Английский язык
Библиотека в школе
Биология
География
Дошкольное образование
Здоровье детей
Информатика

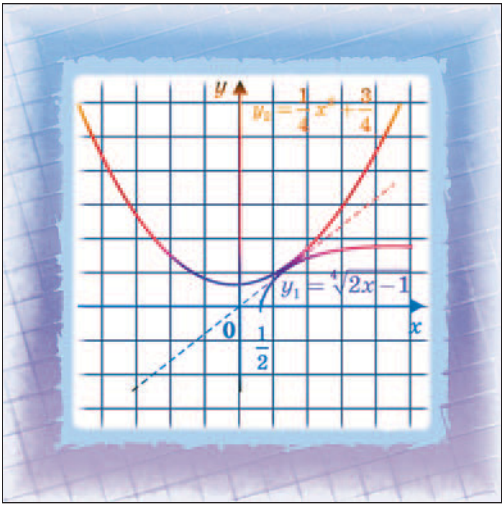
Математика

№20

Искусство
История
Классное руководство
Литература
Начальная школа
Немецкий язык
Педагогика
Русский язык
Спорт в школе
Управление школой
Физика
Французский язык
Химия
Школьный психолог

Библиотечка «Первого сентября»

Г.И. КОВАЛЕВА, Е.В. КОНКИНА



Функциональный метод решения уравнений и неравенств

БИБЛИОТЕЧКА «ПЕРВОГО СЕНТЯБРЯ»
Серия «Математика»
Выпуск 20

Г.И. Ковалева, Е.В. Конкина

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Москва
Чистые пруды
2008

Школьный курс математики предполагает обучение учащихся различным методам решения уравнений и неравенств. Одним из них является функциональный, основанный на использовании свойств функций. В отличие от графического метода, знание свойств функций позволяет находить точные корни уравнения (неравенства), при этом не требуется построения графиков функций. Использование свойств функций способствует рационализации решений уравнений и неравенств.

Рассмотрим использование некоторых свойств функций при решении уравнений и неравенств.

Использование понятия области определения функции

Введем несколько ключевых определений.

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной x, при которых функция имеет смысл.

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — элементарные функции, определенные на множествах D_1, D_2. Тогда ***областью D допустимых значений*** уравнения будет множество, состоящее из тех значений x, которые принадлежат обоим множествам, то есть $D = D_1 \cap D_2$. Ясно, что когда множество D пустое ($D = \varnothing$), то уравнение решений не имеет.

Пример 1. $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-3}=5.$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow$ решений нет.

Упражнения

Докажите, что уравнения не имеют решений.

1. $\sqrt{x-7}+\sqrt{5-x}=2.$

2. $\log_3(1-x)+\sqrt{x-11}=5.$

3. $\log_{0,3} x+\sqrt{(x+2)(-11-x)}=7.$

4. $\log_2(3-x)+\log_{x-3} 2=1.$

5. $\dfrac{x^2-3x+2}{\log_5(2x-3)}=0.$

6. $\log_2(x-7)\cdot\arccos x=0.$

7. $\arcsin(x+2)+\sqrt{2x-x^2}=x-2.$

8. $\sqrt{3-x^2}-\sqrt{x-2}=x.$

Пример 2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=x^2-1.$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x-1\geq 0, \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=1.$

ОДЗ состоит из одной точки $x = 1$. Остается проверить, является ли $x = 1$ корнем уравнения. $x=1\Rightarrow\sqrt{1-1}+\sqrt{1-1}=1-1,$ $0 = 0$. Верно.

Ответ: 1.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}(\sqrt{8x-2x^2-6}+1)=0.$

2. $\left(\sqrt{x^2-9x+14}-2\right)\log_{0,5}x+\sqrt{\frac{2-x}{x-7}}=5-\frac{6}{x}.$

3. $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2+4x-3}=\sqrt{-x^2+3x-2}.$

4. $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2+2x}=\sqrt{-x^2+5x-6}.$

5. $\arcsin\left(x^2-2x+2\right)=\frac{\pi x}{2}.$

6. $\arccos\left(6x-x^2-10\right)=\frac{\pi x}{3}.$

7. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+\sqrt{x^2-x-6}=\log_5(4-x).$

8. $\log_7\frac{x-5}{3-x}+\log_3|\,x-3\,|=\sqrt{\frac{x-4}{3-x}}+\sqrt{9x-x^2-20}.$

Ответы: **1.** 1. **2.** 2. **3.** 1. **4.** 2. **5.** 1. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 4.

Часто оказывается достаточным рассмотреть не всю область определения функции, а лишь ее подмножество, на котором функция принимает значения, удовлетворяющие некоторым условиям (например, только неотрицательные значения).

Пример 3. $\sqrt{6-x-x^2}=x^2+x-6.$

Решение. Найдем пересечение областей определения функций в правой и левой частях уравнения:

$$D_1\left(\sqrt{6-x-x^2}\right)=[-3;\,2] \text{ и } D_2\left(x^2+x-6\right)=(-\infty;\,+\infty).$$

$$D=D_1\left(\sqrt{6-x-x^2}\right)\cap D_2\left(x^2+x-6\right)=[-3;\,2]\cap(-\infty;\,+\infty)=[-3;\,2].$$

Ограничим множество D, учитывая, что левая часть уравнения неотрицательна, и, значит, такой же должна быть правая часть. Для этого нужно рассмотреть пересечение множества D с множеством решений неравенства $x^2 + x - 6 \geq 0$, то есть с множеством $A = (-\infty;\ -3] \cup [2;\ +\infty)$. Следовательно, достаточно рассмотреть уравнение на множестве $D \cap A = \{-3;\ 2\}$. Подстановкой убеждаемся, что оба его элемента служат решением уравнения.

Ответ: –3; 2.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $\sqrt{x}=-x$.

2. $\sqrt{-1-2x}=1+2x$.

3. $\cos x = x^2 + 1$.

4. $\sin x = x^2 + 1$.

5. $(x+2)(7-x)\left(\sqrt{x-9}+1\right)=1$.

6. $(x-4)(5-x)\left(\sqrt{-x}+3\right)=23$.

7. $\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x+2}=x-2$.

8. $\sqrt{3x-x^2}+\sqrt{x^2-5x}=x$.

Ответы: **1.** 0. **2.** –0,5. **3.** 0. **4.** ∅. **5.** ∅. **6.** ∅. **7.** ∅. **8.** 0.

Пример 4. $\sqrt{4-4x+x^2}+\sqrt{x^2-5x+4}=x-2$.

Решение. 1. $|\ x-2\ |+\sqrt{x^2-5x+4}=x-2$.

