

Английский язык

Библиотека в школе

Биология

География

Дошкольное образование

Здоровье детей

Математика

№4/2005

Информатика

Искусство

История

Литература

Начальная школа

Немецкий язык

Русский язык

Спорт в школе

Управление школой

Физика

Французский язык

Химия

Школьный психолог

П. ЧУЛКОВ



**Тринадцать
турниров Архимеда**

БИБЛИОТЕЧКА «ПЕРВОГО СЕНТЯБРЯ»
Серия «Математика»
Выпуск 4

П. Чулков

**ТРИНАДЦАТЬ ТУРНИРОВ
АРХИМЕДА**

Москва
Чистые пруды
2005

ИЗ ИСТОРИИ ТУРНИРОВ АРХИМЕДА

Турнир Архимеда. Соревнование с таким названием состоялось в январе 1992 года в школе № 5 (ЮЗАО, Москва).

В 2005 году Турнир Архимеда проводится уже четырнадцатый раз и второй год подряд в школе № 2007 (ЮЗАО, Москва, Южное Бутово).

В настоящее время Турнир Архимеда – это разветвленная система математических соревнований, в которых ежегодно участвует две-три тысячи школьников, отчеты о соревнованиях регулярно печатаются на страницах газеты «Математика».

В систему Турниров Архимеда входят:

Название	Классы	Зачет	Время проведения
Зимний тур	6–7 кл.	личный	середина января
Заочный тур	6–7 кл.	лично-командный	декабрь–февраль
Весенний тур	5–6 кл.	лично-командный	начало апреля
Математические регаты	7–11 кл.	командный	в течение года

Информацию о турнире можно найти на страницах газеты «Математика», а также на сервере Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) www.mccme.ru/olympiads а также www.logic.ru

Турниры Архимеда не являются отборочными, его победителей не награждают «особо ценными» призами. Тем не менее турнир живет и продолжает пользоваться большой популярностью у школьников.

Почему? Как нам кажется, просто потому, что в турнире участвовать интересно. И это особенно важно в наше «прагматичное» время, поскольку никакие прагматичные цели не будут достигнуты, если у школьников вовремя не возникнет интерес к математике, а математика, прежде всего, это решение задач.

Сценарий зимнего тура (а именно ему и посвящена данная брошюра) прост:

1) в течение двух часов школьники пишут работу, состоящую из шести задач, а затем смотрят кинофильм;

2) пока дети отдыхают, члены жюри проверяют работы; сразу после кинофильма подводятся итоги и проходит награждение победителей.

Отметим здесь, что большая нагрузка ложится при этом на жюри – в течение полутора-двух часов приходится проверять в среднем 700–800 работ, причем некоторые работы не один раз.

В составе жюри, – а его в разные годы возглавляли доктор физ.-мат. наук Ю.В. Селиванов (МАТИ), директор Института логики, когнитологии и развития личности А.В. Смирнов, учитель математики школы № 218 А.Д. Блинков, – плодотворно работают профессиональные математики, преподаватели вузов, студенты и аспиранты, а также старшеклассники.

Четкая организация, доброжелательность ко всем участникам олимпиады: детям, родителям, учителям, гостям турнира, членам жюри, создает атмосферу праздника, что неоднократно отмечалось участниками турнира.

Отметим, что при подборе задач была предпринята попытка заложить в них определенный обучающий потенциал. Так, тематика задач не слишком меняется от турнира к турниру, что позволяет учителям вести целенаправленную подготовку к нему. В настоящем сборнике представлены традиционные арифметические задачи, задачи на свойства чисел (четность, делимость, дроби), задачи на составление алгоритмов, инварианты, логику, разрезания и оптимизацию. Тот факт, что тематика задач известна заранее, стимулирует изучение соответствующих тем, не снижая спортивного интереса турнира, так как выбор задач по эти темам очень широк.

В подборе и обсуждении задач в разные годы участвовали Д. Нистратов, Р. Лепешков, Е. Шершнев, А. Блинков, А. Гурвиц, Т. Абакиров, А. Спивак, А. Ковальджи, В. Гуровиц, Т. Струков, А. Обрубов, Ф. Пчелинцев, А. Марачев, А. Зайцева, Е. Шапарин и многие другие.

ТРИНАДЦАТЬ ТУРНИРОВ АРХИМЕДА

Условия задач

1. Неверное равенство. На доске написано равенство:

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 20$$

(вместо $*$ в неизвестном порядке написаны знаки $+$ и $-$). Докажите, что это равенство не может быть верным.

2. Загадочная тетрадь. Однажды на лестнице я нашел странную тетрадь. В ней было написано 100 утверждений:

— — — — — В этой тетради ровно 1 неверное утверждение.

— — — — — В этой тетради ровно 2 неверных утверждения.

...

— — — — — В этой тетради ровно 100 неверных утверждений.

Какое утверждение здесь верно?

3. Похудеть к лету. За весну Обломов похудел на 25%, затем за лето поправился на 20%, затем за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он в итоге или поправился?

4. Бракованная монета. Известно, что монеты в 1, 2, 3 и 5 копеек весят соответственно 1, 2, 3 и 5 грамм. Среди четырех монет (по одной каждого достоинства) одна – бракованная: отличается весом от настоящей. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить бракованную монету?

5. Делимость на 11. Докажите, что если выражение $3a + 4b + 5c$ при некоторых целых значениях a , b и c делится на 11, то и выражение $9a + b + 4c$ при этих значениях a , b и c делится на 11.

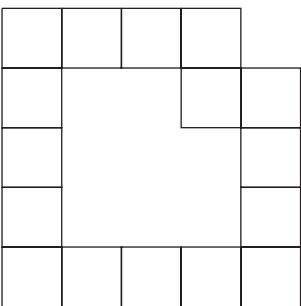
6. На некотором острове живут два племени: «Рыцари» и «Лжецы» (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Перед нами 3 островитянина: A , B и C , о каждом из которых известно, что он либо рыцарь, либо лжец. Двоих из них (A и B) высказывают следующие утверждения:

A : «Мы все лжецы», B : «Один из нас рыцарь».

Кто из трех островитян (A , B , C) рыцарь и кто лжец?

7. Делимость на 1993. Докажите, что сумма $1 + 2 + \dots + 1993$ делится на 1993.

8. На одной ферме число коров на 12,5% меньше, чем на другой, но средний убой каждой коровы на 8% выше. На какой ферме получают молока меньше и на сколько процентов?



Rис. 1

9. Цепочка из плиток. Можно ли сложить замкнутую цепочку из 1993 квадратных плиток? Пример замкнутой цепочки на рисунке 1.

10. Верно ли равенство

$$3^{100} + 7^{100} = 8^{100} ?$$

11. Фальшивая монета. Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Известно, что фальшивая монета отличается от настоящих, но неизвестно – легче она настоящей или тяжелее. Все настоящие монеты имеют одинаковую массу. С помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь выделите фальшивую монету и одновременно установите, легче она или тяжелее остальных.

12. На острове рыцарей и лжецов. Перед нами 3 островитянина: *A*, *B* и *C*, о каждом из которых известно, что он либо рыцарь, либо лжец. Пусть *A* и *B* высказывают следующие утверждения: *A*: »Мы все лжецы», *B*: »Ровно один из нас лжец». Можно ли определить, кто *B*: рыцарь или лжец? Можно ли определить, кто такой *C*?

13. Пример на деление. Можно ли придумать пример на деление с остатком, чтобы делимое, делитель, частное и остаток (взятые в произвольном порядке) оканчивались на 9, 7, 3 и 1?

14. Разрежьте квадрат на четыре части так, чтобы каждая часть соприкасалась с тремя остальными (части соприкасаются, если у них есть общий участок границы).

15. Вера и Аня посещают математический кружок, в котором больше 91% мальчиков. Найдите наименьшее возможное количество участников кружка.

16. Число на доске. С числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: заменять его удвоенным или стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций из числа 458 получить число 14?

17. Апельсины и лимоны. Апельсин стоит 278 рублей, а лимон 455 рублей. Куплено 10 фруктов общей стоимостью 3842 рубля. Сколько было куплено апельсинов?

18. Числа в таблице. В прямоугольной таблице 20×10 (20 строк, 10 столбцов) записаны числа. В каждой строке выбирается наи-

меньшее число, среди этих (наименьших в строке) чисел выбирается наибольшее. В каждом столбце выбирается наибольшее число, среди этих (наибольших в своей строке) чисел выбирается наименьшее. Какое из двух чисел больше (если это разные числа)?

