Английский язык
Библиотека в школе
Биология
География
Дошкольное образование
Здоровье детей

Математика

№6/2005

Информатика
Искусство
История
Литература
Начальная школа
Немецкий язык
Русский язык
Спорт в школе
Управление школой
Физика
Французский язык
Химия
Школьный психолог

Библиотечка «Первого сентября»

И. ФЕОКТИСТОВ

Геометрия до Евклида в очерках и задачах

БИБЛИОТЕЧКА «ПЕРВОГО СЕНТЯБРЯ»
Серия «Математика»
Выпуск 6

И. Феоктистов

ГЕОМЕТРИЯ ДО ЕВКЛИДА В ОЧЕРКАХ И ЗАДАЧАХ

Москва
Чистые пруды
2005

Математика в палеолите и неолите

Наши первоначальные представления о числах и геометрических формах относятся к эпохе древнего каменного века — палеолита. Уже тогда люди изготовляли орудия для охоты и рыболовства в форме ромбов, треугольников, сегментов. В эпоху позднего палеолита они стали украшать свои жилища наскальными рисунками и статуэтками, имевшими ритуальное значение. Таковы, например, рисунки в пещерах Франции и Испании пятнадцатитысячелетней давности (рис. 1).

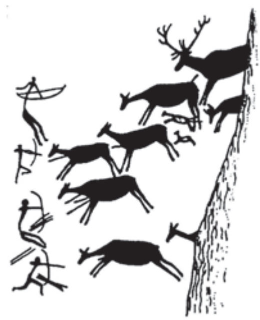

Рис. 1

С наступлением неолита произошел переход от простого собирания пищи к ее производству, от охоты и рыболовства к земледелию. Постепенно рыболовы и охотники сменялись первобытными земледельцами, которые вели оседлый образ жизни. Появились простейшие ремесла — гончарное, плотничье, ткацкое. В эпоху позднего неолита люди научились плавить медь и бронзу, изготовлять орудия производства и оружие. Это повлекло оживление торговли на уровне обмена. В этот момент входят в употребление числа. Возникает необходимость измерения длины и емкости тел. Единицы измерения были грубы и исходили из размеров человеческого тела. При возведении построек стали вырабатываться правила построений по прямым линиям и под прямым углом. Во многих странах людей, занимавшихся межеванием, называли «натягивателями веревки». Слово «линия» происходит от латинского слова *linum* — лен, льняная нить, что говорит о связи между ткацким ремеслом и зарождением геометрии.

Человек неолита обладал острым чувством геометрической формы. Обжиг и раскраска глиняных сосудов, изготовление камышовых циновок, корзин и тканей, обработка металлов вырабатывали геометрические представления. Неолитические орнаменты радовали глаз, выявляя равенство, симметрию, подобие фигур. В этих фигурах проявлялись и числовые соотношения: «треугольные» числа, «священные» числа. Такого рода орнаменты оставались в ходу и в исторические времена – византийская и арабская мозаика, персидские и китайские ковры. Первоначально ранние орнаменты, возможно, имели религиозное или магическое значение, но постепенно преобладающим стало их эстетическое значение.

В религии каменного века, пронизанной таинством и магией, существовали «магические» числа (3; 4; 7) и «магические» фигуры (пятиконечная звезда, свастика). Это говорит о культово-обрядовых и эстетических корнях математической и геометрической науки.

Даже у самых отсталых племен мы находим какой-то отсчет времени и, следовательно, какие-то сведения о движении Солнца, Луны и планет. Сведения этого рода приобрели более точный характер с развитием земледелия и торговли. Использование лунного календаря относится к очень давней эпохе в истории человечества, так как рост растений связывали с фазами Луны. Во время путешествий люди пользовались созвездиями как ориентирами. Все это дало некоторые сведения о свойствах окружности, сферы, об углах. Это был еще один путь, по которому шло развитие геометрических понятий.

Геометрические знания в Древнем Египте

Современная наука располагает сравнительно небольшим числом египетских математических документов – около пятидесяти папирусов. Самым древним из них является «московский папирус», относящийся к эпохе 1850 г. до н.э. и содержащий 25 задач с решениями. Папирус был приобретен в 1893 г. русским востоковедом В.С. Голенищевым, а в 1912 г. перешел в собственность Московского музея изобразительных искусств. Папирус расшифрован русским академиком Б.А. Тураевым в 1917 г., а детально изучен в 1927 г. советским академиком В.В. Струве.

В 1858 году в тайниках одной из египетских пирамид был найден папирус размером 544 €33 см (размеры «московского папируса» 544 × 8 см), относящийся к 1650 г. до н.э., составленный писцом Ахмесом и содержащий 84 задачи с решениями еще более раннего происхождения. Папирус был приобретен английским собирателем старины Г. Райндом (по другой транскрипции — Г. Риндом), а ныне хранится в Британском музее, носит названия «папирус Ахмеса», «папирус Райнда» или «лондонский папирус». Текст папируса расшифрован в 1877 г. профессором А. Эйзенлором.

Другие папирусы относятся к более позднему периоду, а их содержание во многом повторяет «московский» и «лондонский». В задачах речь идет о количестве хлеба и различных сортов пива, о кормлении животных и хранении зерна. Геометрические задачи касаются преимущественно измерений и содержат правила для вычисления площадей треугольника и трапеции. Для вычисления площади произвольного четырехугольника со сторонами a, b, c, d использовалось правило, записываемое в современных обозначениях в виде $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$. Для площади круга с диаметром d правило имело вид $S = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$. По-видимому, египтяне не сознавали, что эти правила являются приближенными.

Судя по одной из задач папируса Ахмеса, египтянам было известно свойство средней линии трапеции. Этот факт подтверждается рисунками на стенах храма Эдфу в Верхнем Египте, сделанными в более поздний период (II в. до н.э.). В папирусах есть правила для вычисления объемов таких тел, как куб, параллелепипед, цилиндр, причем все они рассматриваются конкретно как сосуды для хранения зерна. Самым замечательным результатом в египетских измерениях была формула (точнее, правило, ибо никаких формул тогда, конечно, не было) для вычисления объема усеченной пирамиды с квадратным основанием $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, где a и b — длины сторон квадратных оснований, h — высота.

Этот результат, которому не найдено соответствующего ни в какой другой древней математике, особенно примечателен тем, что нет никаких оснований считать, что египтянам была известна теорема Пифагора! Ссылки на рассказы древнегреческих ученых, побывавших в Египте и видевших арпадонаптов, строивших прямые углы с помощью веревки, имевшей $3 + 4 + 5 = 12$ узлов, не подтверждаются египетскими текстами. По тем же причинам сомнительно сознательное использование египтянами подобия, хотя в погребальной камере отца фараона Рамсеса II одной из пирамид обнаружена стена, покрытая сетью квадратиков, с помощью которой на стену можно переносить в увеличенном виде рисунки меньших размеров.

В Древнем Египте не было терминов «фигура», «сторона фигуры». Вместо этого использовались слова «поле», «границы поля», «длина поля». Все математические знания египтян были исключительно рецептурными и не осознавались в качестве самостоятельной ветви знаний. Несмотря на путешествия египтян в папирусных лодках, астрономия в Египте находилась на таком же примитивно-прикладном уровне, что и математика. Однако и крупнейший историк древности Геродот, и философ Демокрит, и сам Аристотель именно Египет считали колыбелью геометрии. Вот что пишет об этом древнегреческий ученый Евдем Родосский (V в. до н.э.). «Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении земли вследствие разливов Нила, постоянно смывающего границы участков. Нет ничего удивительного, что эта наука, как и другие, возникла из практических потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное».