2. Так как левая часть уравнения неотрицательна, то $x - 2 \geq 0$.

3. $x \geq 2 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$.

4. $x-2+\sqrt{x^2-5x+4}=x-2,$, $\sqrt{x^2-5x+4}=0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

С учетом того, что $x \geq 2$, корнем уравнения является $x = 4$.

Ответ: 4.

Упражнения

Решите уравнения и неравенства.

1. $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{4x^2-13x-17}=x-4$.

2. $\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{26+3x-5x^2}=x-1$.

3. $\sqrt{\left(3^x-2\right)^2}+\sqrt{\left(3^x-9\right)\left(3^x-1\right)}=3^x-2.$

4. $\sqrt{\left(11-6^x\right)^2}+\sqrt{\left(6^x-6\right)\left(6^x-36\right)}=6^x-11.$

5. $\sqrt{\left(3-6^x\right)^2}+\sqrt{\left(6^x-1\right)\left(6^x-11\right)}=6^x-3.$

6. $2\sqrt{\left(4-2^x\right)^2}+\sqrt{4^x-18\cdot 2^x+32}=2^{x+1}-8.$

7. $7\sqrt{\left(3x-1\right)^2}+\sqrt{\log_2^2 x^2+16\log_2 x}\le 7-21x.$

8. $3\sqrt{\left(x-2\right)^2}+\sqrt{x^3+2x^2-9x-18}\le 6-3x.$

Ответы: **1.** 4,25. **2.** 2,6. **3.** 2. **4.** 2. **5.** $\log_6 11$. **6.** 4. **7.** 0,0625. **8.** –3.

Пусть требуется решить неравенство $f(x) > 0$. $D(f)$ — область определения функции $f(x)$. Если удается доказать, что для всех x из области определения выполняется неравенство $f(x) > 0$, то $D(f)$ представляет собой решение данного неравенства.

Пример 5. $|\,x\,|+\sqrt{x^2-1}\ge 1.$

Решение. 1. Область определения левой части: $|\,x\,|\ge 1$.

2. Для любого x из области определения выполняется неравенство $|\,x\,|+\sqrt{x^2-1}\ge 1.$

Ответ: $x\in(-\infty;\,-1]\cup[1;\,+\infty)$.

Пример 6. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}+x>4.$

Решение. 1. Область определения левой части: $|\,x\,|>3$.

2. При $x<-3$ левая часть неравенства отрицательна.

3. Для любого $x>3$ выполняется неравенство $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-9}}>1$

То есть $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}+x>4.$

Ответ: $x\in(3;\,+\infty)$.

Упражнения

Решите неравенства.

1. $\lg x+\sqrt{x^2-1}\geq 0.$

2. $\dfrac{\lg\left(x^2+1\right)}{\lg\left(x^2-1\right)}+\sqrt{x^2-4}>1.$

3. $\arcsin\dfrac{2}{x}+\sqrt{x-1}>1.$

4. $\log_2\left(x^2+3\right)+\sqrt{x^2-1}\geq 2.$

5. $\sqrt{x-1}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}+\sqrt{4-x^2}>1.$

6. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}>2(1-x).$

7. $\sqrt{x-1}+2^{\arcsin\frac{1}{x}}>1.$

8. $x+2^x+\sqrt{x-3}>10.$

Ответы: **1. [1; +∞). 2. (–∞; –2], [2; +∞). 3. [2; +∞). 4. (+∞; –1], [1; +∞). 5. [1; 2). 6. (1; +∞). 7. [1; +∞). 8. [3; +∞).**

Использование понятия области значений функции

Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной y при допустимых значениях переменной x.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной на данном промежутке*** (содержащемся в области ее определения), если существует такое число $N > 0$, что при всех значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, имеет место неравенство $|f(x)| < N$.

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — элементарные функции, определенные на множествах D_1, D_2. Обозначим область изменения этих функций соответственно E_1 и E_2. Если x_1 является решением уравнения, то будет выполняться числовое равенство $f(x_1) = g(x_1)$, где $f(x_1)$ — значение функции $f(x)$ при $x = x_1$, а $g(x_1)$ — значение функции $g(x)$ при $x = x_1$. Значит, если уравнение имеет решение, то области значений функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют общие элементы ($E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$). Если же таких общих элементов множества E_1 и E_2 не содержат, то уравнение решений не имеет.

Пример 7. $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=-2.$

Решение. $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}\geq 0\Rightarrow$ решений нет.

Пример 8. $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2.$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x\geq 0, \\ x+9\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 0.$ $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}\geq 3\Rightarrow$ решений нет.

Пример 9. $\left(\frac{4}{3}\right)^x=-2x^2+6x-9.$

Решение. Область допустимых значений уравнения есть множество всех действительных чисел. Показательная функция $f(x)=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ принимает только положительные значения, а функция $g(x) = -2x^2 + 6x - 9$ — только отрицательные значения. Множества значений этих функций не имеют общих элементов, и, следовательно, уравнение решений не имеет.

Упражнения

Докажите, что уравнения и неравенства не имеют решений.

1. $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=1.$

2. $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=2.$

3. $\sqrt{x}-\sqrt{x+5}=2.$

4. $\left|\, 2x^2-3x-5 \,\right|+7^{2x^2-3x-5}=0.$

5. $|x^2 - 2x| + |\lg(3x - 7)| = 0.$

6. $\log_3 9^{(x+1)^2}\left(10^{(x+1)^2}+11\right)=-1.$

7. $(8x^2 + 10x + 7)\lg^2(x + 1) < 0.$

8. $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-10x+21}\leq 0.$

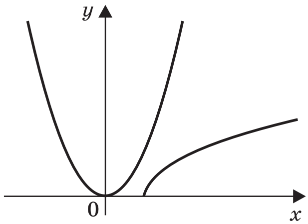
Из того, что $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, еще не следует существование решения, ибо это только необходимое, но не достаточное условие.

Например, уравнение $x^2=\sqrt{x-2}$ не имеет решений, хотя

$$E\left(x^2\right)\cap E\left(\sqrt{x-2}\right)=[0;+\infty)$$

(см. рис. на с. 9).

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$. Если $f(x) \geq 0$ и $g(x) \leq 0$, то решением уравнения является решение системы $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{cases}$



Упражнения

Решите уравнения и неравенства.