19. *Как разрезать фигуру* на рисунке 2 на три равные части?

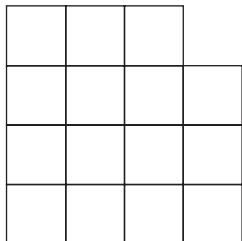


Рис. 2

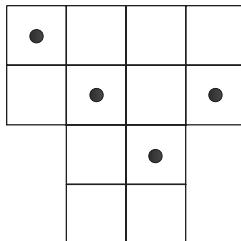


Рис. 3

20. *Морская вода* содержит 5% соли. Сколько пресной воды нужно добавить к 40 кг морской, чтобы содержание соли в смеси стало 2%?

21. *Равные кучки*. В наборе 23 гири массой 1, 2, ..., 23 кг. Можно ли их разложить на две равные по массе кучки, если гиря в 21 кг потеряна?

22. *Робот Вася* умеет делить на 7. Если ему попадается какое-нибудь число, он делит его на 7, затем, если удалось разделить без остатка, он делит на 7 частное и так далее, до тех пор пока это возможно. Сколько раз он сможет разделить на 7 число $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100$ (произведение всех натуральных чисел от 1 до 100)? Ответ объясните.

23. *Целые числа*. Числа a и b – целые. Известно, что $a + b = 100$. Может ли сумма $7a + 3b$ равняться 627?

24. *Бактерии*. Один вид бактерий имеет такой закон развития: каждая бактерия живет 1 час и каждые полчаса порождает новую (всего 2 новых бактерии за свою жизнь). Сколько бактерий получится из одной через: а) 1 час; б) 3 часа; в) 6 часов? Ответ объясните.

25. *Четыре части*. Разделите эту фигуру (рис. 3) по линиям сетки на четыре одинаковые части так, чтобы в каждой из частей было по одной отмеченной точке.

26. *Порядок цифр*. Представьте число 987654321 в виде суммы двух слагаемых так, чтобы каждое из них состояло из тех же девяти цифр, но записанных в другом порядке.

27. Чет или нечет? Вычислили произведение всех чисел от 1 до 100, а затем в нем вычеркнули все нули. Какой будет последняя цифра получившегося числа – четной или нечетной? Ответ объясните.

28. А или В? 2% натурального числа A больше, чем 3% натурального числа B . Верно ли, что 5% числа A больше, чем 7% числа B ?

29. Вирус – убийца. В колонию, состоящую из 200 бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вириуса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вириуса уничтожают две бактерии, и затем оба вириуса и все оставшиеся бактерии снова делятся и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго, или, если она в конце концов погибнет, то через какое время это произойдет?

30. Перевод с Ам-Ямского. Дан русский текст и его перевод (постстрочный) на язык племени Ам-Ям:

текст:

Мышка ночью пошла гулять.

Кошка ночью видит – мышка!

Мышку кошка пошла поймать.

перевод:

Ам ту му ям

Ту ля бу ам

Гу ля ту ям

Составьте фрагмент русско-ам-ямского словаря по этому переводу (в языке Ам-Ям нет знаков препинания).

31. Точки и отрезки. Нарисуйте 8 точек и соедините их отрезками так, чтобы отрезки не пересекались и из каждой точки исходило ровно 4 отрезка.

32. Два рыбака поймали 70 рыб, причем $\frac{5}{9}$ улова первого рыбака составляли караси, а $\frac{17}{17}$ улова второго – окунь. Сколько рыб поймал каждый?

33. Числа на доске. На доске написано три числа: 19, 9 и 7. С этими числами разрешается делать две операции: 1) Удвоить любое из чисел; 2) От каждого из чисел отнять по 1. Можно ли, проделав несколько таких операций, получить три нуля?

34. Делимость на 116. Натуральные числа a и b таковы, что $19a = 97b$. Докажите, что $a + b$ делится на 116.

35. За круглым столом сидят 8 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый из них говорит: «Мои соседи – рыцарь и лжец». 1) Сколько среди них лжецов? 2) Сколько среди них лжецов, если за столом – 9 человек?

36. Пещера Али-Бабы. Али-Баба нашел пещеру полную золота и алмазов. Полный мешок золота весит 200 кг, полный мешок алмазов – 40 кг. Али-Баба может унести за один раз не более 100 кг. Килограмм золота стоит 20 динаров, килограмм алмазов – 60 динаров. Сколько денег он может получить за золото или алмазы, унесенные в одном мешке за один раз?

37. «Треугольная» сетка сделана из шнура, который может гореть (рис. 4). Огонь распространяется по шннуру с одной и той же скоростью по всем направлениям (каждое звено сгорает ровно за 1 минуту). Какие из отмеченных звеньев (AB , BC , CD , DE или AF) сетки сгорят последними, если поджечь сетку в точке O ? За какое время они сгорят?

38. Поход за молоком. В 1975 году Антон пошел в молочный магазин. Денег у него не было, но были пустые бутылки – 6 литровых (стоимостью 20 коп.) и 6 – пол-литровых (стоимостью 15 коп.). В магазине было розливное молоко по 22 коп. л. В какое наибольшее количество молока он может принести домой? Другой посуды, кроме пустых бутылок, у него нет.

39. Куб. Расставьте цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 в вершинах куба так, чтобы суммы цифр, стоящих в каждой грани, были равны (рис. 5).

40. Числа. На доске написаны три целых числа A , B , C . В следующей строке под ними пишут разности: $A - B$, $B - C$, $C - A$ и так далее, до пятой строки включительно. Подберите числа A , B и C так, чтобы в пятой строке было число 1998. Можно ли подобрать числа A , B и C так, чтобы в пятой строке было число 1997?

41. Шахматный турнир. В круговом турнире шахматистов (каждый по одному разу играет со всеми остальными участниками, причем за победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0) участвуют 30 человек. Чтобы выполнить норму IV разряда требуется набрать 60% очков. Сколько партий будет сыграно в турнире? Какое наибольшее число шахматистов может стать разрядниками по итогам турнира?

42. Найдите икс! Вася разделил число 1998 на 2, а затем умножил его на x и в результате получил число 111...111 (в десятичной записи числа – одни единицы). Чему равен x ?

43. Облицовка стены. Можно ли прямоугольную стену размером 1998×1999 покрыть плитками размером 1×4 и 2×2?

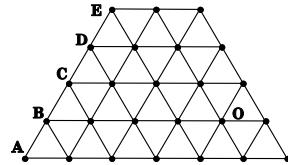


Рис. 4

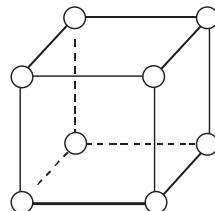


Рис. 5

44. Сумма цифр. Найдите наименьшее четырехзначное число, у которого сумма цифр больше, чем у любого меньшего числа.

45. Лъвенок и Черепаха. Лъвенок решил покататься на большой черепахе, но сначала ему нужно ее догнать. Какое расстояние придется пробежать Лъвенку, прежде чем он сможет покататься, если его скорость в 10 раз больше скорости Черепахи, а Черепаха находится в 180 метрах от лъвенка?

46. Новый год. За праздничным столом – 30 человек, 26 из них носят имя Саша. В полночь они все рассаживаются за круглым столом и каждый загадает одно желание, но исполняются желания только у тех, кто будет сидеть между двумя Сашами. Какое: а) наименьшее количество желаний может исполниться? б) наибольшее количество желаний может исполниться?

47. Что сказал Вася? Каждый из трех приятелей Антон, Боря и Вася либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Всем троим задали вопрос: «Есть ли среди двух остальных хоть один правдивый?» На это Антон ответил: «Да». Боря ответил: «Нет». Что сказал Вася? Слово «приятели» в данном случае означает, что каждый из троих знает об остальных, кто правдивый, а кто лжец.

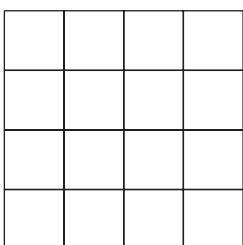


Рис. 6

48. Проволочная сетка. Можно ли сетку, изображенную на рисунке 6 сделать:

1) из 8 кусков проволоки, каждый из которых имеет длину 5?

2) из 5 кусков проволоки, каждый из которых имеет длину 8?

Куски можно сгибать, но нельзя разрезать.