Задачи

1. (*Папирус Райнда*) Египтяне, заменяя площадь круга площадью равновеликого квадрата, брали за сторону последнего $\frac{8}{9}$ диаметра круга. Найдите приближенное значение для числа π.

2. (*Папирус Райнда*) Для вычисления площади равнобокой трапеции египтяне брали произведение полусуммы оснований на боковую сторону. Найдите относительную погрешность вычисления для трапеции с основаниями 4 и 6 и боковой стороной 20.

3. (*Папирус Райнда*) Для вычисления площади равнобедренного треугольника египтяне брали половину произведения основания на боковую сторону. Найдите относительную погрешность вычисления для равнобедренного треугольника с основанием 4 и боковой стороной 10.

4. (*«Московский» папирус, 1850 г. до н.э.*) Определите длину сторон прямоугольника, если известно их отношение и площадь.

5. (*Акмимский папирус.*) Докажите ошибочность утверждения: площадь круга, длина окружности которого есть среднее арифметическое длин данных окружностей, равна среднему арифметическому их площадей. Найдите относительную погрешность для окружностей с радиусами 5 и 10.

Геометрия в Вавилоне

Возделывание почвы в районах блуждающих Тигра и Евфрата, текущих с Армянского нагорья, требовало бо́льшего технического искусства и регулировки, чем в районе Нила. К тому же Двуречье было перекрестком многочисленных караванных путей. Вместе с товарами в Вавилон попадали знания других народов.

Шумеры писали на глиняных плитках, которые в большом количестве находят при раскопках. Найдены 44 глиняные таблички, которые можно считать своеобразной математической энциклопедией вавилонян, относящейся к 2000 г. до н.э. В табличках даны способы решения практических задач, связанных с земледелием, строительством и торговлей.

Гордостью вавилонян по праву считается изобретение позиционной системы счисления, что существенно повышало их вычислительные возможности. Поэтому в Вавилоне времен царя Хаммурапи (1750 г. до н.э.) уже решались задачи, приводящие не только к линейным уравнениям (как в Египте), но и к квадратным, и даже к кубическим и биквадратным. Решение квадратных уравнений привело вавилонян к составлению таблиц квадратных корней из натуральных чисел, определявшихся по правилу: $\sqrt{x} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$. Хотя все задачи решались с определенными числовыми коэффициентами, но методы решения этих уравнений говорят о том, что вавилоняне знали общие правила.

Шестидесятеричная позиционная система счисления позволила вавилонской астрономии приобрести характер настоящей науки. От вавилонян ведет начало деление круга на 360 градусов, деление градуса на 60 минут, минуты — на 60 секунд.

Основной чертой геометрии вавилонян был ее арифметико-алгебраический характер. Как и в Египте, геометрия развивалась на основе практических задач измерения, но геометрическая форма задачи обычно являлась только средством для постановки алгебраической проблемы. Приведем пример, взятый с одной из табличек периода царствования Хаммурапи. «Площадь A, состоящая из суммы двух квадратов, составляет 1000. Сторона одного из квадратов составляет $\frac{2}{3}$ стороны другого квадрата, уменьшенной на 10. Каковы стороны квадратов?»

Если x и y — стороны квадратов, то мы будем иметь систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1000, \\ y = \dfrac{2}{3}x - 10, \end{cases}$ сводящуюся к квадратному уравнению $\dfrac{13}{9}x^2 - \dfrac{40}{3}x - 900 = 0$, имеющему положительный корень $x = 30$. В действительности решение задачи в клинописном тексте таблички, как и во всех восточных задачах, ограничивается перечислением всех этапов вычисления, необходимых для решения квадратного уравнения: «Возведи в квадрат 10, это дает 100, вычти 100 из 1000, это дает 900...» и так далее.

Тексты глиняных табличек вавилонян содержат правила для вычисления площадей простых прямолинейных фигур и для объемов простых тел. Теорема Пифагора была известна не только для частных случаев, но и в полной общности — трудно даже предположить, что вавилоняне подбором смогли найти такие «пифагоровы тройки» чисел, как 65; 72; 97 или 3456; 3367; 4825.

Для значения числа π вавилоняне брали в большинстве случаев библейское значение $\pi = 3$, хотя некоторые таблички содержат лучшее приближение: $\pi = 3\dfrac{1}{8}$. Площадь круга S и длину его окружности C в Вавилоне связывали формулой $S = \dfrac{C^2}{12}$. Позднее это правило использовалось в Индии и Китае.

Помимо простейших фигур, рассматривавшихся в Египте, математики Вавилона изучали некоторые правильные многоугольники, сегменты круга. Решались также задачи на подобие фигур. Пропорциональность отрезков, образующихся на прямых, пересеченных несколькими параллельными прямыми, была известна задолго до Фалеса. Это подтверждают клинописные таблички с задачами на построение пропорциональных отрезков путем проведения в прямоугольном треугольнике параллелей к одному из катетов. Известно было и свойство средней линии трапеции.

В заключение отметим, что вавилонская математика оказала огромное влияние на математику Индии и Древней Греции, а также послужила отправным пунктом для расцвета математической культуры Ванского царства (Урарту) и соседней с ним Армении.

Задачи

1. (*Древне-вавилонская глиняная табличка Гинкса.*) «Найти треть от прямого угла», то есть разделить прямой угол на три равные части.

2. За длину окружности вавилоняне принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найдите приближенное значение для числа π, которым пользовались вавилоняне.

3. Для вычисления площади четырехугольника вавилоняне и египтяне брали произведение полусумм противоположных сторон. Для каких четырехугольников эта формула точно определяет площадь?

4. (*Древне-вавилонская глиняная табличка.*) Найдите длину шеста, сначала вертикально прислоненного к стене, а затем смещенного так, что его верхний конец опустился на три локтя, а нижний конец отступил от стены на девять локтей.

Древнеиндийская геометрия

Древнеиндийская геометрия имела ярко выраженный практический характер и была тесно связана как с повседневными потребностями, так и с религиозными обрядами, в частности с культом жертвоприношения. В части дошедших до нас под названием «Сульва-сутра» («Правила веревки») священных древнеиндийских книг излагаются свойства фигур, связанных с построением алтарей-жертвенников. В настоящее время известно три книги «Сульва-сутра», авторами которых считаются Бодгойана (или Бодгояна, VI–VII в. до н.э.), Катиайана (или Катияна, IV–V в. до н.э.) и Апастамба (IV–V в. до н.э.).

В этих книгах встречаются описания вычисления площадей, построения квадрата по данной его стороне, деление отрезка пополам, есть примеры практического применения подобия треугольников и теоремы Пифагора, которая имела следующую формулировку: «Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его большей и меньшей сторон. Квадрат на диагонали квадрата в два раза больше самого квадрата».

В «Сутрах» правила и приемы приводятся так же, как у египтян и вавилонян, без каких-либо объяснений. Вот как выглядит «правило Катиайаны» для построения квадрата, равновеликого кругу: «Разделить диаметр на 15 равных частей и взять 13 таких частей для стороны квадрата, равного по пощади данному кругу». А вот правило для построения прямого угла — перпендикуляра к направлению жертвенника: «К концам отрезка длиной 39 прикрепим концы веревки длиной 51 с узлом на расстоянии 15 от одного из концов; держа за узел и, подтянув веревку, получим прямой угол». Кроме приведенной выше, индийцы знали другие пифагоровы тройки, например, 8; 15; 17 и 12; 35; 37.

