Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Решите уравнение $x\left(x^2+2x+1\right)=2(x+1)$.

Решение.
Преобразуем уравнение:

$$x(x+1)^2=2(x+1);\ (x+1)\big(x(x+1)-2\big)=0;\ (x+1)\left(x^2+x-2\right)=0,$$

откуда $x=-1$, $x=-2$ или $x=1$.
Ответ: -2; -1; 1.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

22 Два велосипедиста одновременно отправляются в 140-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 6 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым.

Решение.
Пусть скорость второго велосипедиста равна v км/ч, тогда скорость первого велосипедиста равна $v+6$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{140}{v}=\frac{140}{v+6}+3;\ 140v+840=140v+3v^2+18v;\ v^2+6v-280=0,$$

откуда $v=14$. Значит, скорость первого велосипедиста равна 20 км/ч.
Ответ: 20 км/ч.

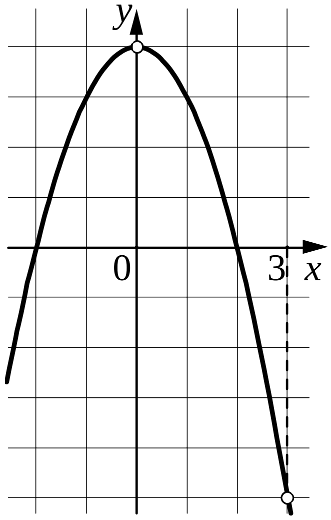
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	*Максимальный балл*

23 Постройте график функции $y=4-\dfrac{x^4-3x^3}{x^2-3x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Преобразуем выражение: $4-\dfrac{x^4-3x^3}{x^2-3x}=4-x^2$ при условии, что $x\neq 3$ и $x\neq 0$.

Построим график:



Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m<-5$ и при $-5<m<4$.

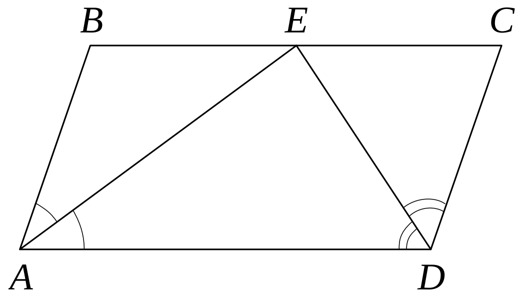
Ответ: $(-\infty;-5)$; $(-5;4)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	*Максимальный балл*

Модуль «Геометрия»

24 Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите AB, если $BC = 32$.

<u>*Решение*</u>.
Пусть E — точка пересечения биссектрис углов A и D параллелограмма $ABCD$ (см. рис.).

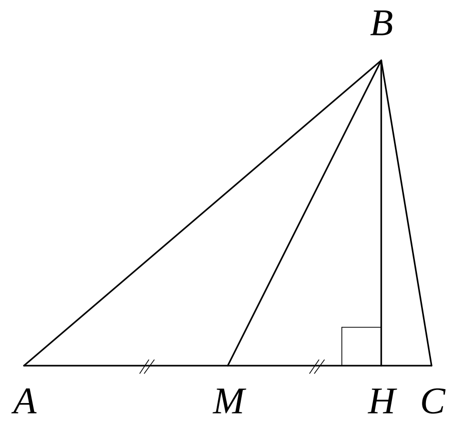


Углы AEB и EAD равны как накрест лежащие, AE — биссектриса угла BAD, следовательно, углы AEB и BAE равны и треугольник ABE равнобедренный. Значит, $AB = BE$.
Аналогично получаем, что $EC = CD$, а поскольку $AB = CD$, сторона AB равна половине стороны BC, то есть 16.
Ответ: 16.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

25 Докажите, что медиана треугольника делит его на два треугольника, площади которых равны между собой.

Доказательство.