49. Шесть крепостей. Король хочет построить шесть крепостей и соединить каждые две из них дорогой. Начертите такую схему расположения дорог и крепостей, чтобы на ней было только три перекрестка и на каждом из них пересекалось ровно две дороги.

50. Восстановите пример, учитывая, что одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами: $\overline{ABC} \times \overline{CBA} = 692443$.

51. Кузнечик прыгает по координатной прямой малыми и большими прыжками. Большой прыжок составляет 12 единичных отрезков, малый – 7.

1) Может ли он попасть из точки с координатой -1 в точку с координатой 9 ?

2) Верно ли, что кузнечик может попасть из любой точки с целой координатой в любую другую?

52. Стираем дроби. На доске написано равенство:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = 0.$$

1) Можно ли стереть некоторые дроби, а затем некоторые плюсы заменить на минусы так, чтобы равенство стало верным?

2) Можно ли, не стирая дробей, некоторые плюсы заменить на минусы так, чтобы после этого равенство стало верным?

53. Рыцарь или лжец? На острове живут два племени: «Рыцари» и «Лжецы» (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). В комнате собралось несколько жителей острова. Примерно половина из них утверждают, что число рыцарей, находящихся в комнате, нечетно и число лжецов также нечетно. Остальные доказывали, что число и тех, и других четно. Один из присутствующих, подводя итоги обсуждения, заметил, что всего в комнате 37 человек. Кто он, рыцарь или лжец?

54. От 1 до 1 000 000. Какова сумма всех цифр, используемых для записи всех натуральных чисел от 1 до 1 000 000?

55. Расставьте скобки в неверном равенстве $2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5$ так, чтобы оно стало верным.

56. Прямые и квадрат. На листе бумаги нарисован квадрат. Можно ли разрезать его по 4 прямым линиям на 2 треугольника и 8 четырехугольников? Если можно, приведите пример, если нет, объясните почему.

57. Грузовик. Известно, что грузовик можно заполнить ровно 109 способами упаковками в 3 кг и 5 кг помидоров так, чтобы их общий вес составил x кг. Чему равно x ?

58. В саду Деда Мороза вот уже более 1000 лет растет Волшебная елка. Известно, что каждое утро на ней вырастают 100 иголок и каждая иголка живет ровно 4 года, а затем отмирает. Сколько же всего иголок на Волшебной елке?

59. Мартышка и бананы. Мартышка собрала 100 бананов общим весом 10 кг. Помогите Мартышке накормить этими бананами Слоненка и Удава так, чтобы никто из них не обиделся: они могут обидеться, если один съест бананов хотя бы на 100 г больше другого. (Вес одного банана от 20 до 200 г, мартышка может узнать вес каждого банана.)

60. На доске написано число 19921993...20012002. Разобъем произвольным образом его десятичную запись на два числа и сложим их. С полученным числом проделаем аналогичную операцию и так далее, до тех пор пока не получится однозначное число. Какое число может получиться? Исследуйте все возможности.

61. Пример на сложение. На восьми карточках записаны цифры и знаки «плюс» и «равно»: 2, 3, 5, 6, 7, 8, +, =. Составьте верный пример на сложение, используя все указанные карточки.

62. Катер. Имея полный бак топлива, катер может проплыть 72 км против течения реки или 120 км по течению. На какое наибольшее расстояние по реке он может отплыть при условии, что топлива должно хватить и на обратный путь?

63. Четырнадцать ребят. 7 мальчиков и 7 девочек решили разделиться на две команды. Они встали в круг и начали считаться (по часовой стрелке). Каждый шестой выходил из круга, и счет начинался заново со следующего игрока. Так продолжалось до тех пор, пока 7 вышедших из круга игроков не образовали команду, причем оказалось, что она состоит из одних мальчиков. Изобразите схематически, как могли бы стоять мальчики и девочки (не забудьте указать, с кого начинался счет).

64. Ледяная пустыня. Путешественник хочет пересечь арктическую пустыню за 6 дней. Известно, что один человек способен взять с собой припасов на 4 дня. Он не сможет преодолеть весь путь в одиночку, но он может взять с собой носильщиков. Сколько человек он должен взять с собой и как организовать путешествие, чтобы благополучно пересечь пустыню и все носильщики вернулись домой?

65. Клетки марсианского организма «A-2003» расположены в виде замкнутых «цепочек» и могут находиться в двух состояниях – «сон» и «активность». «Активная» клетка раз в секунду передает сигнал, который за секунду доходит до двух соседних клеток. В следующую секунду клетка «активна», если к ней пришел сигнал от одной из соседних клеток. Если же сигнал пришел с двух сторон или не пришел вовсе, то клетка погружается в «сон». Известно, что организм «A-2003» живет до тех пор, пока хотя бы одна его клетка «активна». Сколько секунд живет организм, изображенный а) на рис. 7? б) на рис. 8? («Активные» клетки помечены знаком X).

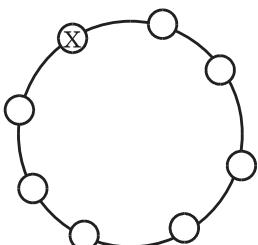


Рис. 7

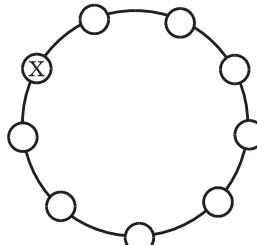


Рис. 8

66. Числа на ребрах куба.

а) Можно ли из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 вычеркнуть какое-нибудь одно число, а оставшиеся расставить на ребрах куба (рис. 9) так, чтобы сумма чисел на трех ребрах, примыкающих к каждой вершине куба, была одной и той же?

б) Может ли этим вычеркнутым числом быть число 13?

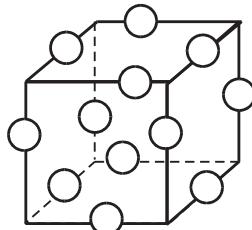


Рис. 9

67. Белоснежка и семь гномов. Требуется разделить 5 одинаковых яблок на восьмерых поровну. Хватит ли для этого 7 разрезов? (За один раз Белоснежка может отрезать от яблока любую его часть).

68. Пятачку на день рождения подарили несколько разноцветных шариков, причем красных шариков среди них было 45%. После того как Пятачок отдал один синий и один зеленый шарик Ослику Иа-Иа, красных шариков у Пятачка стало 50%. Сколько шариков подарили Пятачку на день рождения?

69. Четыре друга Андрей, Женя, Толя и Федя играли в теннис пара на пару. После каждой партии они разбивались на пары заново. Известно, что Женя выиграл 27 раз, Андрей – 14 раз, Толя – 7 раз, а Федя – меньше всех. Ответьте на вопросы:
а) Сколько партий выиграл Федя? б) Сколько партий он проиграл?

70. Экспертиза. Эксперту полиции принесли 13 одинаковых с виду монет, из которых 7 монет были настоящие, а остальные – фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, а каждая фальшивая – на 1 грамм легче или тяжелее настоящей. Имеются электронные чашечные весы, которые показывают разность масс грузов на чашах. Эксперт берет наугад одну монету. За какое наименьшее количество взвешиваний он сможет выяснить, фальшивая она или настоящая? (Взвешивать можно любые наборы монет).

71. Кладовая Морского Царя состоит из 36 треугольных комнат, соединенных дверями (рис. 10). Привел Морской Царь купца Садко в угловую комнату и сказал: «В каждой комнате моей кладовой лежит по одной жемчужине. Собирай жемчужины, но помни, что в любой из комнат ты сможешь побывать не более одного раза. Если же ты выйдешь из кладовой, то войти в нее уже не сумеешь». Какое наибольшее количество жемчужин может собрать Садко?

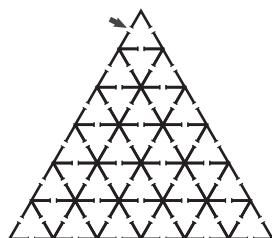


Рис. 10

72. Стоимость ножа. У двух братьев было стадо овец. Они продали его и за каждую овцу получили столько рублей, сколько голов было в стаде. Стали делить выручку: Петру – 10 рублей, Ивану – 10 рублей, Петру – 10 рублей, Ивану – 10 рублей и т. д. Наконец, Петр взял последнюю десятку, а Ивану нескольких рублей до десятки не хватило. Тогда Петр вынул из кармана нож и отдал брату в качестве компенсации за недостающую сумму денег. Сколько стоил нож?

Решения задач, комментарии и ответы

1. Так как выражение $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9$ содержит нечетное количество нечетных слагаемых, то результат должен быть нечетным, что противоречит условию.