Важным вкладом индусов в сокровищницу математических знаний является употребляемая нами десятичная позиционная система счисления, появившаяся в Индии предположительно в начале I в. н.э. Но не менее значительный вклад в развитие математики внесли индийские астрономы в области тригонометрии.

Астрономия возникла из потребности человека ориентироваться во времени (то есть иметь календарь) и в пространстве. Возникла необходимость определения положения светил, вычисления расстояний и углов, но из-за невозможности непосредственного измерения расстояний от Земли до планет были разработаны приемы нахождения взаимосвязей между сторонами и углами треугольника, две вершины которого расположены на Земле, а третью представляет планета или звезда.

Началом учению о тригонометрических величинах послужила замена хорды AB (рис. 2) окружности полухордой AC — линией синуса, которую индийцы называли «ардхаджива» (*джива* — хорда, тетива лука, *ардхаджива* — полухорда, а позже просто *джива*). Арабы при переводе исказили это слово в «джайб» (по-арабски — пазуха, выпуклость), что в XII в. было переведено на латынь словом *sinus*. Косинус индийцы называли «котиджива», то есть синус остатка (до четверти окружности), что по-латыни звучало как *sinus complementi* — синус дополнения, то есть sin $(90° - \alpha)$.

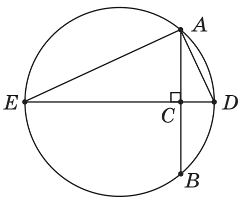

Рис. 2

Интересно, что результаты «Сульва-сутр» не всегда встречаются в более поздних манускриптах, что говорит о существовании различных традиций, связанных с различными школами в индийской науке.

Задача

1. (*«Сульва-сутра», IV–V в. до н.э.*) Найдите значение π, которым пользовались индусы, руководствуясь «правилом Катиайаны».

Древний Китай

Все сочинения, содержащие математические знания китайских ученых, дошли до нас от периода династии Хань (206–220 г. до н.э.), но в них содержится материал более раннего происхождения. Самое древнее китайское математико-астрономическое сочинение «Чжоу-би», написанное около 1100 г. до н.э., в первой главе содержит предложения, относящиеся к прямоугольному треугольнику, среди которых — и теорема Пифагора (рис. 3). В этом же сочинении содержится правило для определения площади круга: «Умножь диаметр сам на себя, раздели на четыре, возьми три раза».

Итогом всех математических знаний древних китайцев является трактат «Математика в девяти книгах» (II в. до н.э.), составителем которого является Чжан Цан (ум. 152 г. до н.э.). Трактат содержит 264 задачи без пояснительных текстов.

В трактате «Математика в девяти книгах» первая книга названа «Измерение полей» и содержит задачи на вычисление площадей земельных участков различной геометрической формы. Среди приведенных фигур имеются треугольники, трапеции, прямоугольники, круги, круговые сегменты, сектора и кольца. Правила вычисления площадей прямолинейных фигур в основном совпадают с современными, но терминология еще несовершенна: вместо понятия «трапеция» употребляется название «косое поле», вместо «сегмента» — «поле в виде лука» и т.д. Нет особого термина для радиуса, вместо него всегда задается диаметр. Для определения площади круга используются четыре различных правила (одно из них было приведено в «Чжоу-би»): «Умножь половину обвода на половину диаметра» — $\frac{2\pi R}{2}\cdot\frac{2R}{2}$; «умножь обвод на диаметр, раздели на четыре» — $\frac{2\pi R\cdot 2R}{4}$; «умножь обвод на себя, раздели на 12» — $\frac{2\pi R\cdot 2\pi R}{12}$.

В пятой книге «Математики в девяти книгах» содержатся задачи на вычисление объемов крепостных стен, валов, плотин, каналов и других сооружений, и в связи с этим вычисляются объемы параллелепипеда, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра. Из других письменных документов ученые делают предположение, что китайцы умели вычислять объем конуса и сферы, но достоверно сказать об этом сегодня не представляется возможным.

В восьмой книге трактата приводится правило «фан-чэн» для решения системы линейных уравнений матричным способом, то есть составлением матрицы (таблицы) коэффициентов перед неизвестными. Способ «фан-чэн» привел к появлению отрицательных чисел и правил для работы с ними.

Девятая книга трактата имеет название «Гоу-гу» — так назывались катеты прямоугольного треугольника, причем *гоу* — вертикальный катет (в буквальном переводе — «крюк»), *гу* — горизонтальный катет («ребро», «связка»). Все 24 задачи этой главы решаются по правилу «гоу-гу», связывающему катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника, то есть по теореме Пифагора. В летописях отмечается, что пифагорова тройка 3; 4; 5 была известна в Китае около 2200 г. до н.э.

Прослеживая зарождение и становление геометрии, легко усмотреть поразительную близость математических сведений у различных народов, практически не общавшихся. Это сходство (как по форме, так и по содержанию) говорит об общности практических задач, породивших эти математические знания. Так на протяжении тысячелетий опытом и разумом многочисленных безвестных тружеников и мыслителей закладывался фундамент математической науки.

Задачи

1. (*«Чжоу-би»*) Найдите значение π из древнекитайского трактата.

2. (*«Чжоу-би»*) Докажите, что удвоенная сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника без квадрата их разности равна квадрату их суммы.

3. (*Чжан Цан, «Математика в девяти книгах»*) Высота двери больше ее ширины на 6 чи 8 цуней, а наибольшее расстояние между углами (диагональ) равно 100 чжан. Найдите ширину и высоту двери. В задаче используются древнекитайские меры длины: 1 чжан равен 10 чи, 1 чи равен 10 цуней.

4. (*Чжан Цан, «Математика в девяти книгах»*) Гоу равен 5 бу, гу – 12 бу. Какова сторона квадрата, вписанного в этот треугольник?

5. (*Чжан Цан, «Математика в девяти книгах»*) Столб высотой h удален от горы на расстояние a. Человек, удаленный от столба на расстояние b, наблюдает совпадающими вершину горы и вершину столба. Какова высота горы, если уровень зрения человека расположен на высоте c?

6. (*Чжан Цан, «Математика в девяти книгах»*) В середине каждой стены квадратной крепости находятся ворота. На расстоянии 20 бу от северных ворот стоит столб. Если пройти от южных ворот на 14 бу и повернуть на запад, пройти еще 1775 бу, то можно увидеть столб. Какова сторона квадратной крепости?

7. (*Чжан Цан, «Математика в девяти книгах»*) В центре круглого водоема диаметром 1 чжан растет камыш, выступающий над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. Найдите глубину водоема и длину камыша.

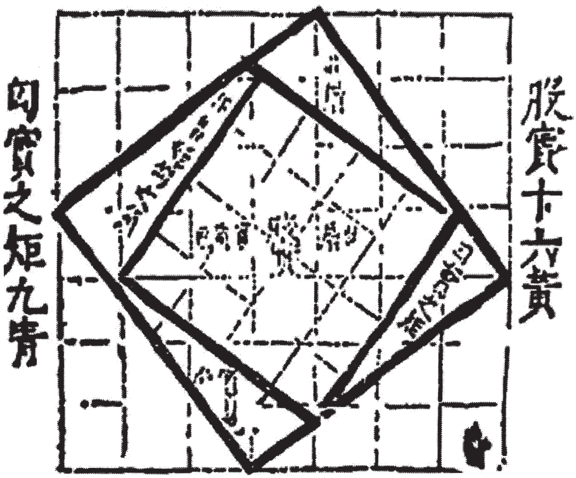

Рис. 3. Теорема Пифагора в древнекитайском трактате «Чжоу-би», 1100 г. до н.э.