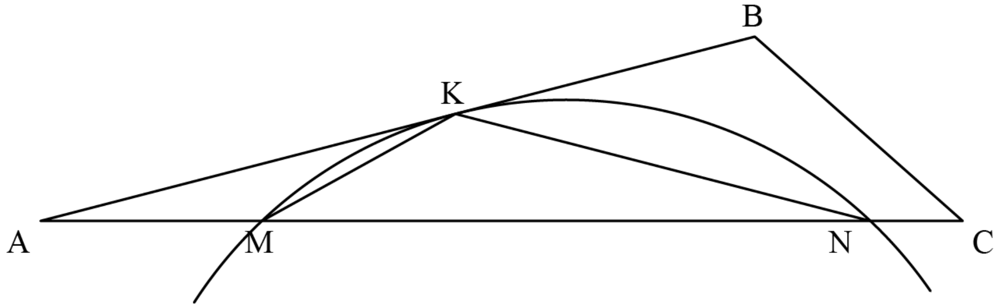


Пусть BM — медиана, а BH — высота треугольника ABC, $AM = MC = a$. Тогда площадь каждой части равна $\frac{1}{2} \cdot a \cdot BH$, то есть эти части равновелики.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	*Максимальный балл*

26 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$.

Решение.
Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN = 16 \cdot 39 = 624$.



По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos\angle BAC = 256 + 624 - 2 \cdot 16 \cdot \sqrt{624} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = 256.$$

Значит, $KM = 16$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.
По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.
Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{16}{2\sqrt{1-\frac{39}{64}}} = 12{,}8.$$

Ответ: 12,8.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	*Максимальный балл*

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Решите уравнение $(x-1)\left(x^2+8x+16\right)=6(x+4)$.

Решение.
Преобразуем уравнение:
$(x-1)(x+4)^2=6(x+4)$; $(x+4)((x-1)(x+4)-6)=0$; $(x+4)\left(x^2+3x-10\right)=0$,
откуда $x=-4$, $x=-5$ или $x=2$.
Ответ: -5; -4; 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

22 Свежие фрукты содержат 79% воды, а высушенные — 16%. Сколько сухих фруктов получится из 288 кг свежих фруктов?

Решение.
Заметим, что сухая часть свежих фруктов составляет 21%, а высушенных 84 %. Значит, из 288 кг свежих фруктов получится $\frac{21}{84}\cdot 288=72$ кг высушенных.
Ответ: 72 кг.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	*Максимальный балл*

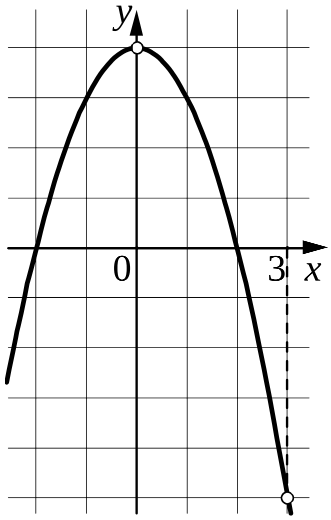
23

Постройте график функции $y = 4 - \dfrac{x^4 - 3x^3}{x^2 - 3x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Преобразуем выражение: $4 - \dfrac{x^4 - 3x^3}{x^2 - 3x} = 4 - x^2$ при условии, что $x \neq 3$ и $x \neq 0$.

Построим график:



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m < -5$ и при $-5 < m < 4$.

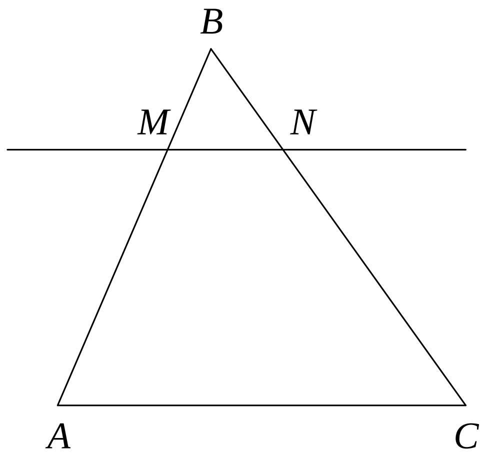
Ответ: $(-\infty; -5)$; $(-5; 4)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	*Максимальный балл*

Модуль «Геометрия»

24 Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN = 17$, $AC = 51$, $NC = 32$.

Решение.



Поскольку прямая MN параллельна прямой AC, углы BNM и BCA равны как соответственные. Следовательно, треугольники ABC и MBN подобны по двум углам.

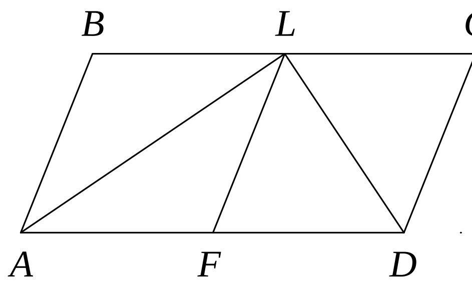
Значит, $\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} = \frac{51}{17} = 3$, а поскольку $\frac{BC}{BN} = \frac{BN + NC}{BN} = 1 + \frac{32}{BN}$, получаем, что $BN = \frac{32}{2} = 16$.