2. Любые два утверждения в тетради противоречат друг другу, следовательно, только одно из них может быть верно. Верное утверждение: «В этой тетради ровно 99 неверных утверждений».

3. Пусть a – первоначальный вес Обломова, тогда его вес через год будет равен $a \cdot 0,75 \cdot 1,2 \cdot 0,9 \cdot 1,2 = 0,972a$, что меньше a . Таким образом, Обломов похудел.

4. Достаточно произвести два взвешивания:

1) 1 коп. + 2 коп. и 3 коп.; 2) 2 коп. + 3 коп. и 5 коп.

Если хотя бы в одном случае весы уравновесились, то фальшивой является монета, не участвовавшая во взвешивании, давшем равновесие. Предположим, что в результате первого взвешивания выяснилось, что монета в 3 коп. – легче. Тогда если после второго взвешивания монета в 5 коп. окажется тяжелее, то монета 3 коп. – фальшивая (она легче настоящих). Если же нет (5 коп. легче), то фальшивая двухкопеечная (она тяжелее). Если в результате первого взвешивания монета в 3 коп. оказалась тяжелее, а по результатам второго 5 коп. – тяжелее, значит, 2 коп. – фальшивая (легче), а если второе взвешивание дало обратный результат, то 3 коп. – фальшивая (тяжелее).

5. Так как $9a + b + 4c = 3(3a + 4b + 5c) - 11(b + c)$ и $3a + 4b + 5c$ делится на 11, то $9a + b + 4c$ делится на 11.

6. Предположим, что A – рыцарь, тогда его высказывание: «Мы все лжецы» – ложь, что невозможно. Следовательно, A – лжец и среди островитян есть хотя бы один рыцарь. Может ли B быть лжецом? Нет, так как в этом случае рыцарем будет C и высказывание лжеца B будет верно. Следовательно, B – рыцарь, а C – лжец.

7. Так как $S = 1 + 2 + \dots + 1993 = (1 + 2 + \dots + 1992) + 1993 = = (1 + 1992) + (2 + 1991) + \dots + \dots + (886 + 887) + 1993$, то S кратно 1993.

8. Пусть число коров на одной ферме a , а удой каждой коровы b . Тогда число коров на другой ферме $0,875a$, а удой каждой из них $1,08b$. На первой ферме получают молока ab кг, а на второй $0,945ab$ кг. Таким образом, на второй ферме получают молока меньше на 5,5%.

9. Пусть плитки расположены на доске, окрашенной в шахматном порядке, и пронумерованы числами от 1 до 1993. Заметим, что плитки с нечетными номерами должны находиться на полях одинакового цвета. Таким образом, плитки с номерами 1 и 1993 не могут быть соседними. Следовательно, из 1993 плиток нельзя выложить замкнутую цепочку.

10. Заметим, что $3^{100} = (3^4)^{25} = (81)^{25}$ и $7^{100} = (7^4)^{25} = (2401)^{25}$ оканчиваются на 1, а $8^{100} = (8^4)^{25} = (4096)^{25}$ – на 6.

Таким образом, $3^{100} + 7^{100}$ оканчивается на 2, а 8^{100} оканчивается на 6, и $3^{100} + 7^{100} \neq 8^{100}$.

11. Разделим монеты на три группы по четыре монеты в каждой. При первом взвешивании положим на каждую чашку весов по группе из четырех монет. Возможны два варианта:

1. Чашки весов уравновесились.

В этом случае монеты на весах – настоящие, а фальшивая находится в третьей группе. Пронумеруем монеты в третьей группе a_1, a_2, a_3, a_4 и при втором взвешивании сравним вес монет a_1, a_2, a_3 и любых трех настоящих монет. Если весы уравновесились (1а), то монета a_4 – фальшивая, и сравнивая ее с настоящей третьим взвешиванием, найдем, легче она или тяжелее. Если более тяжелой оказалась чашка с настоящими (подозрительными) монетами (1б и 1в), то фальшивая монета более легкая (соответственно, тяжелая). Тогда найдем фальшивую монету, взвесив монеты a_1 и a_2 .

2. Одна из чашек перевесила.

Обозначим монеты на перетянувшей чашке a_1, a_2, a_3, a_4 (если одна из них – фальшивая, то она тяжелее настоящих), а монеты на другой чашке – b_1, b_2, b_3, b_4 (если одна из них – фальшивая, то она легче настоящей). Остальные монеты – настоящие. При втором взвешивании поместим на одну чашку монеты a_1, a_2 и b_1 , а на вторую – a_3, a_4 и b_2 .

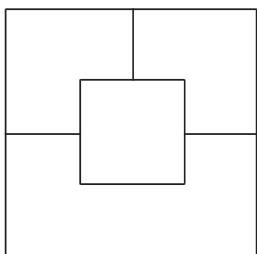
Чашки весов уравновесились (2а). Тогда фальшивая монета либо b_3 , либо b_4 (при этом она легче настоящих). Третьим взвешиванием находим из них более легкую.

Перетянула чашка с монетами a_1 , a_2 и b_1 (26), тогда монеты a_3 , a_4 и b_1 – настоящие, так как если бы среди них была фальшивая, то чашка с монетами a_1 , a_2 и b_1 была бы легче, что не так. Следовательно, фальшивыми могут быть монеты a_1 , a_2 и b_2 . Третьим взвешиванием сравниваем по весу монеты a_1 и a_2 (ищем более тяжелую).

Перетянула чашка с монетами a_3 , a_4 и b_2 (26). Третьим взвешиванием сравниваем по весу монеты a_3 и a_4 (ищем более тяжелую). Рассуждаем аналогично пункту 26.

12. Очевидно, что A – лжец (см. задачу 6). Если B говорит правду, то B и C – рыцари, а если лжет, то A и B – лжецы, а C – рыцарь. C – рыцарь, кто B – неизвестно.

13. Пусть a – делимое, b – делитель, c – частное, d – остаток. Тогда $a = bc + d$. Так как a – нечетно, а $bc + d$ – четно, то равенство невозможно.



Rис. 11

14. Можно (см. рис. 11):

15. По условию две девочки составляют не более 9% от числа участников кружка, так что 1% составляет не менее $\frac{2}{9}$ человек,

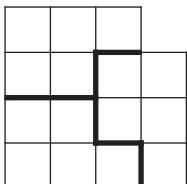
а $100\% - \frac{200}{9}$, то есть не менее 23 человек.

16. Приведем одно из решений: умножим 450 на 2 пять раз (получим 14 400), затем трижды отбросим последнюю цифру.

17. Было куплено 4 апельсина и 6 лимонов.

18. Пусть наименьшее среди наибольших – M находится в столбце m , а наибольшее среди наименьших – N находится в строке n ; K – число, находящееся на пересечении столбца m и строки n . Тогда $K > N$ и $M > K$, значит, $M > N$. Наименьшее среди наибольших больше, чем наибольшее среди наименьших.

19. Например см. рисунок 12.



Rис. 12

20. В 40 кг морской воды содержится $40 \cdot 0,05 = 2$ (кг) соли, что в новом растворе составляет 2%, следовательно, раствора должно быть $2 : 0,02 = 100$ (кг); нужно добавить 60 кг пресной воды.

21. $S = (1 + 23) + \dots + (11 + 13) + 12$ – число четное. Следовательно, $S - 21$ на две равных по весу кучки не разложить.

22. Среди делителей числа $100! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 100$ два делителя делятся на 7^2 и еще двенадцать – на 7. Следовательно, $100!$ на 7 без остатка можно разделить 16 раз.

23. Так как a и b имеют одинаковую четность, то $7a$ и $3b$ также имеют одинаковую четность, а значит, их сумма должна быть четной. Так как 627 нечетное, то задача решений не имеет.

24. В таблице x – «молодые» бактерии, то есть те, возраст которых меньше получаса, а y – «старые» бактерии. Тогда число бактерий S в данный момент времени будет:

t	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
x	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
y	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
S	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Заметим, что если принять за единицу времени полчаса и обозначить число бактерий к моменту времени n за u_n , то к моменту $n + 1$ число бактерий составит

$$u_{n+1} = u_{n-1} + u_{n-1} + u_n - u_{n-1} = u_{n-1} + u_n.$$

Так как в момент $t = n - 1$ рождается u_{n-1} «молодых» бактерий, каждая из которых породит в дальнейшем одну новую, а также имеется $u_n - u_{n-1}$ «старых» бактерий, каждая из которых порождает одну новую бактерию и умирает, то, учитывая, что $u_0 = 1$ и $u_1 = 1$, получим: $u_6 = 21$, $u_{12} = 377$.