Ионийская школа натурфилософии

Начало греческой науки положила ионийская (милетская) школа натурфилософии (первая половина VI в. до н.э.). Ее основателем считается милетскй купец, политический деятель, астроном, математик и философ Фалес (ок. 625–547 гг. до н.э). Время жизни Фалеса устанавливается по сообщениям о том, что он предсказал полное солнечное затмение в 585 г. до н.э. Об этом удивительном событии сообщают Ксенофан и Геродот. Реальная возможность такого предсказания вполне допустима.

Античная традиция единодушно называет Фалеса отцом греческой науки, первым из семи мудрецов Древней Греции. Ученик Аристотеля Евдем Родосский называл Фалеса первым астрономом, римский писатель и ученый Плиний Старший — первым физиком, а карфагенянин Апулей — первым геометром: «Фалес Милетский — один из тех знаменитых семи мудрецов и, несомненно, самый великий среди них — ведь это он был у греков первым изобретателем геометрии, самым опытным испытателем природы, самым сведущим наблюдателем светил, — проводя маленькие черточки, делал великие открытия: он изучал смены времен года, ветров дуновения, планет движения, грома дивное грохотание, звезд по кругам своим блуждания, солнца ежегодные обращения, а также луну — как она прибывает, родившись, как убывает, старея, и почему исчезает, затмившись».

О славе Фалеса как математика свидетельствуют достаточно ранние источники, например Аристофан (ок. 445–ок. 385 гг. до н.э.) в поэме «Птицы». Более поздний автор, математик и астроном Евдем, говорит о первых доказательствах Фалесом геометрических теорем: диаметр делит круг на две равные части; углы при основании равнобедренного треугольника равны; вертикальные углы равны; угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр, равен прямому углу; равенство треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам; равенство отрезков двух прямых, отсекаемых на них параллельными прямыми. Доказательства теорем Фалес, вероятно, проводил с помощью наложения фигур или из соображений симметрии. Математик и астроном Прокл (410–485 гг.), живший в Афинах тысячелетием позже, в своих комментариях к «Началам» Евклида писал: «Иногда Фалес рассматривал вопрос несколько обще, иногда опираясь на наглядность».

Занимаясь торговлей, Фалес много путешествовал. Легенда приписывает Фалесу составление первого руководства по кораблевождению, а его ученику Анаксимандру (ок. 610–546 гг. до н.э.) — составление первой географической карты известной грекам Ойкумены. Еще одно предание повествует о том, что именно Фалес научил моряков ориентироваться не по звездам Большой Медведицы, а по Полярной Звезде. По свидетельству Платона, однажды, наблюдая звездное небо, Фалес настолько был поглощен этим занятием, что упал в глубокий ров. Сопровождавшая его финикийская красавица-рабыня воскликнула: «Как можешь ты знать, что делается на небе, когда не видишь того, что делается у тебя под ногами!». Ответ финикийке последовал лишь через 2000 лет: в «Лекциях по истории философии» Георг Вильгельм Фридрих Гегель (1770–1831 гг.) заметил, что и философы в свою очередь подсмеиваются над людьми, «которые не могут упасть в яму, потому что они раз и навсегда лежат в ней и не обращают своих взоров ввысь».

Легенды рассказывают о том, как Фалес посрамил египетских мудрецов, найдя высоту пирамиды по ее тени: «Когда тень от вертикально стоящего столба будет той же длины, что и длина столба, тогда тень от пирамиды будет равна ее высоте» (рис. 4). Другая легенда повествует о том, как Фалес сумел измерить расстояние от берега до стоящего в гавани корабля. В одной из четырех гаваней Милета был построен дальномер, состоящий из трех вбитых в землю колышков A, B, C ($AB = BC$) и размеченной прямой $CK \perp CA$. При появлении корабля на прямой CK находили такую точку D, чтобы точки D, B и E оказывались на одной

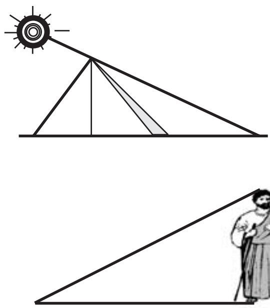

Рис. 4

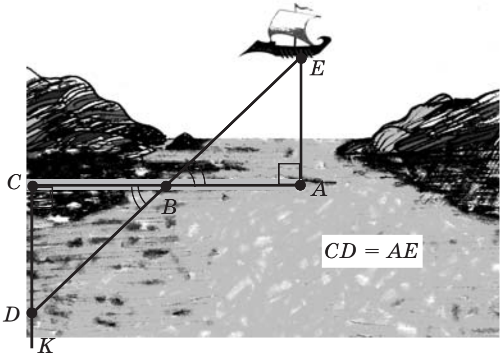

Рис. 5

прямой. Тогда расстояние CD на суше было искомым расстоянием AE до корабля (рис. 5).

Еще рассказывают, будто Фалес доказал, что расстояния от середины гипотенузы прямоугольного треугольника до вершин этого треугольника равны. Впрочем, легенд о Фалесе ходило множество, и это уже само по себе доказывает, что он был очень крупным ученым. Некоторые древние авторы приписывают Фалесу ряд сочинений: «Морская астрология», «О солнцестоянии», «О началах», однако ни одной строчки из них до нас не дошло. Согласно другой легенде, труды Фалеса были столь лаконичны, что имели всего лишь не более двухсот стихов.

Главная заслуга Фалеса состоит в том, что он, познакомившись в странах Востока с некоторыми геометрическими положениями, применявшимися для решения практических задач, проявил к ним теоретический интерес и попытался их обосновать. Именно с Фалеса начинается постепенное преобразование эмпирической египетской и вавилонской математики в греческую дедуктивную математику. По словам Плутарха, «Фалес был в то время единственным ученым, который в своих исследованиях пошел дальше того, что нужно было для практических потребностей, все остальные получили звание ученых за свое искусство в государственных делах». Вот почему из семи мудрецов самым известным является Фалес — первый естествоиспытатель и философ. Из философского наследия Фалеса самым существенным была попытка увидеть начало Мироздания в самой природе, взяв за первоначало не божественные субстанции, а материальную стихию (воду).

В 546 г. до н.э. персидский царь Кир завоевал Лидию и греческие полисы Малой Азии. Милет сумел сохранить относительную независимость, однако после неудавшегося восстания в 496 г. до н.э. город был полностью разрушен персами, а оставшиеся в живых были проданы в рабство.

Задачи

1. (*Фалес.*) Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром описанной около данного треугольника окружности.

2. (*Римская писательница Памфилия, I в., приписывает это доказательство Фалесу.*) Докажите, что вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр, прямой. Восстановите доказательство Фалеса из предположения, что сумма углов треугольника равна двум прямым углам.

3. (*Фалес.*) Докажите, что если одна из двух параллельных прямых отсекает на сторонах прямого угла равные отрезки, то и вторая прямая отсекает на сторонах этого угла равные отрезки. Обобщите задачу.