1. $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2x^2-x-1}=0.$

2. $x^2-10x+25+\left|x^2-9x+20\right|=0.$

3. $\left|x^2-2x\right|+\sqrt{x^2-3x+2}=0.$

4. $\sin^2\pi x+\log_2^2\left(2x^2+x\right)=0.$

5. $\lg^2(x+1)+\left|5x-x^2\right|\le 0.$

6. $\sqrt{x^2+5x-14}+\sqrt{x^3-3x-2}\le 0.$

7. $\ln^2\left(x^2-3x-9\right)+\sqrt{x^3-8x-8}\le 0.$

8. $\left(x^2+7x-8\right)^2+\log_3^2\left(3x^2-2x\right)\le 0.$

Ответы: **1.** 1. **2.** 5. **3.** 2. **4.** –1. **5.** 0. **6.** 2. **7.** –2. **8.** 1.

Вообще, если функция $f(x)$ на промежутке X ограничена сверху, причем $\sup\limits_{x\in X} f(x)=A$, а функция $g(x)$ ограничена снизу, причем $\inf\limits_{x\in X} f(x)=A$, то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$

Пример 10. $\frac{3}{\pi}\arccos(x-1)=3+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}.$

Решение. По определению, $0\le\arccos(x-1)\le\pi$ для допустимых значений x, следовательно, $0\le\frac{3}{\pi}\arccos(x-1)\le 3.$

$3+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}\ge 3$ для допустимых значений x.

Равенство достигается, если $\begin{cases} \frac{3}{\pi}\arccos(x-1)=3, \\ 3+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}=3. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$$\arccos(x-1)=\pi,\ x-1=-1,\ x=0.$$

При $x=0$ второе уравнение обращается в верное числовое равенство.

Следовательно, решением системы и уравнения является $x=0$.

Ответ: 0.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $\arccos(x+4)=-\log_3^2\left(x^2-8\right)$.

2. $\frac{1}{\pi}\arcsin(-x)=\frac{1}{2}+\left|\ x^4+2x^3+x^2\ \right|$.

3. $\frac{4}{\pi}\arcsin(x-1)=2+\sqrt{x^2-x-2}$.

4. $\frac{2}{\pi}\arccos(-0,5x)=2+\left(x^2-x-2\right)^8$.

5. $2\arcsin(3x-8)=\pi+2\cdot(2x^2-7x+3)^4$.

6. $\arccos(2x-3)=\pi+\pi\cdot|x^2-6x+5|$.

7. $\frac{2}{\pi}\arcsin(x+2)=1+\left|\ \log_2\left(x^2+x+1\right)\right|$.

8. $2\cos(\pi x^3)+\frac{6}{\pi}\arcsin(x^2-2)+x^2-2x+6=0$.

Ответы: **1.** –3. **2.** –1. **3.** 2. **4.** 2. **5.** 3. **6.** 1. **7.** –1. **8.** 1.

Пример 11. $\cos 2\pi x=x^2-8x+17$.

Решение. $\cos 2\pi x=(x-4)^2+1$. $-1\le\cos 2\pi x\le 1$, $(x-4)^2+1\ge 1$.

Следовательно, равенство достигается, если $\begin{cases} \cos 2\pi x=1, \\ (x-4)^2+1=1. \end{cases}$

Решая второе уравнение системы, получаем $x=4$. Подстановкой убеждаемся, что найденный корень является решением и первого уравнения системы. Следовательно, $x = 4$ — решение системы.

Ответ: 4.

Пример 12. $25x^2+60x+39=\left(\sqrt{3}-\cos\frac{5\pi x}{4}\right)\left(\sqrt{3}+\cos\frac{5\pi x}{4}\right).$

Решение. $25x^2+60x+39=3-\cos^2\frac{5\pi x}{4}.$

Графиком функции $f(x) = 25x^2 + 60x + 39$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Вершина параболы имеет координаты:

$$x_0=\frac{-60}{2\cdot 25}=-\frac{6}{5},\ \ f\left(x_0\right)=25\cdot\frac{36}{25}-60\cdot\frac{6}{5}+39=3.$$

Следовательно, $f(x) \geq 3$.

$$g\left(x\right)=3-\cos^2\frac{5\pi x}{4},\ \ 0\leq\cos^2\frac{5\pi x}{4}\leq 1\Rightarrow 2\leq 3-\cos^2\frac{5\pi x}{4}\leq 3.$$

Равенство достигается, если $\begin{cases}25x^2+60x+39=3,\\ 3-\cos^2\frac{5\pi x}{4}=3.\end{cases}$

Из первого уравнения системы имеем $x=-\frac{6}{5}$. Подстановкой во второе уравнение системы убеждаемся, что $x=-\frac{6}{5}$ является решением системы.

Ответ: –1,2.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $3 + (x - \pi)^2 = 1 - 2\cos x$.

2. $\cos x = x^2 + 2x + 2$.

3. $\sin\frac{\pi x}{2}=x^2-2x+2.$

4. $\cos \pi x + x^2 - 6x + 10 = 0$.

5. $4x^2+12x+12=\left(\sin\frac{4\pi x}{3}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sin\frac{4\pi x}{3}\right).$

6. $64x^2-48x+13=\left(2-\cos\frac{20\pi x}{3}\right)\left(2+\cos\frac{20\pi x}{3}\right)$.

7. $\sqrt{4-(4x+7)^2}=\sin^2\frac{8\pi x}{7}+2$.

8. $\sqrt{9+(5x-1)^2}=3-\cos^2\frac{15\pi x}{2}$.

Ответы: **1.** π. **2.** $\varnothing$. **3.** 1. **4.** 3. **5.** –1,5. **6.** 0,375. **7.** –1,75. **8.** 0,2.

Пример 13. $\left(1-\sqrt{2}\,|\,x\,|\right)+\log_2\left(2-x^2\right)\geq 2$.

Решение. $|\,x\,|\geq 0,\ -\sqrt{2}\,|\,x\,|\leq 0,\ 1-\sqrt{2}\,|\,x\,|\leq 1$.

$$2-x^2\leq 2,\ \log_2(2-x^2)\leq 1.$$

Следовательно, неравенство выполняется, если $\begin{cases}1-\sqrt{2}\,|x|=1,\\ \log_2\left(2-x^2\right)=1.\end{cases}$
Решением системы является $x=0$.
Ответ: 0.

Упражнения

Решите уравнения и неравенства.

1. $\log_2\left(|x-3|+32\right)\cdot\sqrt{x^2-6x+34}=25$.

2. $\log_3\left(\frac{4}{3}\cos\pi x+\frac{5}{3}\right)+\sqrt{8x-2x^2-7}=2$.

3. $3^{1-x^2}\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+\frac{1}{27}\right)\geq 9$.

4. $\frac{1}{x^2-2x+3}+\log_9\left(3-|\,1-x\,|\right)\geq 1$.

5. $\log_{0,5}\left(2-x^2\right)-\frac{1}{x^2+1}\leq -2$.

