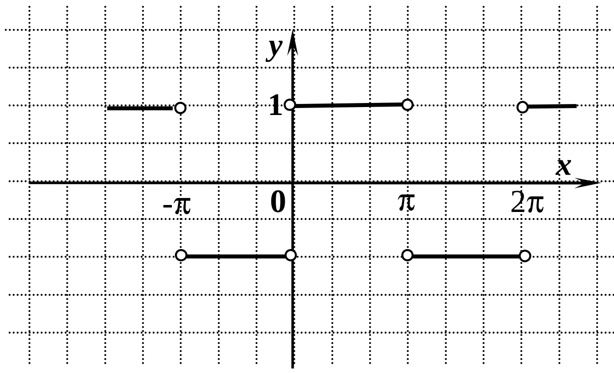
Критерии проверки.

Верный ответ и доказательство – **7 баллов.**

Верное рассуждение и в конце неверный ответ – **6 баллов.**

Только ответ – **1 балл.**

2. Постройте график функции $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.



Ответ. См. рисунок.

Решение. Используя определение модуля, получаем, что

$$y = \begin{cases} 1, \text{ если } \sin x > 0, \\ -1, \text{ если } \sin x < 0. \end{cases}$$

В точках, где $\sin x = 0$, функция не определена.

Критерии проверки.

- Верный график с объяснением – **7 баллов.**
- График без выколотых точек или с частично выколотыми точками – **4 балла.**
- График функции, принимающей значения 1 и -1, но на неверных промежутках – **1-2 балла.**

3. Убирая детскую комнату к приходу гостей, мама нашла 9 носков. Среди любых четырёх носков хотя бы два принадлежат одному хозяину. А среди любых пяти носков не больше трёх имеют одного хозяина. Сколько детей разбросало носки, и сколько носков принадлежит каждому ребенку?

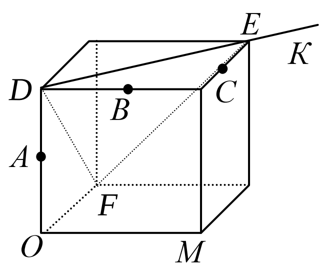
Ответ. Детей трое, каждому принадлежит по три носка.

Решение. Ни одному из детей не принадлежало более трех носков, так как в противном случае условие «среди любых пяти носков не больше трех имели одного хозяина» было бы не выполнено. Всего носков 9, поэтому детей не менее трех. С другой стороны среди любых четырех носков есть два носка одного ребенка, поэтому детей меньше четырех. Таким образом, в семье трое детей, причем каждый разбросал не более трех носков, а всего носков 9. Значит, каждому ребенку принадлежит 3 носка из найденных мамой.

Критерии проверки.

- Полный ответ с верным объяснением – **7 баллов.**
- Обосновано, что детей трое – **5 баллов.**
- Верные соображения, но решение не доведено до конца – **1-2 балла.**
- Ответ без обоснования – **0 баллов.**

4. Дан куб. A, B и C – середины его ребер (см. рисунок). Чему равен угол ABC?



Ответ. 120°.

Решение. *1 способ.* Проведем диагонали $DE || BC$ и $EF || AB$ и пусть K – точка на продолжении диагонали DE за точку E (см. рис.). Тогда $\angle ABC = \angle FEK$. Но треугольник DEF – равносторонний, поэтому

$\angle DEF=60^{\circ}$, а значит, $\angle FEK=120^{\circ}$.

2 способ. Введем систему координат с началом в точке *O,* осями *Ox, Oy* и *Oz,* сонаправленными векторам $\vec{OM}$, $\vec{OF}$ *и* $\vec{OD}$ соответственно и пусть ребро куба равно 2. Тогда $A(0;0;1)$, $B(1;0;2)$, $C(2;1;2)$. Поэтому $\vec{BA}(-1;\ 0;\ -1)$, $|\vec{BA}|=\sqrt{2}$, $\vec{BC}(1;\ 1;\ 0)$, $|\vec{BC}|=\sqrt{2}$. Теперь найдем двумя способами скалярное произведение векторов $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$*:*

$\vec{BA}\cdot\vec{BC}=(-1)\cdot1+0\cdot1+(-1)\cdot0=-1$ и $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos ABC$. Из этих двух равенств получается, что $\cos ABC=-0{,}5$, т.е. угол *ABC* равен 120°.