Появление планиметрии

«Золотой век» Греции, ознаменовавшийся в V в. до н.э. победой над Персией, породил условия для появления первой в истории человечества группы критически мыслящих ученых — «софистов». Они рассматривали математические проблемы скорее с целью уяснения их сути, чем ради пользы. Афинский философ Анаксагор (ок. 500–428 гг. до н.э.) в сочинении «О природе», положив в основу своего мировоззрения понятие бесконечности, писал: «Среди малых величин не существует наименьшей, а уменьшение идет непрерывно. Так же всегда имеется нечто большее, чем то, что большое». Такая мировоззренческая позиция не всегда смыкалась с официально принятой. За критику традиционных представлений Анаксагор едва не поплатился жизнью. Некоторое время он провел в афинской тюрьме, где, согласно легенде, занимался проблемой квадратуры круга — построением квадрата, равновеликого данному кругу. Сочинения Анаксагора до нас не дошли, но в конце V–начале IV в. до н.э. знакомство с этими работами считалось обязательным для всякого образованного афинянина. Кроме того, Анаксагор одним из первых начал заниматься вопросами перспективы, появившимися в связи с развитием театральной техники (первым был художник Агафарх, VI в. до н.э.).

После Анаксагора перспективой занимался автор атомистической теории строения Вселенной, известный философ Демокрит из Абдер во Фракии (ок. 460 г. – ок. 370 г. до н.э.). Как и Фалес, свои первоначальные знания Демокрит почерпнул на Востоке: «Никто не превзошел меня в построении фигур из линий, сопровождающемся доказательством, – даже арпадонапты (землемеры, «натягиватели веревки») в Египте».

В математических сочинениях Демокрита «О числах», «О касании круга и шара», «О геометрии», «Об иррациональных отрезках» развивается идея бесконечно малых величин. Так, Демокрит считал, что отношение малых отрезков пути к соответствующим малым промежуткам времени остается конечным и определяет скорость движения.

Свою геометрию Демокрит строил на основе атомистической структуры пространства: линии, поверхности, объемы считались им состоящими из большого числа конечных и далее неделимых элементов. Демокрит установил, что объем пирамиды равен третьей части объема призмы, а объем конуса – третьей части объема цилиндра с теми же основаниями и высотой. Как сообщают Плутарх и Аристотель, он разбивал конус на ряд наложенных друг на друга кружков малой толщины, после чего находил объем всего конуса. В рассуждениях Демокрита содержались зачатки исчисления бесконечно малых, впоследствии использованные Архимедом при вычислении площадей и объемов фигур.

Любопытно отметить, что греческие математики до Демокрита не разрабатывали «геометрию пространства». Платон в «Государстве» (ок. 360 г. до н.э.) отмечает, что с «наукой об измерении глубины дело обстоит до смешного плохо». Греческая стереометрия развивалась в ходе эволюции философской мысли, космологии и физики. Не случайно основателя атомистической школы называют первым исследователем в области стереометрии.

Уже в школе Демокрита, по-видимому, геометрия выводилась из небольшого числа предпосылок. Однако первый систематический курс планиметрии («Начала»; греческое *Stoiceia* (стойхейа), буквально — азбука; переносное значение – основные начала) принадлежит ионийскому философу и математику Гиппократу из Хиоса (ок. 440 г. до н.э.). В этом сочинении Гиппократа уже в полном объеме применяется принцип логического заключения от одного утверждения к другому («апагоге»). «Начала» Гиппократа включали в себя теорию параллельных, сумму углов треугольника, площади многоугольников, теорию дуг и хорд, построение правильных многоугольников и вычисление площади круга. Гиппократ применяет не только теорему Пифагора, но и соответствующее неравенство для непрямоугольных треугольников. «Начала» Гиппократа Хиосского составили содержание первых четырех книг «Начал» Евклида.

Единственный дошедший до нас цельный математический фрагмент «Начал» Гиппократа содержит рассуждения о так называемых «луночках» — плоских фигурах, ограниченных двумя круговыми дугами (рис. 6). Вопрос о площади таких луночек, выражающихся через диаметр, имеет прямое отношение к упоминавшейся выше проблеме квадратуры круга. В этой связи Гиппократ доказал, что площади подобных круговых сегментов относятся как квадраты стягивающих их хорд.

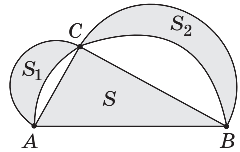

Рис. 6

Помимо квадратуры круга Гиппократ занимался проблемой удвоения куба — задачей о построении куба, имеющего объем вдвое больший, чем данный куб. При этом он свел задачу к планиметрической – к определению двух средних пропорциональных величин x и y для двух данных отрезков a и $2a$, то есть к отысканию искомого ребра x по данному ребру a из пропорции $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$.

«Начала» Гиппократа Хиосского доказывают существование уже упорядоченной плоскостной геометрии в Древней Греции в V в. до н.э., а сам Гиппократ считается одним из первых математиков-профессионалов.

Задачи

1. (*Гиппократ Хиосский.*) Докажите, что сумма площадей серпов («луночек Гиппократа»), лежащих между дугой полуокружности, построенной на гипотенузе как на диаметре, и дугами кругов, построенных на катетах того же прямоугольного треугольника, равна площади треугольника.

2. (*Гиппократ Хиосский.*) Докажите, что площадь луночки, отсекаемой от полукруга, построенного как на диаметре на гипотенузе прямоугольного равнобедренного треугольника, дугой окружности с радиусом, равным катету треугольника, проведенной из вершины прямого угла, равна площади этого треугольника.

3. (*Гиппократ Хиосский.*) Докажите, что сумма площадей трех луночек, заключенных между полукругом, построенным на большем основании равнобокой трапеции как на диаметре, и полукругами на трех других, равных между собой, сторонах трапеции вместе с площадью полукруга на меньшем основании равна площади трапеции.

Пифагорейский союз

Представителями другой большой научно-философской школы, возникшей ок. 530 г. до н.э., были пифагорейцы, называвшие себя в честь философа, мистика и политического деятеля Пифагора (ок. 570 – ок. 500 гг. до н.э.). Пифагорейцы в противовес софистам подчеркивали реальность изменений и стремились найти в природе и обществе неизменное. Для этого они изучали геометрию, арифметику, астрономию и музыку – так называемый «квадривиум». Позднее, в 360 г. до н.э., Платон, сформулировав идеалы рабовладельческой аристократии, предписал для нее обязательное изучение «квадривиума» для понимания законов Вселенной и умения управлять народом.

Пифагорейский союз был чем-то вроде тайного религиозно-этического братства. Его члены были обязаны вести пифагорейский образ жизни, включавший в себя вместе с системой аскетических предписаний и табу обязательные научные занятия. Результаты этих научных изысканий традиционно приписывались Пифагору.

Результаты научных исследований пифагорейцы держали в секрете, и лишь несчастный случай привел к разглашению этой тайны. По преданию, один из пифагорейцев потерял деньги общины. После этого несчастному было позволено зарабатывать деньги преподаванием геометрии. А геометрия получила название «Предание Пифагора». Вполне вероятно, что в то время существовала книга с таким же названием.

Сам Пифагор — личность весьма противоречивая и загадочная. Известно, что еще юношей Пифагор покинул родной остров, много путешествовал, двенадцать лет учился у египетских мудрецов, десять лет жил в Вавилоне, говорят, что был в Индии. Вернувшись в зрелом возрасте на остров Самос, Пифагор застал там правителем знаменитого тирана Поликрата. По свидетельству античного автора, «свободный человек не мог с достоинством переносить произвол и деспотизм», и Пифагор покидает остров. Через некоторое время Пифагор, окруженный свитой учеников, появляется в Кротоне на юге Италии, выступая в роли проповедника и пророка. В Кротоне был образован пифагорейский союз.