6. $2^{-|x-2|}\cdot\log_2(4x-x^2-2)\geq 1$.

7. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\cdot\log_4\left(2x-x^2+15\right)\geq 4$.

8. $\log_{0,5}(4-x^2-4x)-\cos\pi x\leq -4$.
Ответы: **1.** 3. **2.** 2. **3.** 0. **4.** 1. **5.** 0. **6.** 2. **7.** 1. **8.** –2.

Пример 14. $3+\log^4_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+1\right)=3\cdot\left|\cos\left((x-1)\cdot\cos 2x\right)\right|.$

Решение. $3+\log^4_{\frac{1}{2}}(x^2-x+1)\geq 3$ для любых x,

$$0 \leq 3\cdot\left|\cos\left((x-1)\cdot\cos 2x\right)\right| \leq 3 \text{ для любых } x.$$

Равенство достигается, если $\begin{cases} 3+\log^4_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+1\right)=3, \\ 3\cdot\left|\cos\left((x-1)\cos 2x\right)\right|=3. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x+1)=0,\ x^2-x+1=1,\ x=0,\ x=1.$$

Проверим, какие из найденных значений x обращают второе уравнение системы в верное числовое равенство:

$x=0$, $\left|\cos(-1)\right| \neq 1$.

$x=1$, $\left|\cos 0\right| = 1$.

Следовательно, решением системы является $x=1$.

Ответ: 1.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $2\left|\cos\left(x\cdot\cos x^2\right)\right|=2+\log^4_{\frac{1}{3}}\left(4x^2+4x+1\right).$

2. $1+\left|\log_4(9x^2-39x+43)\right|=\left|\cos\left((x-2)\cdot\cos x\right)\right|.$

3. $\cos^2\left((x+2)\cdot\cos 2x\right)-1=\left|\log_2(x^2+5x+7)\right|.$

4. $\sqrt{\log^2_3(4x^2-6x+3)}=\left|\cos\left((2x-2)\cdot\sin^3 x\right)\right|-1.$

5. $\sqrt{\cos^2\left((x-3)\sin 5x\right)}=1+\log^6_{\frac{1}{3}}\left(x^2-5x+7\right).$

6. $\cos^2(x\cdot\sin x)=1+\log^2_5\sqrt{x^2+x+1}.$

7. $\cos^2\left((x-3)\cdot\sin x\right)=1+\left|\log_3(x^2+5x+7)\right|.$

8. $\sqrt[4]{\log^4_5(x^2-3x+3)}+1=\cos^4\left((x-2)\sin(2x+1)\right).$

Ответы: **1.** 0. **2.** 2. **3.** –2. **4.** 1. **5.** 3. **6.** 0. **7.** 3. **8.** 2.

Пример 15. $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}=5+4\sin 2\pi x.$

Решение. Оценим левую и правую части уравнения.

1. $\left|x-\frac{1}{4}\right|+2\geq 2\Rightarrow 3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}\geq 9.$

2. $-1 \leq \sin 2\pi x \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4\sin 2\pi x \leq 4 \Rightarrow 1 \leq 5 + 4\sin 2\pi x \leq 9.$

3. Следовательно, равенство достигается, если $\begin{cases} 3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2}=9, \\ 5+4\sin 2\pi x=9. \end{cases}$

4. Из первого уравнения системы находим $x=\frac{1}{4}$. Подстановкой убеждаемся, что найденный корень является решением и второго уравнения системы. Следовательно, $x=\frac{1}{4}$ – решение системы и корень исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 16. $2^{x^2-4x+5}=1+\sin^2\frac{\pi x}{4}.$

Оценим левую и правую части уравнения.

1. $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geq 1\Rightarrow 2^{(x-2)^2+1}\geq 2.$

2. $0\leq \sin^2\frac{\pi x}{4}\leq 1\Rightarrow 1\leq 1+\sin^2\frac{\pi x}{4}\leq 2.$

3. Следовательно, равенство достигается, если $\begin{cases} 2^{(x-2)^2+1}=2, \\ 1+\sin^2\frac{\pi x}{4}=2. \end{cases}$

4. Из первого уравнения системы находим $x = 2$. Подстановкой убеждаемся, что найденный корень является решением и второго уравнения системы. Следовательно, $x = 2$ – решение системы и корень исходного уравнения.

Ответ: 2.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $2^{1-|x-1|}=x^2-2x+3.$

2. $3^{|x|}=\cos\dfrac{x}{3}.$

3. $5^{|1-4x^2|}=\sin\pi x.$

4. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+2x}=4-\left|\sin\dfrac{\pi}{4}(x-1)\right|.$

5. $\log_2(3-|\cos x|)=2^{-|\pi-x|}.$

6. $\log_{\frac{1}{3}}(3+|\sin x|)=2^{|x|}-2.$

7. $\log_3\left(\dfrac{1}{3}-\left|\dfrac{3\pi}{2}-x\right|\right)=\sin x.$

8. $\log_3\left(4-\left|\cos\dfrac{4x}{3}\right|\right)=\sin x.$

Ответы: **1.** 1. **2.** 0. **3.** 0,5. **4.** –1. **5.** π. **6.** 0. **7.** 1,5π. **8.** $-1{,}5\pi+6\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 17. $\sin\dfrac{\pi}{x^2+6x+13}=\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2+12x+17}.$

Решение. 1. $x^2+6x+13=(x+3)^2+4$, $(x+3)^2+4\geq 4$,

$$0<\frac{\pi}{(x+3)^2+4}\leq\frac{\pi}{4},\quad 0<\sin\frac{\pi}{(x+3)^2+4}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Графиком функции $f(x)=2x^2+12x+17$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Координаты вершины: $x_0=-3$, $f(x_0)=-1$. Следовательно, $f(x)\geq -1$. Тогда, в силу возрастания показательной функции, имеем:

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2+12x+17}\geq\left(\sqrt{2}\right)^{-1},\quad\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2+12x+17}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Равенство достигается, если $\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{x^2+6x+13}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \left(\sqrt{2}\right)^{2x^2+12x+17}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$

4. Решением системы и, следовательно, решением уравнения является $x = -3$.

Ответ: -3.

Упражнения

Решите уравнения и неравенства.

1. $5^{\sin x} = 6 - \cos^2 \frac{4x}{5}$. **2.** $0{,}5^{\cos 6x} = 3 - \sin^2 x$.

3. $3^{x^2+4x+4,5} = \sqrt{3} \sin\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right)$. **4.** $\cos \frac{\pi}{x^2 + 4x + 7} = 0,5^{|x+2|+1}$.