Ответ: 16.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

25 Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD. Точка L — середина стороны BC. Докажите, что DL — биссектриса угла CDA.

Доказательство.

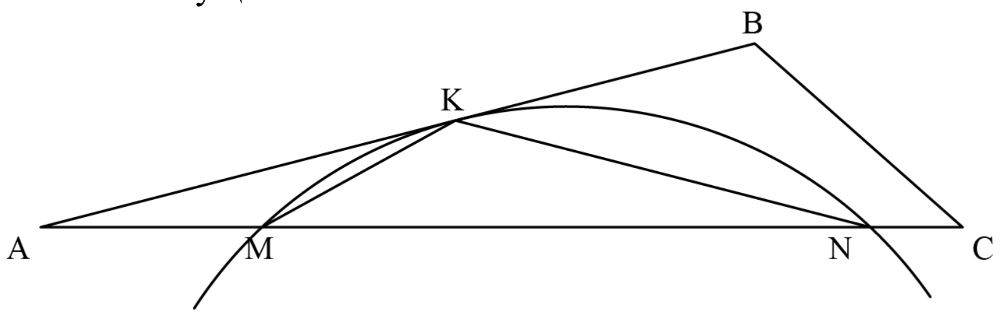


Проведём LF параллельно CD (см. рис.). Тогда $BL = LC = CD$. Следовательно, параллелограмм $CDFL$ является ромбом. Диагональ DL ромба $CDFL$ является биссектрисой угла CDA.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	*Максимальный балл*

26 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 11 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

Решение.
Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN = 9 \cdot 11 = 99$.



По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK\cos\angle BAC = 81 + 99 - 2\cdot 9\cdot\sqrt{99}\cdot\frac{\sqrt{11}}{6} = 81.$$

Значит, $KM = 9$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.
По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.
Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{9}{2\sqrt{1-\frac{11}{36}}} = 5{,}4.$$

Ответ: 5,4.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	*Максимальный балл*

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Решите уравнение $x\left(x^2+6x+9\right)=4(x+3)$.

<u>*Решение*</u>.
Преобразуем уравнение:
$$x(x+3)^2=4(x+3);\ (x+3)\big(x(x+3)-4\big)=0;\ (x+3)\left(x^2+3x-4\right)=0,$$
откуда $x=-3$, $x=-4$ или $x=1$.
Ответ: -4; -3; 1.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

22 Расстояние между пристанями A и B равно 132 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошёл 60 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

<u>*Решение*</u>.
Плот прошёл 60 км, значит, он плыл 12 часов, из которых лодка находилась в пути 11 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна v км/ч, тогда
$$\frac{132}{v+5}+\frac{132}{v-5}=11;\ 132v-660+132v+660=11v^2-275;\ v^2-24v-25=0,$$
откуда $v=25$.
Ответ: 25 км/ч.

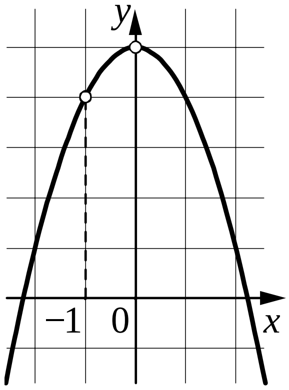
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	*Максимальный балл*

23 Постройте график функции $y = 5 - \dfrac{x^4 + x^3}{x^2 + x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Преобразуем выражение: $5 - \dfrac{x^4 + x^3}{x^2 + x} = 5 - x^2$ при условии, что $x \neq -1$ и $x \neq 0$.

Построим график:



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m < 4$ и при $4 < m < 5$.

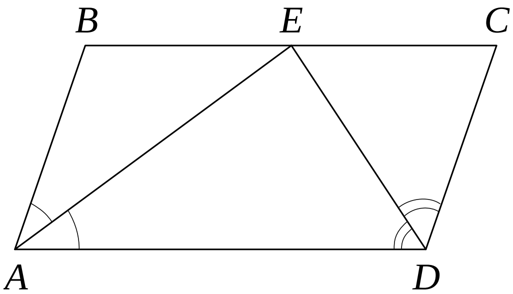
Ответ: $(-\infty; 4)$; $(4; 5)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	*Максимальный балл*

Модуль «Геометрия»

24 Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите AB, если $BC = 44$.