3 способ. Пусть ребро куба равно 1. Тогда по теореме Пифагора $AB=BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$*;* $DC=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ и $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Теперь по теореме косинусов из треугольника *ABC* находим, что

$\cos ABC=-0{,}5$.

Критерии проверки.

- Получен верный ответ со всеми обоснованиями **– 7 баллов.**
- Ход решения правильный, но ответ неверен из-за арифметической ошибки **– 5 баллов.**
- Получен ответ 60° – **4 балла.**
- Только ответ (в том числе – верный) **– 0 баллов.**

5. Числа $\dfrac{1}{a+b}$, $\dfrac{1}{a+c}$, $\dfrac{1}{b+c}$ образуют арифметическую прогрессию.

Верно ли, что числа a^2, b^2, c^2 также образуют арифметическую прогрессию?

Ответ. Да.

Решение. Так как указанные три числа образуют арифметическую прогрессию, то верно равенство:

$\dfrac{1}{a+c}-\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{a+c}$. Тогда, приводя к общему знаменателю, получаем: $\dfrac{b-c}{(a+c)(a+b)}=\dfrac{a-b}{(a+c)(b+c)}$. Отсюда: $(b+c)(b-c)=(a-b)(a+b)$ или $b^2-c^2=a^2-b^2$, что в соответствии с определением и означает, что числа a^2, b^2 и c^2 образуют арифметическую прогрессию.

Можно также использовать характеристическое свойство арифметической прогрессии: числа *x, y, z* образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $x+z=2y$.

Критерии проверки.

- Полное доказательство **– 7 баллов.**
- Только ответ **– 0 баллов.**

6. Сколько существует натуральных чисел n, для которых 4^n-15 является квадратом целого числа?

Ответ. Два.

Решение. Пусть $4^n-15=x^2$, причем x – целое число. Очевидно, что $x\neq0$. Если *x* – отрицательно, то $(-x)^2$ также равно 4^n-15; поэтому дальше будем считать, что $4^n-15=x^2$, причем *x* – натуральное. Из равенства $2^{2n}-15=x^2$ получаем: $2^{2n}-x^2=15$, а используя формулу для разложения разности квадратов на множители: $(2^n-x)(2^n+x)=15$. Т.к. *x* – натуральное число, то второй множитель слева в последнем равенстве положителен, но тогда положительным должен быть и первый множитель. Число 15 можно разложить на натуральные множители двумя способами: 15=3·5=1·15. При этом, т.к. $x > 0$, то $2^n+x > 2^n-x$. Таким образом, возможны только два случая:

$$\begin{cases} 2^n - x = 1, \\ 2^n + x = 15 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2^n - x = 3, \\ 2^n + x = 5. \end{cases}$$

Решая первую систему уравнений (удобнее всего просто сложить уравнения), получаем, что $2\cdot 2^n=16$, т.е. $n=3$. Аналогично из второй системы получается, что $n=2$.

Можно не ограничиваться при решении натуральными значениями x, но тогда число систем, подлежащих рассмотрению, возрастает, т.к. возможны еще варианты 15=(-1)·(-15)=(-3)·(-5).

Критерии проверки.

- Получен верный ответ с полным обоснованием – **7 баллов.**
- Не рассмотрены случаи разложения 15 на отрицательные множители без обоснования, почему можно не рассматривать отрицательные – **6 баллов.**
- Верно составлены системы для определения n, но не проверено, что они имеют натуральные решения – **5 баллов.**
- Из двух возможностей разложения числа 15 на множители рассмотрен только один – **5 баллов.**
- Разумные соображения, не приведшие к решению **1-2 балла**.