5. $(4x - x^2 - 3) \cdot \log_2 (\cos^2 \pi x + 1) \geq 1$.

6. $\cos^2 (x + 1) \cdot \lg (9 - 2x - x^2) \geq 1$.

7. $4^{2x^2+0,5} + 9^{x^6} = 3 - \sin^2 x$.

8. $27^{3x^2+\frac{1}{3}} + 7^{x^4} = 4 - 3\mathrm{tg}^2\, x$.

Ответы: **1.** $2{,}5\pi + 10\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $0{,}5\pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** -2. **4.** -2. **5.** 2. **6.** -1. **7.** 0. **8.** 0.

Пример 18. $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$.

Решение. 1. Пусть $t = 2^x$, $t > 0$. Тогда левая часть уравнения имеет вид $t + \frac{1}{t}$.

При $t > 0$ $\quad t + \frac{1}{t} \geq 2$. (Это – частный случай функции $y = t + \frac{k}{t}$.

При $t > 0$ множество значений функции $y = \sqrt{k}\left(\frac{t}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{t}\right) \geq 2\sqrt{k}$.

При $t < 0$ $\quad y = -\sqrt{k}\left(\frac{-t}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{-t}\right) \leq -2\sqrt{k}$.)

2. $-2 \leq 2\cos\frac{x}{3} \leq 2$.

3. Равенство достигается, если $\begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 2, \\ 2\cos\frac{x}{3} = 2. \end{cases}$

Из первого уравнения системы находим $x = 0$. Поскольку это значение удовлетворяет и второму уравнению, то $x = 0$ — решение системы и корень исходного уравнения.

Ответ: 0.

Пример 19. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\text{tg } x+\text{ctg } x$.

Решение. $-2\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 2$.

Поскольку $\text{ctg } x=\frac{1}{\text{tg } x}$, то

$$\text{tg } x + \text{ctg } x \ge 2 \text{ или } \text{tg } x + \text{ctg } x \le -2.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2, \\ \text{tg } x+\text{ctg } x=2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2, \\ \text{tg } x+\text{ctg } x=-2. \end{cases}$$

Решением первой системы является $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. Вторая система решений не имеет.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$.

Пример 20. $\log_3 x-\log_x \frac{1}{3}\ge 2$.

Решение. $\log_3 x + \log_x 3 \ge 2 \Leftrightarrow \log_3 x > 0$, так как если $a+\frac{1}{a}\ge 2$, то $a > 0$, и если $a+\frac{1}{a}=2$, то $a = 1$.

Следовательно, $x > 1$.

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

Пример 21. $\sin(x-1)+\frac{1}{\sin(x-1)}+\sqrt{5x-x^2-4}>2$.

Решение. Область определения левой части: $x \in (1; 4]$.

При любом x из области определения $\sin(x - 1) > 0$, следовательно, $\sin(x-1)+\frac{1}{\sin(x-1)}\ge 2$.

Так как $\sqrt{5x-x^2-4}\geq 0$, то

$$\sin(x-1)+\frac{1}{\sin(x-1)}+\sqrt{5x-x^2-4}>2$$

на всей области определения.

Ответ: $x\in(1;\,4]$.

Упражнения

Решите уравнения и неравенства.

1. $2\cos(3x^2-x)=5^x+5^{-x}$.

2. $2\cos^2\dfrac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}$.

3. $3^x+3^{2-x}=3\cdot(1+\cos 2\pi x)$.

4. $\log_3(8+2x-x^2)=2^{x-1}+2^{1-x}$.

5. $\log_7 x+\log_x 7>2$.

6. $\log_2 x+6\log_{x^2}2+\sqrt{x^2+x-2}>3$.

7. $2^{1-|4x-1|}=\operatorname{tg}\pi x+\operatorname{ctg}\pi x$.

8. $\log_2\left(3+2x-x^2\right)=\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi x}{4}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi x}{4}$.

Ответы: **1.** 0. **2.** 0. **3.** 1. **4.** 1. **5.** (1; 7), (7; +∞). **6.** (1; +∞). **7.** 0, 25. **8.** 1.

Пример 22. $\sqrt{x+4}+\sqrt{-2-x}=x^2+6x+11$.

Решение. 1. $g(x)=x^2+6x+11=(x+3)^2+2\geq 2$.

2. $f(x)=\sqrt{x+4}+\sqrt{-2-x}$.

Пусть $a=\sqrt{x+4}$, $b=\sqrt{-2-x}$.

Так как $\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, то $\dfrac{f(x)}{2}\leq 1$, то есть $f(x)\leq 2$.

3. Так как $f(x)\leq 2$, а $g(x)\geq 2$, то данное уравнение равносильно

системе $\begin{cases}\sqrt{x+4}+\sqrt{-2-x}=2,\\ x^2+6x+11=2.\end{cases}$

Решая второе уравнение системы, получаем $x = -3$. Найденный корень удовлетворяет и первому уравнению системы.

Ответ: -3.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $\sqrt{x+5}+\sqrt{-3-x}=x^2+8x+18$.

2. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

3. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$.

4. $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=x^2-2x+3$.

5. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}=3^{2-x}+3^{x-2}$.

6. $\sqrt{7-x}+\sqrt{x+1}+\cos 2\pi x=5$.

7. $\sqrt{6-x}-|\ x-5\ |+\sqrt{x-4}=2$.

8. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}=2+\log_5^2(x-2)$.

Ответы: **1.** -4. **2.** 3. **3.** 2. **4.** 1. **5.** 2. **6.** 3. **7.** 5. **8.** 3.

Пример 23. $\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x=1$.

Решение. Поскольку $\left|\sin\frac{x}{2}\right|\le 1$, $|\cos 2x| \le 1$, произведение

$\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x$ может равняться единице лишь при выполнении одной из двух систем уравнений:

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=1,\\ \cos 2x=1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\sin\frac{x}{2}=-1,\\ \cos 2x=-1.\end{cases}$$

Решая первую систему, найдем из первого уравнения $x = \pi + 4\pi n$, а из второго уравнения $x = \pi n$. Очевидно, решения первого уравнения входят в решение второго при $n = 4k + 1$, то есть являются решениями системы. Решая вторую систему, убедимся в том, что она несовместна: решения первого уравнения $x = -\pi + 4\pi n$ и второго

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ не имеют общих корней.

Ответ: $x = \pi + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 24. $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$.

Решение. Очевидно, что

$$\cos^7 x + (1 - \cos^2 x)^2 = 1;$$

$$\cos^7 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x = 1;$$

$$\cos^2 x\,(\cos^5 x - 2 + \cos^2 x) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos^5 x + \cos^2 x = 2. \end{array}\right.$$

Решая совокупность уравнений, получим:

$$x = 0{,}5\pi + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \text{ или } x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = 0{,}5\pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2$.