25. См. рисунок 13.

26. Да.

Например: $123456789 + 864197532 = 987654321$

или $123456798 + 864197523 = 987654321$.

27. Пусть в записи числа $A = 100!$ после выполнения всех умножений справа получилось n нулей ($n = 24$, но для решения данной задачи это несущественно). Зачеркнуть n нулей в конце числа – означает разделить (сократить) число A на 10^n . Результат будет числом четным, так как в разложении числа A на простые множители 2 встречается чаще, чем 5.

28. Так как 2% числа A больше, чем 3% числа B , то 4% числа A больше, чем 6% числа B , кроме того, 1% числа A больше, чем 1% числа B . «Сложив» два последних утверждения, получим, что 5% числа A больше, чем 7% числа B .

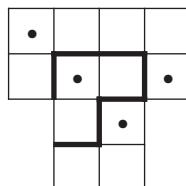


Рис. 13

29. Рассмотрим таблицу:

Время (минуты)	Количество вирусов	Количество бактерий
0	1	200
1	2	$2 \cdot 199$
2	2^2	$2^2 \cdot 198$
3	2^3	$2^3 \cdot 197$
...
t	2^t	$2^t(200 - t)$
...
200	2^{200}	$2^{200}(200 - 200) = 0$

Следовательно, при $t = 200$ количество бактерий обратится в нуль – колония погибнет.

Ответ: колония просуществует 200 минут.

30. Слова *гулять*, *видит*, *поймать* – встречаются в своих строчках по одному разу, поэтому им соответствуют слова «му», «бу» и «гу».

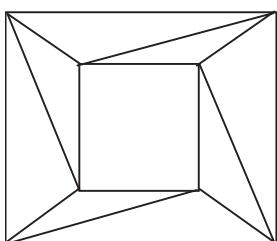
Так как слово *мыши* встречается во всех трех строках, то ему соответствует «ту».

Так как слово *ночью* встречается в первой и второй строках, то ему соответствует «ам».

Так как слово *пошла* встречается в первой и третьей строках, то ему соответствует «ям».

Так как слово *кошка* встречается во второй и третьей строках, то ему соответствует «ля».

Фрагмент словаря выглядит так: *гулять* – *му*, *видит* – *бу*, *поймать* – *гу*, *мыши* – *ту*, *ночью* – *ам*, *пошла* – *ям*, *кошка* – *ля*.



Rис. 14

31. Например см. рисунок 14.

32. Число рыб, пойманых вторым рыбаком, кратно 17, следовательно, оно может быть равно 17, 34, 51 или 68, число же рыб, пойманых первым, может равняться (соответственно) 53, 36, 19 или 2. Но число рыб, пойманых первым, должно быть кратно 9. Первый рыбак поймал 36 рыб, второй – 34.

33. Можно.

Этапы решения:		Вначале было →	19	9	7
1	От каждого из чисел будем вычитать 1 до тех пор, пока одно не будет равно 1		13	3	1
2	Удвоим все 1 и вновь вычтем из всех трех чисел 1		12	2	1
3	Повторим операцию 2		11	1	1
4	Удвоим обе 1 и затем, вычитая 1 из всех трех чисел за несколько шагов, получим:		1	1	1
5	Вычтем 1 из всех трех чисел		0	0	0

Заметим, что таким же способом можно решать более общую задачу: вместо чисел 19, 9 и 7 можно взять три произвольных натуральных числа a , b и c .

34. Заметим, что $116b = 19b + 97b$, откуда $116b = 19(a + b)$. Число 19 – простое, следовательно, $a + b$ делится на 116.

35. 1) За столом сидят хотя бы один лжец. Действительно, если бы за столом сидели только рыцари, то высказывание каждого из них – «Рядом со мной сидит рыцарь и лжец» – было бы ложным.

2) Соседями лжеца могут быть либо 2 лжеца, либо 2 рыцаря.

3) Если у лжеца оба соседа лжецы, то и дальше за столом сидят одни лжецы, иначе высказывание одного из лжецов: «Ря-

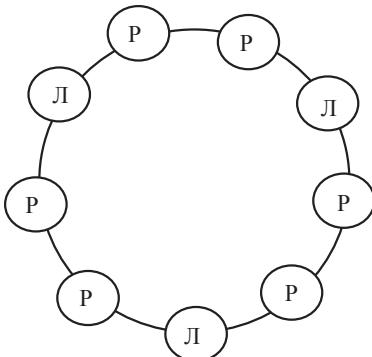


Рис. 15

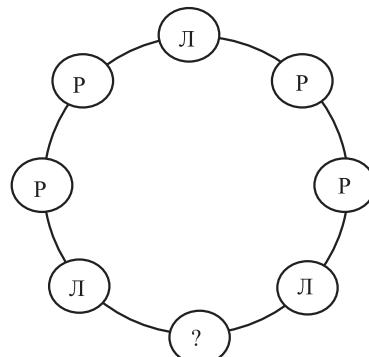


Рис. 16

дом со мной сидит рыцарь и лжец», будет правдой. Таким образом, один из возможных ответов – все лжецы.

4) Если оба соседа лжеца – рыцари, то за каждым рыцарем должен сидеть еще рыцарь, затем лжец, затем снова два рыцаря и так далее. Если за столом 9 человек, то лжецов – 3 (рис. 15), если 8 человек, то получим противоречие (рис. 16).

Примечание: Р – рыцарь, Л – лжец.

1. Если за столом 8 человек, то все лжецы. 2. Если за столом 9 человек, то лжецов либо 9, либо 3.

36. Вначале заметим, что 5 кг золота имеют тот же объем, что и 1 кг алмазов, но алмазы стоят дороже. Докажем, что Али-Баба может получить за сокровища 3000 динаров. Действительно, в мешок входит 40 кг алмазов. Если мы заменим 15 кг алмазов на 75 кг золота, то объем мешка останется прежним, а стоимость его будет равна 3000 динаров.

Докажем теперь, что 3000 динаров – это наибольшая сумма, которую можно выручить за сокровища. Если из мешка, содержащего 25 кг алмазов и 75 кг золота, убрать часть алмазов, то заменить их будет можно таким же количеством золота (по весу), но общая стоимость уменьшится, так как алмазы стоят дороже.

Если же убрать часть золота, то общая стоимость уменьшится, так как вес взятых вместо него алмазов будет в пять раз меньше (иначе – превышение по объему!). Например, если взять $5x$ кг золота и заменить их на x кг алмазов, то стоимость сокровищ уменьшится на $40x$ динаров.

37. Огонь доберется до любой из точек B , C , D , E , F за 4 минуты. Следовательно, последними сгорят отрезки BA и FA – за 5 минут (отрезки ED , DC , CB сгорят за 4,5 минуты, потому что будут гореть с двух концов).

38. Как справедливо заметил один из участников: «Антон не может сдать все бутылки, иначе не в чем будет нести молоко». Сдав шесть пол-литровых бутылок и одну литровую, Антон получит 1 рубль 10 копеек, что составит стоимость 5 литров молока. Купленные 5 литров молока он может отнести домой в оставшихся литровых. Убедимся, что больше 5 литров ему унести не удастся. Если он сдаст не одну литровую бутылку, а больше, то, для того чтобы набрать стоимость хотя бы 5 литров молока, ему потребуется сдать еще не менее 5 пол-литровых бутылок, а емкость оставшихся бутылок не будет превышать 4,5 литров (проверяется перебором).

39. Возможные варианты расстановок:

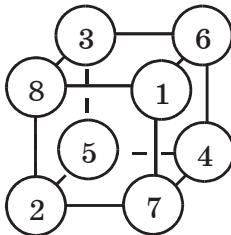


Рис. 17

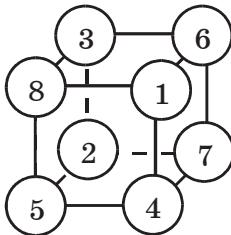


Рис. 18

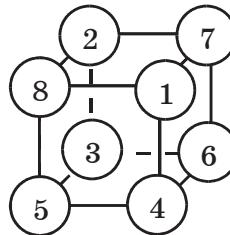


Рис. 19

Заметим, что от школьников не требовалось найти все решения (и доказать, что других решений нет).