Выступая в городе в качестве не только пророка, но и политического деятеля, с явно выраженными антидемократическими настроениями, Пифагор и его школа втянули жителей Кротона в многолетнюю междуусобную войну. В результате пифагорейцы были изгнаны из города, а в других городах южной Италии против пифагорейцев поднялось восстание. Сам Пифагор был убит в одной из уличных схваток. Пифагорейский союз распался, но и после этого многие ученые античности называли себя пифагорейцами.

Поскольку до нас не дошли не только сами сочинения Пифагора, но даже их переложения другими авторами, то отделить творчество Пифагора от результатов его учеников сейчас невозможно.

Самым выдающимся представителем школы Пифагора считают Архита из Тарента (ок. 428 – 365 гг. до н.э.). Он впервые разработал теории рычага, весов, безмена, колеса, клина и блока. Ему же некоторые авторы приписывают изобретение винта, который мы теперь называем «винт Архимеда». Некоторые древние авторы рассказывают о том, что в 390 г. до н.э. Архит создал небольшой автомат в виде голубя, способный махать крыльями и даже взлетать. Как государственный деятель, Архит пользовался исключительным уважением: он семь лет подряд избирался стратегом (по закону стратеги избирались лишь на один год). Путем искусных дипломатических маневров Архит вызволил из плена Платона и спас жизнь великому философу. «Славный Архит, земель, и морей, и песков исчислитель...» — писал о нем Гораций.

В одном из математических текстов, приписываемых Архиту, среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое определены как средние члены соответственно арифметической, геометрической и гармонической пропорций:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}, \ \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}, \ \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}.$$

Из этих равенств легко получаются современные определения:

$$b = \frac{a+c}{2}, \ b = \sqrt{ac}, \ b = \frac{2ac}{a+c}.$$

С помощью этих понятий пифагорейцы выразили отношение основных гармонических интервалов музыкального звукоряда.

Смысл пифагорейского положения «все есть число» состоял в убеждении, что познание состоит в обнаружении числовых соотношений, скрытых в каждой вещи и в каждом явлении. Наиболее ярко роль числа в познании мира определил знаменитый пифагореец V в. до н.э. Филолай: «В число же никогда не проникает ложь, потому что она противна и ненавистна его природе, истина же родственна числу и неразрывно связана с ним с самого начала» («О природе»).

Арифметика пифагорейцев была скорее философией, чем математикой, и имела мало общего с современной ей вычислительной техникой Вавилона. Интерес пифагорейцев к числам носил религиозно-мистический характер. Числам приписывались особые, сверхъестественные свойства. Ученики Пифагора изучали числа не потому, что это было им нужно для чего-то другого, а потому, что ничего более достойного изучения они не знали. Потому-то в пифагорейской арифметике появились такие числа, как «совершенные» и «дружественные», «четно-четные» и «нечетно-нечетные», «треугольные», «квадратные» и «пятиугольные», «кубические» и «пирамидальные».

В геометрии пифагорейцев привлекали прежде всего свойства фигур, которые могут быть выражены числовыми соотношениями. Поэтому в особом почете оказалось соотношение между сторонами в прямоугольном треугольнике, которое вошло в науку как теорема Пифагора. О том, что это соотношение приписывается Пифагору, сообщает только Прокл, причем сам относится к этому с недоверием. Он же пишет о предании, что в знак благодарности за доказательство этой теоремы Пифагор принес в жертву богам 100 быков.

Вполне возможно, что ее первое доказательство действительно принадлежит школе Пифагора или даже ему самому, но это соотношение было известно и в Вавилоне времен царя Хаммурапи, и в Древнем Китае задолго до Пифагора.

Пифагорейцам были известны некоторые свойства правильных многоугольников и правильных многогранников. Они показали, как заполнить плоскость правильными треугольниками, шестиугольниками, квадратами, умели с помощью циркуля и линейки построить не только правильные треугольник, четырехугольник, шестиугольник, но и пятиугольник и десятиугольник. Последние две фигуры были нужны пифагорейцам для построения пятиконечной звезды — пентаграммы — служившей символом школы Пифагора. С пентаграммой связана легенда о том, как один из пифагорейцев по изображенной на дверях дома пятиконечной звезде нашел место, где после продолжительной болезни умер его соратник, после чего хозяин дома в знак благодарности за заботу о больном человеке был щедро вознагражден.

Задачи

1. Докажите, что сумма любых двух последовательных треугольных чисел является квадратным числом. Восстановите пифагорейское геометрическое доказательство.

2. Восстановите геометрическое доказательство следующих утверждений, используя пифагорейское представление нечетных чисел в виде гномонов (Г-образных фигур) (рис. 7):

а) сумма любого числа последовательных нечетных чисел есть квадратное число;

б) любое нечетное число является разностью двух квадратных чисел.

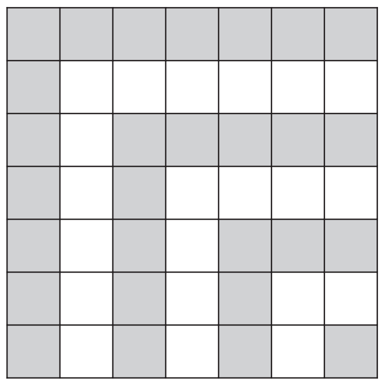

Рис. 7

3. Найдите все решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, представив квадратное число z^2 в виде суммы квадратных чисел x^2 и y^2, сторона одного из которых на единицу меньше стороны z. (*Решение этой задачи приписывается Пифагору*.)

4. Даны отрезки a и b, где $a > b$. Постройте отрезок x такой, что: а) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$;

б) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$;

в) x — среднее арифметическое отрезков a и b;

г) x — среднее геометрическое отрезков a и b;

д) x — среднее гармоническое отрезков a и b.

(Первые две задачи — следствие теоремы Пифагора, последние три взяты из текста, приписываемого Архиту.)

5. (*Архит.*) «Данный отрезок разделить гармонически», то есть на такие две части, чтобы меньшая относилась к большей, как большая ко всему отрезку. (Другими словами, по данному отрезку a

найти такой отрезок x, чтобы выполнялась пропорция $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$.)

6. Постройте: а) правильный 10-угольник;

б) правильный 5-угольник;

в) пентаграмму (правильную пятиконечную звезду) — тайный опознавательный знак пифагорейцев.

7. Докажите, что среднее арифметическое и среднее гармоническое двух отрезков a и b образуют с ними геометрическую пропорцию. (*Согласно утверждению Ямвлиха, задача привезена Пифагором из Вавилона*.)

Кризис основ античной математики

Главным, наиболее значительным среди открытий пифагорейской школы, было открытие несоизмеримости диагонали и стороны квадрата. Возможно, что это было связано с исследованием среднего геометрического, служившего для пифагорейцев символом аристократии. Чему равно среднее геометрическое единицы и двойки, двух священных символов? Легенда приписывает это открытие самому Пифагору. Открытие несоизмеримости долго держалось в тайне. Ученик Пифагора Гиппас из Метапонта разгласил эту тайну, за что пифагорейцы «его столь возненавидели, что не только изгнали его из общего товарищества, но даже соорудили ему могилу, как будто некогда бывший их товарищ в самом деле ушел из земной жизни» (*Ямвлих*). Вскоре Гиппас действительно погиб во время кораблекрушения. Так, заключали пифагорейцы, боги наказали клятвопреступника.

Открытие несоизмеримости стало поворотным пунктом в истории греческой математики. По своему значению для того времени оно может быть сопоставлено с открытием неевклидовой геометрии в XIX в. Разрушив гармонию арифметики и геометрии, оно привело к краху пифагорейских представлений о том, что соотношения любых величин могут выражаться отношением натуральных чисел.