2. $\cos^3 x + \sin^8 x = 1$.

3. $\cos^{120} x - \sin^{120} x = 1$.

4. $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x$.

5. $4(\sin 3x \sin x)^2 = 5 + \sin 3x$.

6. $\cos^6 2x = 1 + \sin^4 x$.

7. $\sin 5x + \sin x = 2 + \cos^2 x$.

8. $4\sin 2x - \mathrm{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4$.

Ответы: **1.** $8\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $0{,}5\pi + \pi n$, $2\pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$. **3.** πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** $0{,}5\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** $0{,}5\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **6.** πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** $0{,}5\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.** $0{,}25\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Использование свойства монотонности функции

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее (меньшее) значение функции $f(x)$, то есть для любых x_1 и x_2 из промежутка X таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется ***монотонной*** на этом промежутке.

Рассмотрим несколько свойств монотонных функций, используемых для установления характера монотонности функций и лежащих в основе утверждений об уравнениях и неравенствах.

Теорема 1. Монотонная на промежутке X функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента из этого промежутка.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X и функция $g(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, то функция $h(x) = f(x) + g(x) + C$ также возрастает (убывает) на промежутке X (C — произвольная постоянная).

Теорема 3. Если функция $f(x)$ неотрицательна и возрастает (убывает) на промежутке X, функция $g(x)$ неотрицательна и возрастает (убывает) на промежутке X, $C > 0$, то функция $h(x) = C \cdot f(x) \cdot g(x)$ также возрастает (убывает) на промежутке X.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, то функция $-f(x)$ убывает (возрастает) на этом промежутке.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X и сохраняет на этом множестве знак, то функция $\frac{1}{f(x)}$ на промежутке X имеет противоположный характер монотонности.

Теорема 6. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастающие или обе убывающие, то функция $h(x) = f(g(x))$ — возрастающая функция. Если одна из функций возрастающая, а другая убывающая, то $h(x) = f(g(x))$ — убывающая функция.

Сформулируем теоремы об уравнениях и неравенствах.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, то уравнение $f(x) = C$ имеет на промежутке X не более одного корня.

Теорема 8. Если функция $f(x)$ монотонна на промежутке X, то уравнение $f(g(x)) = f(h(x))$ равносильно на промежутке X уравнению $g(x) = h(x)$.

Теорема 9. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, то неравенство $f(g(x)) < f(h(x))$ равносильно на промежутке X неравенству $g(x) < h(x)$ ($g(x) > h(x)$).

Аналогичное свойство имеет место и для нестрогих неравенств.

Теорема 10. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке X, а $g(x)$ убывает на промежутке X, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на промежутке X не более одного корня.

Теорема 11. Если функция $f(x)$ возрастает на промежутке X, то уравнение $f(f(x)) = x$ равносильно на промежутке X уравнению $f(x) = x$.

Примеры применения этой теоремы показаны в [7], [8].

Пример 25. $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Преобразуем: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Левая часть уравнения является убывающей функцией. Следовательно, она может принимать значение 1 не более чем в одной точке (теорема 7). Подбором находим, что $x = 2$.

Ответ: 2.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $3^x = 4 - x$.

2. $2^x = \frac{3-5x}{3}$.

3. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$.

4. $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$.

5. $\log_2 (4 - x) = x - 3$.

6. $4^{\log_3 (1-x)} = 3x + 1$.

7. $0,5^{\log_7 (2x+3)} = \frac{2}{34 - 15x}$.

8. $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x$.

Ответы: **1.** 1. **2.** 0. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 3. **6.** 0. **7.** 2. **8.** 2.

Пример 26. $x^2+\sqrt{-x}=18$.

Решение. 1. ОДЗ уравнения: $x \le 0$.

2. Функция $y(x)=x^2+\sqrt{-x}$ убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$, а $g(x) = 18$ — постоянная функция.

3. Подбором находим, что $x = -4$. В силу теоремы 7, найденный корень единственный.

Ответ: -4.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $x^5 + x^3 + x = -42$.

2. $x^2+\sqrt{x}-\dfrac{12}{x}=15$.

3. $x^2+|\ x\ |+\sqrt{x}+2x=30$.

4. $x^3 - (5 - x)^3 + 2x = 71$.

5. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}+\sqrt{x+13}=9$.

6. $\dfrac{x^4+5x-12}{x}=7$.

7. $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\cdot\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4$.

8. $\dfrac{24}{x+5}+\dfrac{2}{x-5}=3$.

Ответы: **1.** -2. **2.** 4. **3.** 4. **4.** 4. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 7. **8.** 7.

Пример 27. $\sqrt{7-x}=x-1$.

Решение. 1. $f(x)=\sqrt{7-x}$ — функция убывает на $(-\infty;\ 7]$;
$g(x) = x - 1$ — функция возрастает.

2. Подбором находим, что $x = 3$.

3. В силу теоремы 10 утверждаем, что $x = 3$ единственный корень уравнения.

Ответ: 3.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $\sqrt{3-x}+2=\sqrt{2x-2}$.

2. $\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}$.

3. $4\cdot 2{,}5^{7-x}=21+\sqrt{3x+1}$.

4. $0{,}2^{x+1}=\sqrt{35+5x}$.

5. $0{,}25^{x+4}=\sqrt{46+6x}$.

6. $40 \cdot 0{,}04^x = (2x + 1)^3$.

7. $125 \cdot 0{,}25^x = (x + 1)^3$.

8. $\sqrt[3]{10x-2}=0{,}25^x-35$.

Ответы: **1.** 3. **2.** 2. **3.** 5. **4.** -2. **5.** -5. **6.** 0,5. **7.** 1,5. **8.** $-2{,}5$.

Пример 28. $\arcsin x = \frac{\pi}{3}\cdot(1-x)$.

Решение. 1. Функция $f(x) = \arcsin x$ возрастает на $[-1; 1]$; функция $g(x) = \frac{\pi}{3}(1-x)$ убывает на этом отрезке.

2. Подбором находим, что $x = 0{,}5$.

3. В силу справедливости теоремы 10 утверждаем, что $x = 0{,}5$ единственный корень уравнения.

Ответ: 0,5.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $3\arcsin x + \pi x - \pi = 0$.

2. $3\arccos x - \pi x - \frac{\pi}{2} = 0$.

3. $\arcsin(-x) = \pi \cdot 4^x \cdot 3^{4x+1}$.

4. $\arcsin(2x + 3) = \log_\pi(-4x - 5)$.