40. Если $A = 333$; $B = C = 0$, то в пятой строке будут числа: $-999; 1998; -999$ (возможны и другие решения).

Из таблицы видно, что в любой строке, начиная с четвертой, должно стоять число кратное трем. Так как число 1997 на 3 не делится, то в пятой строке оно написано быть не может.

Числа Строки \	I	II	III
I	A	B	C
II	AB	BC	CA
III	$A2B + C$	$B2C + A$	$C2A + B$
IV	$3C3B$	$3A3C$	$3B3A$
V	$3(2CBA)$	$3(2ACB)$	$3(2BAC)$

41. Каждый участник турнира должен сыграть 29 партий, что составляет $30 \cdot 29$ партий. Но при такой системе подсчета каждая партия считается дважды (одну партию играют два человека). Таким образом, всего в турнире будет сыграно $30 \cdot 29 : 2 = 435$ партий, стало быть, разыгрывается 435 очков. Тот же результат можно было получить, нарисовав турнирную таблицу, из которой видно, что общее количество партий в турнире равно $29 + 28 + \dots + 2 + 1$.

Число участников, ставших разрядниками, не может превышать $435 : 17,5$, то есть 24 человек. Далее, если 24 участника все партии между собой закончат вничью, а остальные партии выиграют, то они наберут требуемые 17,5 очка.

42. *Первое решение:* Заметим, что $999x = 111\dots111$.

Запишем это равенство иначе: $1000x - x = 111\dots111$. Или $x = 1000x - 111\dots111$. Так как $1000x$ оканчивается на три нуля, то $x = \dots889$ (оканчивается на 889), а $1000x = \dots889000$.

Далее: $x = 1000x - 111\dots111 = \dots889000 - 111\dots111$. Следовательно, $x = \dots777889$, а $1000x = \dots777889000$. И так далее.

Второе решение: Число 111...111 делится на 9, следовательно, количество единиц в числе тоже делится на 9. Рассматриваем числа, которые состоят из 9, 18, 27 ... единиц. Числа 111111111 и 1111111111111111 на 999 не делятся, а число, состоящее из 27 единиц, делится (разделим столбиком!).

$$x = 111222333444555666777889.$$

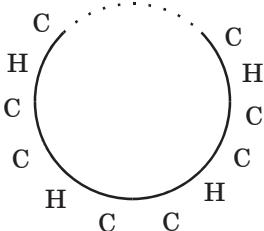
43. Так как площадь стенки не кратна 4, а площадь каждой плитки кратна 4, то покрыть стенку нельзя.

44. Наименьшее число 1999. Среди трехзначных чисел наибольшую сумму цифр имеет число 999, следовательно, наименьшее из четырехзначных должно превосходить эту сумму.

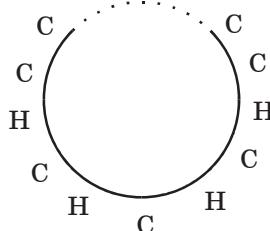
45. За то время, пока Львенок пробежит 200 метров, Черепаха отползет на 20 метров и окажется в 200 метрах от его начального положения. Следовательно, через 200 метров Львенок догонит Черепаху.

46. Любой «не Саша» может «испортить жизнь» максимум двум гостям. Поскольку всего четыре «не Саши», то максимально не исполнится 8 желаний (рис. 20). Следовательно, наименьшее количество исполнившихся желаний 22.

Рассмотрим тех же четырех человек. Теперь количество их соседей должно быть наименьшим, что достигается наличием максимального количества общих соседей. Докажем, что общих соседей не менее пяти. Возьмем одного «не Сашу» и его соседей: второй «не Саша» может иметь с ним лишь одного общего соседа, то есть у них – три «несчастливых» соседа; еще один «не Саша» добавляет к «несчастливым» не менее одного человека и т.д. Таким образом, максимальное количество исполнившихся желаний равно 25 (рис. 21).



Puc. 20



Puc. 21

47. Если предположить, что Боря сказал правду, тогда Антон – лжец, но поскольку Антон высказал верное утверждение, это не так. Следовательно, Боря – лжец.

Если предположить, что Антон – лжец, тогда и Боря, и Вася тоже лжецы, но в этом случае высказывание Бори истинно, чего не может быть.

Если предположить, что Антон сказал правду, тогда Вася тоже сказал правду, из чего делаем вывод, что Вася ответил: «Да».

48. Решение. Куски проволоки: ABN , BCM , CDL , DEK , ATF , TSG , SRH , RPK . Указанный способ решения не единственный.

Сумма длин проволок в точности равна длине всех линий сетки, значит, проволоки могут пересекаться только в вершинах сетки. Тогда в каждой из точек B , C , D , F , G , H , L , M , N , R , S , T должен располагаться конец хотя бы одного куска.

Точек 12, значит, и кусков должно быть не меньше шести (рис. 22).

49. Например, так (рис. 23): звездочка – крепость; кружком помечены перекрестья.

50. Последняя цифра произведения – 3, тогда возможны два случая (с точностью до перестановки множителей): $A = 1$, $C = 3$ или $A = 7$, $C = 9$. Первый случай недостижим, так как число получится меньше данного ($193 \times 391 < 80000$). Цифру B находим подбором.

$$739 \times 937 = 692443.$$

51. а) Да. Для этого достаточно сделать 10 маленьких прыжков вправо и 5 больших влево: $9 = -1 + 10 \cdot 7 - 12 \cdot 5$.

б) Да. Покажем, что кузнецик может попасть в соседнюю точку. Для того следует сделать 7 малых прыжков в одну сторону и 4 больших в противоположную: $7 \cdot 7 - 12 \cdot 4 = 1$. Затем, перемещаясь в нужном направлении на 1, кузнецик может попасть в любую точку с целой координатой.

52. а) Да. Например, так: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0$.

б) Нет. Домножим обе части на $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$. Получим слева сумму слагаемых: $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$; $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$;

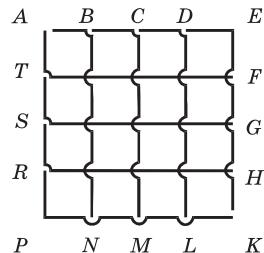


Рис. 22

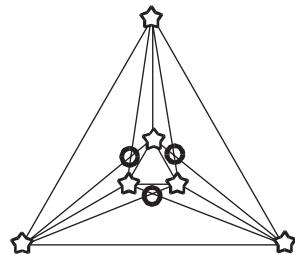


Рис. 23

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8; 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8; 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8; 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8;$
 $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, а справа 0. Таким образом, правая часть равенства будет кратна 5, а одно из слагаемых левой части, а значит, вся сумма – нет. Следовательно, равенство невозможно, и расставить знаки требуемым образом нельзя.

53. В комнате есть рыцари, так как об одном и том же факте высказаны несовместимые утверждения. Независимо от того, какая из групп – рыцари, общее количество людей четное. Таким образом, подводящий итоги – лжец.

54. Разобъем числа от 1 до 999998 на пары: (1; 999998), (2; 999997), ..., (142375; 857624) и т.д. Получится 499999 пар, сумма цифр в каждой из которых равна 54. Учитывая числа 999999 и 1000000, получаем *ответ*: $500000 \cdot 54 + 1 = 27000001$.

55. $(2 : 3) : (4 : 5 : 6) = 5$. Возможны и другие ответы.

56. Можно, см. рис. 24 и рис. 25.

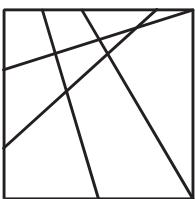


Рис. 24

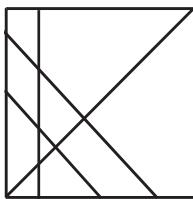


Рис. 25

57. $x = 1620 + 5a + 3b$ кг, где a может принимать значения 0, 1, 2, а b значения 0, 1, 2, 3, 4.

Заметим, что 3 упаковки по 5 кг весят столько же, что и 5 упаковок по 3 кг. То есть каждый способ заполнения можно характеризовать количеством наборов из 3 упаковок по 5 кг (или из 5 упаковок по 3 кг), содержащихся в x кг. Таким образом, $x = 15 \cdot 108 = 1620$ кг является одним из ответов задачи. Удовлетворяют условию задачи также все наборы вида $x = 1620 + 5a + 3b$, где $a = 0; 1; 2$, а $b = 0; 1; 2; 3; 4$ (независимо друг от друга).

58. 146100 иголок.