Решение.
Пусть E — точка пересечения биссектрис углов A и D параллелограмма $ABCD$ (см. рис.).

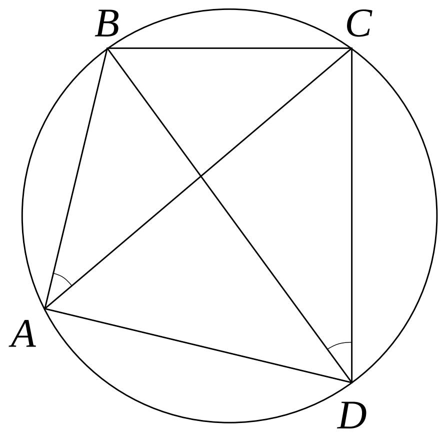


Углы AEB и EAD равны как накрест лежащие, AE — биссектриса угла BAD, следовательно, углы AEB и BAE равны и треугольник ABE равнобедренный. Значит, $AB = BE$.
Аналогично получаем, что $EC = CD$, а поскольку $AB = CD$, сторона AB равна половине стороны BC, то есть 22.
Ответ: 22.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	_Максимальный балл_

25 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы CDB и CAB равны. Докажите, что углы BCA и BDA также равны.

Доказательство.

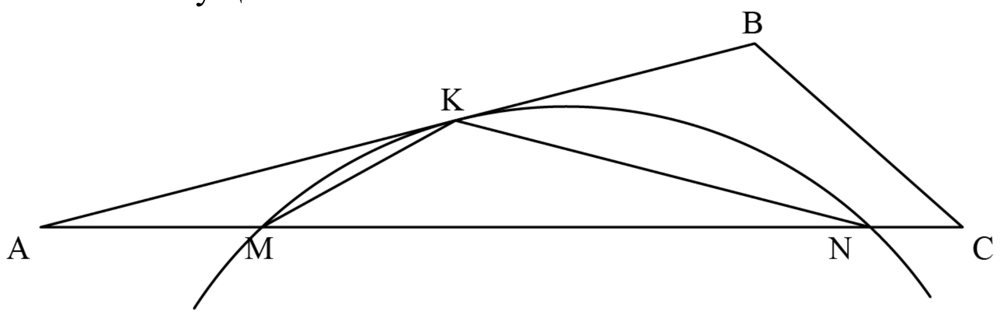


Поскольку $ABCD$ выпуклый и $\angle CDB = \angle CAB$, получаем, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. А тогда $\angle BCA = \angle BDA$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AB.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	*Максимальный балл*

26 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 12 и 45 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Решение.
Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN = 12 \cdot 45 = 540$.



По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK\cos\angle BAC = 144 + 540 - 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{540} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 144.$$

Значит, $KM = 12$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.
По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.
Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{12}{2\sqrt{1-\frac{15}{16}}} = 24.$$

Ответ: 24.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	*Максимальный балл*

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

Модуль «Алгебра»

21 Решите уравнение $(x-1)\left(x^2+6x+9\right)=5(x+3)$.

Решение.
Преобразуем уравнение:
$(x-1)(x+3)^2=5(x+3)$; $(x+3)\left((x-1)(x+3)-5\right)=0$; $(x+3)\left(x^2+2x-8\right)=0$,
откуда $x=-3$, $x=-4$ или $x=2$.
Ответ: -4; -3; 2.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Преобразования выполнены верно, получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

22 Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 72 км/ч, проезжает мимо столба за 25 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Решение.
Заметим, что 1 м/с равен 3,6 км/ч. Значит, длина поезда в метрах равна

$$\frac{72\cdot 25}{3,6}=500.$$

Ответ: 500 м.

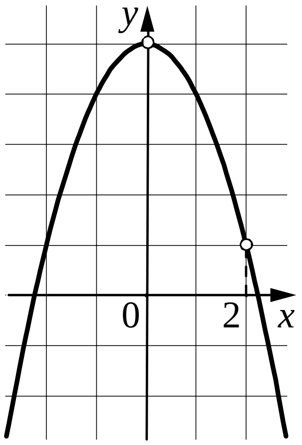
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
2	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	*Максимальный балл*

23 Постройте график функции $y=5-\dfrac{x^4-2x^3}{x^2-2x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

<u>*Решение*</u>.