5. $\cos\frac{\pi x}{x+15} = 3^{1,5x-4}\cdot 4^{x-3,5}$.

6. $\cos\frac{\pi x}{x+4} = 2^{2x-5}$.

7. $\cos\frac{\pi x}{x+2} = \frac{1}{\log_{0,5} x}$.

8. $\sin\frac{\pi x}{2x+8} = 1{,}5 - \log_2 x$.

Ответы: **1.** 0,5. **2.** 0,5. **3.** –0,5. **4.** –1,5. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 2.

Пример 29. $\sqrt{4x+1} < 5 - x$.

Решение. 1. ОДЗ: $x \ge -0{,}25$.

2. При $x = 2$ левая и правая части равны.

3. Так как левая часть — возрастающая функция, а правая — убывающая, то неравенству удовлетворяют $x < 2$.

4. С учетом ОДЗ имеем: $-0{,}25 \le x < 2$.

Ответ: $x \in (-0{,}25; 2]$.

Пример 30. $\log_2(8 - x) \le 3x - 10$.

Решение. 1. ОДЗ: $x < 8$.

2. При $x = 4$ левая и правая части равны.

3. Так как левая часть — убывающая функция, а правая — возрастающая, то неравенству удовлетворяют $x \ge 4$.

4. С учетом ОДЗ имеем: $4 \le x < 8$.

Ответ: $x \in [4; 8)$.

Упражнения

Решите неравенства.

1. $2^x \geq 11 - x$.

2. $5^{\log_5(x+1)} < 0{,}1^x$.

3. $\log_{0,5}(2^x - 1) \geq x - 1$.

4. $\sqrt{x+18} < 2 - x$.

5. $\sqrt{3-2x} > x$.

6. $\sqrt{x+7} \geq 7 - 2x$.

7. $\lg x \leq 1 - x$.

8. $\log_{0,2} x \geq \sqrt{x} - 1$.

Ответы: **1.** $[3; +\infty)$. **2.** $(-1; 0)$. **3.** $(0; 1]$. **4.** $[-18; -2)$. **5.** $(-\infty; 1)$. **6.** $[2; +\infty)$. **7.** $(0; 1]$. **8.** $(0; 1]$.

Примечание. Продуктивно совместное рассмотрение уравнения $f(x) = g(x)$ и неравенств $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$.

Пример 31. $\sqrt[4]{2x-1} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$.

Решение. Замечаем, что $x = 1$ — корень уравнения.

Функция $y = \sqrt[4]{2x-1}$ и функция $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ возрастают в области определения уравнения, то есть на луче $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$. Преобразовать уравнение к такому виду, чтобы одна часть представляла собой убывающую, а другая — возрастающую функцию, не удается. Поступим по-другому. Найдем производные функций

$$y_1 = \sqrt[4]{2x-1} \text{ и } y_2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$$

и вычислим их в точке $x = 1$ (в точке пересечения графиков этих функций). Имеем:

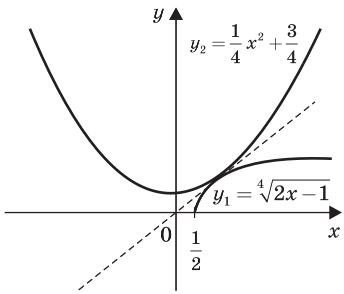
$$y_1' = \frac{1}{4}(2x-1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-1)^3}}, \quad y_1'(1) = \frac{1}{2}.$$

Далее,

$$y_2' = \frac{x}{2}, \quad y_2'(1) = \frac{1}{2}.$$

Так как $y_1' = y_2'$, то графики функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ имеют общую касательную в точке (1;1). Но поскольку функция $y_2(x)$ выпукла вниз, а функция $y_1(x)$ выпукла вверх, то их графики расположены по разные стороны от общей касательной, а потому уравнение $y_1(x) = y_2(x)$ имеет только один корень.

Итак, $x = 1$ — единственный корень уравнения.



Упражнения

Решите уравнения и неравенства.

1. $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{6}$.

2. $\sqrt[6]{4x-3} = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{5}{7}$.

3. $\sqrt{3x+1} = 28 - 3\sqrt{65-x}$.

4. $e^{-x} = \frac{2x-1}{x-1}$.

5. $\sqrt{8-x^2} = \frac{4}{x}$.

6. $\ln(x+1) = x^2 + x$.

7. $1 - \ln x = \sqrt{2-x^2}$.

8. $\ln(x-2) \geq x - 3$.

Ответы: **1.** 1. **2.** 1. **3.** 16. **4.** 0. **5.** 2. **6.** 0. **7.** 1. **8.** 3.

Использование свойств четности или нечетности функций

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется ***нечетной***, если для любого значения x, взятого из области определения функции, значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Из определений следует, что области определения четной и нечетной функций симметричны относительно нуля (необходимое условие).

Для любых двух симметричных значений аргумента из области определения четная функция принимает равные числовые значения, а нечетная — равные по абсолютной величине, но противоположного знака.

Теорема 1. Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций являются четными функциями.

Теорема 2. Произведение и частное двух нечетных функций представляют собой четные функции.

Пусть имеем уравнение или неравенство $F(x) = 0$, $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$), где $F(x)$ — четная или нечетная функция.

а) Чтобы решить уравнение $F(x) = 0$, где $F(x)$ — четная или нечетная функция, достаточно найти положительные (или отрицательные) корни, после чего записываются отрицательные (или положительные) корни, симметричные полученным, и для нечетной функции корнем будет $x = 0$, если это значение входит в область определения $F(x)$. Для четной функции значение $x = 0$ проверяется непосредственной подстановкой в уравнение.

б) Чтобы решить неравенство $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$), где $F(x)$ — четная функция, достаточно найти его решения для $x \geq 0$ (или $x \leq 0$). Действительно, если решением данного неравенства является промежуток $(x_1; x_2)$, где x_1, x_2 — числа одного знака или одно из них равно нулю, то его решением будет и промежуток $(-x_2; -x_1)$.

в) Чтобы решить неравенство $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$), где $F(x)$ — нечетная функция, достаточно найти решения для $x > 0$ (или $x < 0$). Если нам известны промежутки знакопостоянства функции $F(x)$ для $x > 0$ (или $x < 0$), то легко записать промежутки знакопостоянства и для $x < 0$ (или $x > 0$).

Пример 32. $8^{|x|} = 2^{|x+2|+|x-2|}$.

Решение. В обеих частях уравнения имеем четные функции. Поэтому достаточно найти решения для $x \geq 0$. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, рассмотрим два промежутка: $(0; 2]$, $(2; +\infty)$.