Одновременно, вслед за простейшими случаями несоизмеримостей, были открыты более сложные. Пифагореец Феодор из Кирены (ум. 369 г. до н.э.), математик, астроном и музыковед, показал, что стороны квадратов площадью 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 несоизмеримы со стороной единичного квадрата. В 399 г. до н.э. юный и талантливый ученик Феодора Теэтет, бывший современником и другом Платона, дал первое общее учение об иррациональных величинах. В геометрической форме он доказал иррациональность («невыразимость», как говорили греки) чисел вида $\sqrt{n}$, где n — натуральное и не является точным квадратом, а также иррациональность выражений $\sqrt[3]{n}$, где n не является точным кубом, $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$, $a \pm \sqrt{n}$, $\sqrt{n-m}$, $\sqrt{\sqrt{n} \cdot \sqrt{m}}$, где $n \neq m$. Эти результаты Теэтета собраны в десятой, наиболее трудной, книге «Начал» Евклида.

В это же время «последний пифагореец» Архит, «вызывавший удивление у людей своим совершенством во всех отношениях» (*по словам Диогена Лаэртского*), дал «музыкальное доказательство» иррациональности числа $\sqrt{2}$. Струны длиной 1 и $\sqrt{2}$ при одинаковой толщине и натяжении вместе давали диссонанс, тогда как приятные для слуха созвучия (консонансы) получаются при длине n и $n + 1$. Из этого Архит заключил, что число $\sqrt{2}$ не может быть выражено отношением двух натуральных чисел, то есть иррационально.

Выход из ситуации, когда диагональ единичного квадрата можно построить, но нельзя выразить никаким рациональным числом (других чисел греки просто не знали), был найден в геометризации математики. Раз множество отрезков богаче множества рациональных чисел, то и следует оперировать только отрезками, заменив сложение чисел сложением отрезков, вместо произведения чисел рассматривать прямоугольник с заданными сторонами и т.д.

Это решение проблемы позволило греческим математикам продвинуться далеко вперед. Однако ограниченные возможности геометрической алгебры (необходимость соблюдения принципа однородности, согласно которому отрезок нельзя сложить с прямоугольником, невозможность рассматривать уравнения степени выше третьей) в дальнейшем послужили тормозом свободному развитию математической мысли в древности.

Задачи

1. (*Пифагор.*) Докажите несоизмеримость диагонали и стороны единичного квадрата.

2. (*Феодор.*) Постройте отрезок, равный:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{7}$,

и докажите иррациональность этих чисел.

3. Докажите несоизмеримость диагонали и стороны единичного куба.

Академия Платона

Дальнейшее развитие математики связано с величайшим философом Древней Греции Платоном (427–347 гг. до н.э). Платон — это не имя, а прозвище Аристокла, полученное им за свою мускулатуру атлета (от греческого πλατοζ — ширина, то есть широкий, широкоплечий).

Хотя Платон был учеником Феодора из Кирены, дружил с Архитом и Теэтетом, сам он математиком не был. Однако математике Платон придавал исключительно большое значение. При входе в Академию была надпись: «Пусть не входит сюда тот, кто не знает геометрии». Одному из желающих поступить в его школу для изучения философии без знания геометрии Платон сказал: «Уйди прочь! У тебя нет орудия для изучения философии».

Применение математики к практике Платон считал низменным занятием. Математику Платон ценил только как науку, необходимую для успешных занятий философией. Математические проблемы рассматриваются им в ряде диалогов: «Менон», «Теэтет», «Государство», «Послезаконие». В последнем сочинении он излагает теорию пропорций Архита. Не добавив к математической теории многогранников ни слова, но включив их в свою космогоническую теорию, Платон увековечил свое имя в математике — пять правильных многогранников (тетраэдр, куб и додекаэдр, известные еще Пифагору, а также октаэдр и икосаэдр, открытые Теэтетом, часто называют «платоновыми телами» или «космическими фигурами»).

Со школой Платона связано немало выдающихся ученых, среди которых уже упоминавшиеся Феодор, Теэтет и Архит. Еще более крупной фигурой, также связанной с Академией Платона, был «отец логики» Аристотель из Страгиры (384–322 гг. до н.э.).

Аристотель не был математиком и не написал ни одного математического сочинения, но был хорошо знаком с достижениями греческих математиков. В его книгах содержатся важные замечания, относящиеся к математическим наукам. Говоря о математике, Аристотель отмечал особенности математического метода: изучая количественные свойства предметов, математика отвлекается от всех чувственно воспринимаемых свойств этих предметов. Поэтому математические истины познаются не с помощью органов чувств, а с помощью разума. Этим определяется логика построения математики: исходя из определений и аксиом, то есть бесспорных положений, с помощью логических умозаключений выводятся теоремы и другие следствия.

Аристотель является создателем формальной логики, то есть учения об умозаключениях и доказательствах. Это учение, изложенное им в трактате «Аналитика», не признавалось Аристотелем отдельной научной дисциплиной, а подразумевалось как орудие всякой науки. Трактаты Аристотеля по логике значительно повлияли на уточнение математической аксиоматики и на строгость ее изложения.

Задачи

1. Найдите все решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, представив квадратное число z^2 в виде суммы квадратных чисел x^2 и y^2, сторона одного из которых на два меньше стороны z. (*Решение этой задачи приписывается Платону*.)

2. (*Аристотель.*) Найдите логическую ошибку в софизме: «Сидящий встал. Кто встал, тот стоит. Следовательно, сидящий стоит».

Евдокс Книдский

Величайшим математиком IV в. до н.э. является еще один слушатель Академии Платона Евдокс Книдский (ок. 408 – ок. 355 г. до н.э.). Он был не только блестящим математиком, но и знаменитым астрономом, искусным врачом, прекрасным оратором, известным философом, географом и политическим деятелем. В молодости он изучал математику у Архита в Таренте, медицину у Филистиона в Сицилии, в 23-летнем возрасте поселился в гавани города Пирея, откуда совершал ежедневные походы в платоновскую Академию и обратно (из-за бедности Евдокс не мог поселиться в Афинах). Позднее, при содействии друзей, он совершил путешествие в Египет, где учился астрономии и математике у жрецов Гелиополя. За эти разносторонние качества еще при жизни друзья прозвали его *Eu doxoz* — окруженный почетом, знаменитый. Настоящего имени Евдокса мы не знаем.

К сожалению, от всех его сочинений до нас дошли лишь отдельные цитаты, приводимые более поздними авторами. Считается, однако, что V, VI и XII книги «Начал» Евклида, отличающиеся особенной логической завершенностью, принадлежат Евдоксу. Интересно отметить, что математический трактат Евдокса тоже назывался «Начала».

Создание моделей Космоса, основанных на представлении о равномерно вращающихся сферах, явилось стимулом для разработки сферической геометрии, разработки, видимо, велись в школе Евдокса, но до нас не дошли. Наука располагает лишь двумя небольшими сочинениями, написанными в конце IV в. до н.э. Автоликом из Питаны, «О вращающейся сфере» и «О восходах и заходах». Еще один ученик Евдокса, Менехм, занимаясь решением задачи об удвоении куба, впервые дал связное учение о конических сечениях (ок. 340 г. до н.э.).