Заметим, что после того, как Волшебной елке исполнилось 4 года, количество иголок на ней не менялось. В четырех годах (включая високосный) 1461 день. Через 1461 дней выпадут все иголки, которые были сегодня на Волшебной елке, и только они. Каждый день выпадало по 100 иголок, значит, всего выпало $1461 \times 100 = 146100$ иголок.

59. Мартишка может поступить так: разложить бананы в кучки по два так, что разница в весе бананов в каждой паре меньше 100 г; в этом случае она сможет выполнить условие задачи, если будет давать Слоненку и Удаву по одному банану из каждой пары, при этом больший банан из пары давать тому, у кого в данный момент вес полученных бананов меньше.

Действительно: на первом шаге разница в весе меньше 100 г, а на каждом следующем разница в весе не будет больше 100 г.

Но всегда ли это возможно? Докажем, что да.

Будем называть бананы большими, если их вес больше 100 г., если же меньше или равен, то маленькими. Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть количество «больших» четно, то разница в весе между любыми двумя из них меньше 100 г, и их можно разложить на пары требуемым образом. Также можно поступить и с маленькими бананами.

2) Пусть количество «больших» нечетно:

а) если «маленький» банан всего один, то средний вес «больших» меньше или равен ($10 \text{ кг} - 20 \text{ г}$) : $99 < 101 \text{ г}$, тогда среди остальных «больших» найдется банан, вес которого не превышает 101 г, а значит, его можно объединить в пару с «маленьким», а остальные «большие» разложатся по парам;

б) если «маленьких» бананов ровно 3, то средний вес «больших» меньше или равен ($10 \text{ кг} - 60 \text{ г}$) : $97 < 103 \text{ г}$ и среди «больших» также найдется банан, вес которого не превышает 103 г, а значит, его можно объединить с одним из «маленьких» (т.к. вес «маленького» больше 20 г, то разница в весе будет меньше 100 г);

в) если «маленьких» бананов ровно 5, то средний вес «больших» меньше или равен ($10 \text{ кг} - 100 \text{ г}$) : $95 < 105 \text{ г}$ и среди «больших» также найдется банан, вес которого не превышает 105 г, а значит, его можно объединить с одним из «маленьких»;

г) если количество «маленьких» бананов 7 или больше, то среди них есть банан весом меньше 100 г. (если предположим противное, тогда получится, что все «маленькие» весят по 100 г, следовательно, все «большие» весят также по 100 г). Теперь выберем среди «маленьких» два или несколько так, чтобы их суммарный вес был больше 100 г, но меньше 200 г (не используя при этом вышеуказанный банан), и будем обращаться с ними как с одним «большим» бананом; тем самым последний «большой» банан получит пару. Если после этих операций число «маленьких» бананов – четно (0 – четное число), то разложим их на пары. Если число «маленьких» – нечетно, тогда отложим отмеченный банан, а остальные разложим на пары. Затем последний отмечен-

ный банан отдадим тому, кто съел меньше (даже если до этого момента они съели поровну бананов, то все равно итоговая разница будет меньше 100 г).

60. Пусть в результате разбиения числа \overline{ab} получены числа \overline{a} и \overline{b} . Это означает, что $\overline{ab} = \overline{a} \cdot 10\dots0 + \overline{b}$.

Докажем, что числа \overline{ab} и $\overline{a} + \overline{b}$ имеют одинаковые остатки при делении на 9.

Действительно: $\overline{ab} - (\overline{a} + \overline{b}) = \overline{a} \cdot 10\dots0 + \overline{b} - (\overline{a} + \overline{b}) = \overline{a} \cdot 99\dots99$.

Убедимся, что остаток x от деления числа $\overline{ab} = 19921993\dots2002$ на 9 равен 7. Действительно, x равен остатку от деления на 9 суммы чисел $1 + 9 + 9 + 2 + 1 + 9 + 9 + 3 + \dots + 2 + 0 + 0 + 2$ или, что все равно, суммы чисел $1 + 2 + 1 + 3 + \dots + 2 + 0 + 0 + 2 = 61$ (отличающегося от предыдущего отсутствием слагаемых кратных 9). Остаток от деления 61 на 9 равен 7.

61. 1) $27 + 38 = 65$; 2) $37 + 28 = 65$;

3) $26 + 57 = 83$; 4) $56 + 27 = 83$.

62. Возможно два понимания задачи:

1) Буквальное.

Заметим, что при движении против течения на 1 км пути тре-

буется потратить $\frac{1}{72}$ бака топлива, а на движение по течению –

$\frac{1}{120}$ бака. Пусть s км – максимальное расстояние, на которое удастся отплыть катеру, при условии, что топлива должно хватить и

на обратный путь. Тогда $\left(\frac{1}{120} + \frac{1}{72}\right) \cdot s = 1$, откуда $s = 45$ км.

2) Более хитрое.

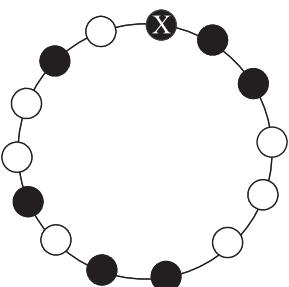
Можно, не включая мотора, отплыть по течению реки на 72 км, а затем вернуться с включенным мотором.

63. См. рисунок 26.

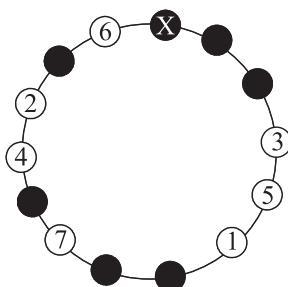
Комментарий: на рисунке 27 показан способ получения ответа. Здесь цифрами обозначен порядок выбывания мальчиков.

64. Достаточно взять с собой 2 носильщиков.

План путешествия: в первый день питание всех троих (путешественника и двух помощников A и B) – за счет запасов A ,



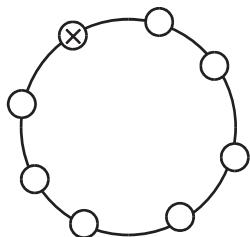
Ruc. 26



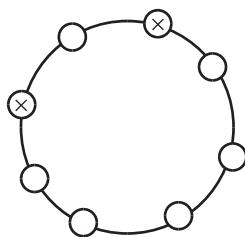
Ruc. 27

который возвращается домой, имея однодневный запас еды. Во второй день питание двоих оставшихся (путешественника и помощника *B*) – за счет запасов *B*, который возвращается домой, имея двухдневный запас еды. Далее путешественник, имея нетронутый четырехдневный запас еды, оставшийся путь может пройти в одиночку.

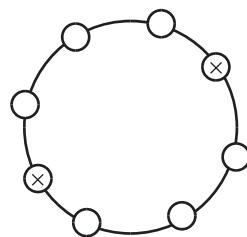
65. а) Организм живет 4 с. Эволюция его развития показана на рисунках 28–32.



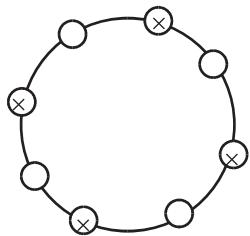
Ruc. 28



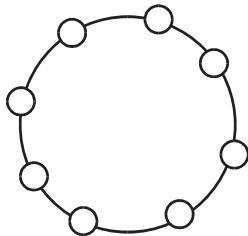
Ruc. 29



Ruc. 30



Ruc. 31



Ruc. 32

б) Во втором случае организм существует неограниченное время. Это можно увидеть, если составить цикл жизни организма (см. рис. 33–41).