а) На промежутке $(0; 2]$ имеем:

$$8^x = 2^{x+2-x+2},\ 2^{3x} = 2^4,\ x = \frac{4}{3}.$$

б) На промежутке $(2; +\infty)$ имеем:

$$8^x = 2^{x+2+x-2},\ 2^{3x} = 2^{2x},\ 3x = 2x,\ x = 0.$$

Но так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то для $x > 0$ данное уравнение имеет корень $x=\frac{4}{3}$. Тогда $x=-\frac{4}{3}$ также является корнем уравнения.

Ответ: $-\frac{4}{3}$; $\frac{4}{3}$.

Пример 33. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4.$

Решение. Функция $f(x)=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$ — четная, так как $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=1$, то $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-x}=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$.

Значение $x = 0$ не является корнем уравнения.

Для $x > 0$ данное уравнение имеет корень $x = 2$.

Тогда $x = -2$ также является корнем уравнения.

Ответ: $-2;2$.

Упражнения

Решите уравнения.

1. $x|x|=\sqrt[3]{x}.$

2. $3^{|x|} = 4 - x^2.$

3. $\lg x^2 = 1 - x^2.$

4. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14.$

5. $x^2 + 5|x| - 24 = 0.$

6. $x^6 + 2x^4 + 3x^2 = 6.$

7. $\sqrt{x^2+5}+\sqrt{2x^2+1}=6.$

8. $\sqrt{x^4+19}+\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-8}=15.$

Ответы: **1.** –1; 0; 1. **2.** –1; 1. **3.** –1; 1. **4.** –2; 2. **5.** –3; 3. **6.** –1; 1. **7.** –2; 2. **8.** –3; 3.

Использование свойства периодичности функции

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого значения x, взятого из области определения, значения $x + T$, $x - T$, также принадлежат области определения и выполняется равенство $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$. Число T называется ***периодом*** функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечное количество периодов. При решении уравнений и неравенств будем использовать наименьший положительный период функции.

Если функция $F(x)$ — периодическая, то решение уравнения $F(x) = 0$ или неравенства $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$) достаточно найти на промежутке, равном по длине периоду функции, после чего записывается общее решение. Если периодическая функция еще и четная или нечетная, то решение достаточно найти на промежутке, равном по длине половине периода.

Пример 34. $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$.

Решение. Эквивалентными преобразованиями придем к неравенству $\cos 4x - \cos 12x < 0$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \cos 4x - \cos 12x = 2\sin 8x \sin 4x.$$

Ее период $T = \frac{2\pi}{\text{НОД}(4;12)} = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, решение неравенства достаточно найти на промежутке, равном по длине периоду функции. За такой промежуток возьмем $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Так как функция четная, то решения достаточно найти лишь на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Функция на данном промежутке имеет два корня: 0, $\frac{\pi}{8}$ — которые разбивают промежуток $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ на два интервала знакопостоянства: $\left(0; \frac{\pi}{8}\right)$, $\left(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right)$. Неравенство выполняется для всех $x \in \left(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right)$. Но тогда оно будет выполняться и для $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{8}\right)$.

Учитывая периодичность функции, запишем общее решение неравенства

$$-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}<x<-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in \boldsymbol{Z}.$$

Упражнения

Решите неравенства (1–4).

1. $\sin 2x + \sin x > 0$.

2. $\sin 2x - \sin 3x > 0$.

3. $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x > 0$.

4. $\cos 3x\ \sin x + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>1$.

Ответы: **1.** $\left(-\pi+2\pi n;-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ \left(2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),\ k\in \boldsymbol{Z}$.
2. $\left(\frac{\pi}{5}+2\pi n;\frac{3\pi}{5}+2\pi n\right),\ \left(\pi+2\pi n;\frac{7\pi}{5}+2\pi n\right),\ \left(\frac{9\pi}{5}+2\pi n;2\pi+2\pi n\right),$
$n\in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ \left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right),\ n\in \boldsymbol{Z}$.
4. $\left(\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right),\ \left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{2\pi}{3}+\pi n\right),\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Литература

1. Единственные реальные варианты заданий для подготовки к единому государственному экзамену. ЕГЭ-2006. Математика/ А.Г. Клово. — М.: Федеральный центр тестирования, 2006.

2. *Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение, 1991.

3. *Лысенко Ф.Ф., Калашников В.Ю., Неймарк А.Б., Давыдов Б.Е.* Математика. Подготовка к ЕГЭ, подготовка к вступительным экзаменам. — Ростов-на-Дону: Сфинкс, 2004.

4. *Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С.* Тригонометрия: Задачник к школьному курсу. — М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998.

5. *Ткачук В.В.* Математика — абитуриенту. — М.: МЦНМО, 1997.

6. *Томашевич Я.И.* О нестандартных приемах решения неравенств//Математика в школе, 1969, № 2.

7. *Чучаев И.И., Мещерекова С.И.* Уравнения вида $f(g(x)) = f(h(x))$ и нестандартные методы решения//Математика в школе, 1995, № 3.

8. *Шарыгин И.Ф., Голубев В.И.* Факультативный курс по математике: Решение задач (11 класс). — М.: Просвещение, 1991.

9. *Шунда Н.Н.* Об использовании свойств функции при решении уравнений и неравенств//Математика в школе, 1970, № 3.

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 372.851
ББК 74.262.21
К56

Общая редакция серии «Математика»: *Л.О. Рослова*

Ковалева Г.И.
К56 Функциональный метод решения уравнений и неравенств / Г.И. Ковалева, Е.В. Конкина. – М. : Чистые пруды, 2008. – 32 с. – (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 20).

ISBN 978-5-9667-0426-1

Целью брошюры является систематизация приемов использования свойств функций при решении уравнений и неравенств. Приведенные в брошюре подборки заданий помогут учителю при подготовке к уроку.

УДК 372.851
ББК 74.262.21

Учебное издание

КОВАЛЕВА Галина Ивановна, КОНКИНА Екатерина Владимировна

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МЕТОД
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Редактор *И.М. Бокова*
Корректор *Л.А. Громова*
Компьютерная верстка *С.В. Сухарев*

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-19078 от 08.12.2004 г.

Подписано в печать 20.02.2008.

Формат 60×90 $^{1}/_{16}$. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Печ. л. 2,0

Тираж экз. Заказ №

ООО «Чистые пруды», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Тел. (499) 249-28-77, http://www.1september.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в Раменской типографии
Сафоновский пр., д. 1, г. Раменское, МО, 140100
Тел. (495) 377-07-83. E-mail: ramentip@mail.ru

ISBN 978-5-9667-0426-1