Развив достижения Архита и Теэтета в области теории пропорций, Евдокс построил общую теорию отношений. Она была основана на новом определении величины, включающем в себя как числа, так и любые непрерывные величины. Это понятие определялось с помощью двух аксиом равенства и неравенства, к которым Евдокс добавил аксиому, теперь называемую «аксиомой Архимеда»: «Две величины находятся между собой в определенном отношении, если любая из них, взятая кратно, может превзойти другую». Из этих положений была разработана строгая теория отношений, изложенная Евклидом в V книге «Начал», и учение о подобии, составившее VI книгу «Начал» Евклида.

Теория отношений Евдокса покончила с арифметической теорией пифагорейцев, применимой только к соизмеримым величинам. Это была чисто геометрическая теория, сделавшая излишними какие-либо оговорки относительно соизмеримости или несоизмеримости рассматриваемых величин. Это означает, что именно

Евдокс преодолел «кризис основ математики», направив ее по пути геометризации.

Метод исчерпывания Евдокса

Важнейшим вкладом Евдокса в математику была разработка «метода исчерпывания», заложившего основы теории пределов и подготовившего почву для позднейшего развития математического анализа. В основе метода исчерпывания лежит следующее положение: если от какой-либо величины отнять половину или более, затем ту же операцию проделать с остатком, и так поступать дальше и дальше, то через конечное число действий можно дойти до такой величины, которая будет меньше любого наперед заданного числа. К этой идее довольно близко подошел во второй половине V в. до н.э. древнегреческий философ-софист Антифонт, но строгое обоснование метода исчерпывания дал лишь Евдокс.

Поясним суть метода исчерпывания, рассмотрев доказательство теоремы, известной еще Гиппократу Хиосскому, но доказанной только Евдоксом.

«Круги будут друг к другу как квадраты на диаметрах» (то есть площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров; формулировка взята из XII книги «Начал» Евклида). Для доказательства воспользуемся вспомогательной теоремой, доказанной также Евдоксом и приведенной в X книге «Начал» Евклида.

Лемма Евдокса (рис. 8). Даны две величины a и b, где $a > b$. Если из a вычесть часть $c > \frac{a}{2}$, из остатка a_1 снова вычесть часть $d > \frac{a_1}{2}$ и т. д., то через конечное число шагов получим $a_n < b$.

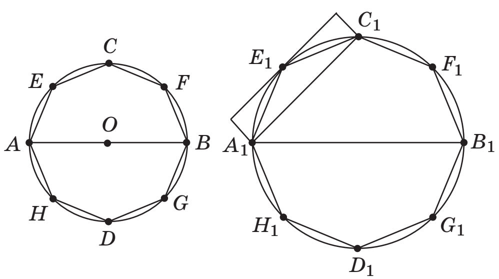

Рис. 8

Доказательство теоремы проведем методом от противного: пусть квадрат отношения диаметров AB и A_1B_1 не равен отношению их площадей S и S_1. Тогда $\frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{S}{S_2}$, где $S_2 < S_1$.

В круг диаметра A_1B_1 впишем квадрат $A_1C_1B_1D_1$. Площадь квадрата $A_1C_1B_1D_1$ больше площади полукруга с диаметром A_1B_1, так как площадь описанного квадрата вдвое больше площади вписанного квадрата, а площадь круга меньше площади описанного квадрата. Разделим дуги A_1C_1, C_1B_1 и т.д. пополам и впишем в круг правильный восьмиугольник $A_1E_1C_1F_1B_1G_1D_1H_1$. Тогда площадь треугольника $A_1E_1C_1$ будет больше половины площади соответствующего кругового сегмента, так как площадь описанного около сегмента прямоугольника больше площади сегмента и равна удвоенной площади треугольника. Продолжая дальше процесс удвоения числа сторон и увеличения площади правильных вписанных многоугольников, согласно лемме Евдокса, сумма площадей всех оставшихся круговых сегментов будет меньше разности $S_1 - S_2$, а площадь вписанного m-угольника окажется больше S_2. Впишем теперь в круг с диаметром AB правильный m-угольник с тем же числом сторон. На основе ранее доказанной теоремы (она приведена в XII книге «Начал» Евклида) отношение площадей подобных вписанных многоугольников равно отношению квадратов диаметров соответствующих окружностей, то есть $\frac{S_m}{S_{m_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}$, где S_m и S_{m_1} — площади m-угольников, вписанных в соответствующие круги. Значит $\frac{S}{S_2} = \frac{S_m}{S_{m_1}}$ или $\frac{S}{S_m} = \frac{S_2}{S_{m_1}}$, что нелепо, ибо $S > S_m$, но $S_2 < S_{m_1}$. Аналогичное противоречие находится в случае для $S_2 > S_1$, откуда следует требуемое.

В доказательстве Евдокса речь идет о пределе возрастающей и ограниченной сверху последовательности площадей правильных вписанных n-угольников и доказывается, что разность между площадью круга и площадью вписанного многоугольника может быть меньше произвольного наперед заданного $\varepsilon > 0$. В приведенном доказательстве «исчерпывается» пространство, заключенное между возрастающими вписанными многоугольниками и кругом.

С помощью этого метода Евдокс строго доказал, что объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ объема призмы, а объем конуса равен $\frac{1}{3}$ объема цилиндра с теми же основаниями и высотой. В дальнейшем метод исчерпывания стал у греков стандартным методом точного доказательства при вычислении площадей и объемов. Недостатком этого метода было то, что надо было заранее знать результат, чтобы его доказать. Придти же к этому результату нужно было другим путем, менее строгим, но более результативным. Этот метод возник в школе Демокрита, и суть его состояла в том, что отрезок, площадь, объем делились на большое, но конечное число неделимых «геометрических атомов». Вычисление длины отрезка, площади или объема фигуры сводилось к суммированию всех «атомов», из которых состоит фигура. В античности выбор между строгим, но относительно бесплодным методом исчерпывания и менее строгим, но более плодотворным «атомистическим» методом был решен в пользу первого.

Задачи

1. Докажите теорему Евдокса для $S_2 > S_1$.

2. (*Евклид, V книга «Начал».*) Докажите, что если a — наибольший отрезок в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то сумма крайних пропорциональных больше суммы средних пропорциональных.

3. (*Евклид, VI книга «Начал».*) Для данных двух отрезков найти средний пропорциональный.

4. (*Евклид, VI книга «Начал».*) Для трех данных отрезков найти четвертый пропорциональный.

УДК 372.851.4
ББК 74.262.21
Ф42

Общая редакция серии «Математика» *В.Т. Лисичкин*

Феоктистов И.

Ф42 Геометрия до Евклида в очерках и задачах / И. Феоктистов. – М. : Чистые пруды, 2005. – 32 с. (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып. 6).

ISBN 5-9667-0118-0

Брошюра адресована учителю математики и предназначена для подготовки к урокам и проведения внеклассных мероприятий.

УДК 372.851.4
ББК 74.262.21

Учебное издание

ФЕОКТИСТОВ Илья

ГЕОМЕТРИЯ ДО ЕВКЛИДА В ОЧЕРКАХ И ЗАДАЧАХ

Редактор *Г.П. Хозяинова*
Корректор *Л.А. Громова*
Компьютерная верстка *С.В. Сухарев*
Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-19078 от 08.12.2004 г.

Подписано в печать 11.11.2005.
Формат 60ґ90$^1/_{16}$. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Печ. л. 2,0.
Тираж экз. Заказ №
ООО «Чистые пруды», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
http://www.1september.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в Раменской типографии
Сафоновский пр., д. 1, г. Раменское, МО, 140100
Тел. 377-0783. E-mail: ramtip@mail.ru

ISBN 5-9667-0118-0