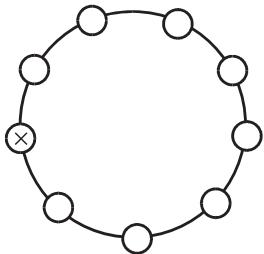


Рис. 33

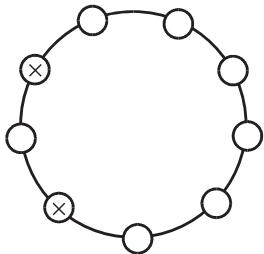


Рис. 34

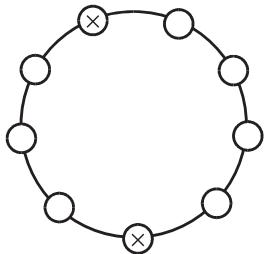


Рис. 35

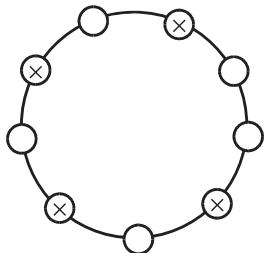


Рис. 36

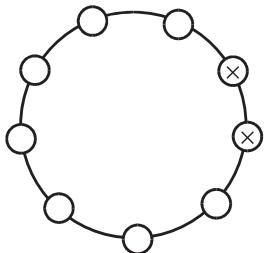


Рис. 37

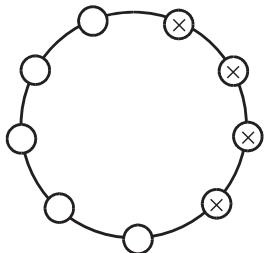


Рис. 38

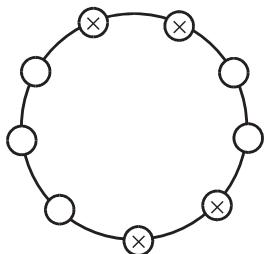


Рис. 39

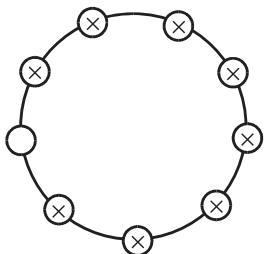


Рис. 40

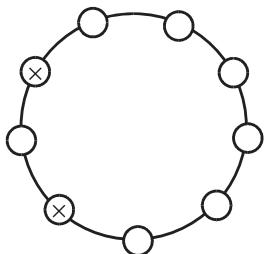


Рис. 41

66. а) Можно (см. рис. 42–44).

На рисунке 42 вычеркнуто число 3; на рисунке 43 вычеркнуто число 7; на рисунке 44 вычеркнуто число 11.

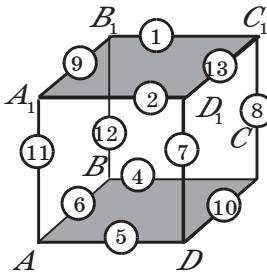


Рис. 42

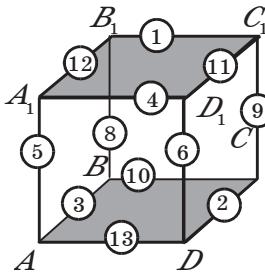


Рис. 43

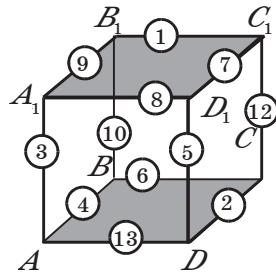


Рис. 44

б) Нельзя.

Предположим, что вычеркнутым числом будет число 13. Заметим, что сумма натуральных чисел от 1 до 12 равна 78, что невозможно, так как если суммы троек, примыкающих к вершинам, одинаковы, то удвоенная сумма чисел от 1 до 12 должна быть кратна 8, что неверно.

67. Да.

Отрежем от первого яблока $\frac{5}{8}$, что составит первую порцию, –

первый разрез; $\frac{3}{8}$ от первого яблока плюс $\frac{2}{8}$ от второго яблока

составит вторую порцию (второй разрез); затем возьмем $\frac{5}{8}$ от второго яблока (третий разрез) – третья порция, от второго яблока останется $\frac{1}{8}$, добавим $\frac{4}{8}$ (четвертый разрез) – четвертая порция и т.д. Легко убедиться, что 7 разрезов достаточно.

Комментарий: Мы мысленно кладем яблоки в ряд и представляем их как единое целое. Чтобы разделить целое на 8 частей, достаточно 7 разрезов.

Другое решение. Отрежем от каждого из пяти яблок по $\frac{5}{8}$ – пять разрезов, пять порций. Затем два из полученных «остатков» (по $\frac{3}{8}$ яблока) разделим на части по $\frac{1}{8}$ и $\frac{2}{8}$. Скомпонуем еще три порции: 1) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$; 2) $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$; 3) $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$;

Вероятно возможны и другие варианты дележа.

68. 20 шариков.

Заметим, что после того, как убрали синий и зеленый шарик, количество красных не изменилось и сравнялось с количеством остальных. Это означает, что количество шариков, оставшихся у Пятачка уменьшилось на 10% (если 45% – половина, то 90% – все!). Таким образом, 2 шарика составляют 10% от числа подаренных шариков, и всего ему подарили 20 шариков.

Другое решение. Пусть красных шаров x , тогда не красных $x + 2$, а всего подарили $2x + 2$. С помощью пропорции можно получить уравнение $100x = 45(2x + 2)$ или какое-нибудь другое, откуда $x = 9$, а всего шаров – 20.

69. Федя а) выиграл 6 партий; б) проиграл 21 партию.

Заметим, что количество партий равно удвоенному количеству побед всех 4-х друзей (в каждой партии побеждали двое). Следовательно, можно утверждать, что партий было не меньше 27 (столько раз выиграл Женя), а общее число побед – не меньше 54.

Но общее количество побед Жени, Андрея и Толи – 48, значит, 6 побед не хватает, то есть Федя выиграл не меньше 6 партий. Но так как он выиграл партий меньше всех, то он выиграл ровно 6 партий.

Таким образом, всего побед было $48 + 6 = 54$, а партий сыграно 27. Так как Федя 6 партий выиграл, то 21 партию он проиграл.

70. За одно взвешивание.

Положим на весы все оставшиеся монеты (по 6 на каждую чашку весов). Если выбранная монета настоящая, то среди оставшихся будет четное число фальшивых монет, а следовательно, разность, показанная стрелкой, будет равна четному числу. Если она фальшивая, то среди оставшихся монет будет нечетное число фальшивых, а разность будет равна нечетному числу.

71. $36 - 6 + 1 = 31$ жемчужина.

«Покрасим» комнаты так, как показано на рисунке 45. При этом «покрашенных» комнат окажется на 6 больше, чем «непокрашенных», а в любом маршруте цвета должны чередоваться, поэтому «покрашенных» комнат на пути может быть больше на один (но никак ни на два).

Далее приводится маршрут.

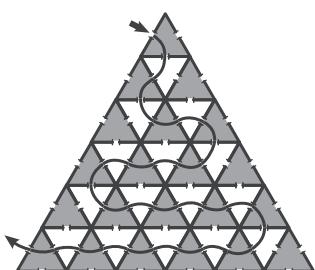


Рис. 45

72. 2 рубля.

Заметим, что, поскольку последнюю десятку получил Петр, число десяток в выручке было нечетным. В каком случае это получается? Анализ процедуры умножения столбиком показывает, что на четность предпоследней цифры квадрата натурального числа влияет только последняя цифра этого квадрата. Перебором можно убедиться, что имеется только две «подходящие» цифры: 4 и 6, так как $4^2 = 16$ и $6^2 = 36$, а, например, цифра 5 не подходит, так как $5^2 = 25$. В том и другом случаях последняя цифра суммы выручки 6, а до 10 здесь не хватает 4. Значит, при дележе выручки Ивану не хватило 4 рублей до полной десятки, то есть стоимость ножа – 2 рубля. Ведь получается, что братья поделили выручку пополам, но Петр лишился ножа.

УДК 372.851
ББК 74.262.21
Ч89

Общая редакция серии «Математика» *В.Т. Лисичкин*

Ч89 **Чулков П.**
Тринадцать турниров Архимеда / П. Чулков. – М. : Чистые пруды, 2005. – 32 с. (Библиотека «Первого сентября», серия «Математика».)
ISBN 5-9667-0074-5

Турнир Архимеда — математическая олимпиада, которая проводится с 1992 года группой учителей и преподавателей вузов Москвы.

В брошюре приведены 72 задачи, которые предлагались на Турнирах Архимеда. Все задачи приводятся с решениями или с указаниями к решению.

УДК 372.851
ББК 74.262.21

Учебное издание

ЧУЛКОВ Павел

ТРИНАДЦАТЬ ТУРНИРОВ АРХИМЕДА

Редактор Г.П. Хозяинова

Корректор Л.А. Громова

Компьютерная верстка С.В. Сухарев

Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-19078 от 08.12.2004 г.

Подписано в печать 30.06.2005.

Формат 60×90^{1/16}. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Печ. л. 2,0.

Тираж экз. Заказ №

ООО «Чистые пруды», ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165

<http://www.1september.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в Раменской типографии

Сафоновский пр., д. 1, г. Раменское, МО, 140100

Тел. 377-0783. E-mail: ramtip@mail.ru

ISBN 5-9667-0074-5

© ООО «Чистые пруды», 2005