Преобразуем выражение: $5-\dfrac{x^4-2x^3}{x^2-2x}=5-x^2$ при условии, что $x\neq 2$ и $x\neq 0$.

Построим график:



Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m<1$ и при $1<m<5$.

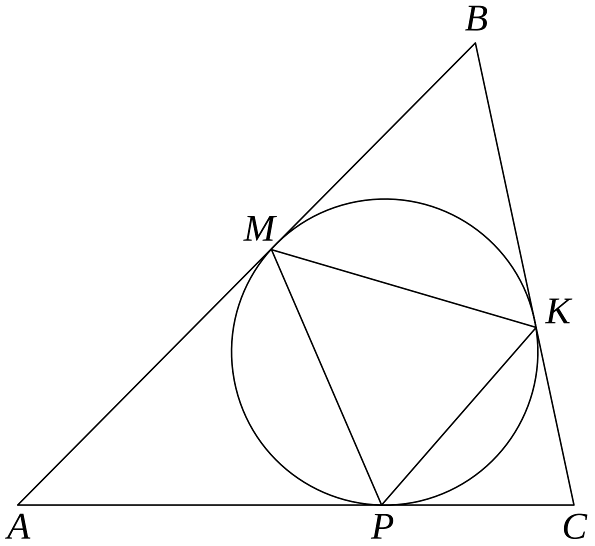
Ответ: $(-\infty;1)$; $(1;5)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
3	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	*Максимальный балл*

Модуль «Геометрия»

24 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны $50°$, $59°$ и $71°$.

Решение.



Пусть

$$\angle BAC = \alpha,\ \angle ABC = \beta,\ \angle ACB = \gamma;$$
$$\angle PKM = 50°,\ \angle MPK = 59°,\ \angle KMP = 71°.$$

По свойству касательных $AM = AP$, $BM = BK$, $CP = CK$. Значит, треугольники AMP, BMK и CPK равнобедренные, откуда получаем:

$$\angle AMP = \angle APM = 90° - \frac{\alpha}{2},\ \angle BMK = \angle BKM = 90° - \frac{\beta}{2},$$

$$\angle CPK = \angle CKP = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Значит, $\angle PKM = 180° - \angle CKP - \angle BKM = \frac{\gamma + \beta}{2} = 50°$. Аналогично получаем, что $\angle MPK = \frac{\alpha + \gamma}{2} = 59°$ и $\angle KMP = \frac{\alpha + \beta}{2} = 71°$.

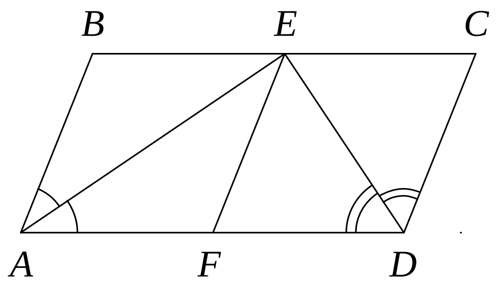
Решая систему относительно α, β и γ, получаем, что углы треугольника ABC равны $80°$, $62°$, $38°$.

Ответ: $80°$; $62°$; $38°$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	_Максимальный балл_

25 Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке E стороны BC. Докажите, что E — середина BC.

Доказательство.

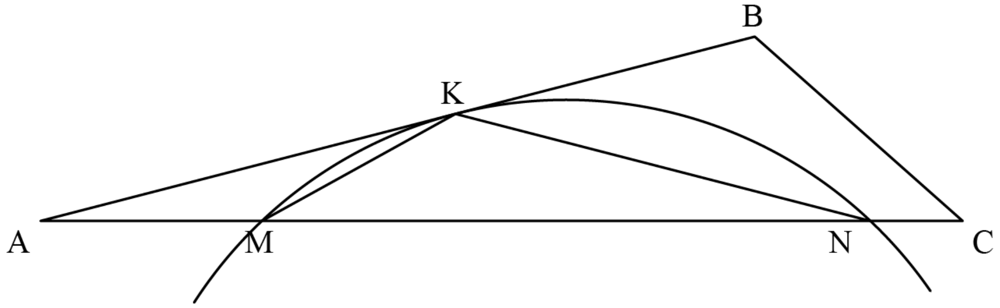


Проведём EF параллельно AB (см. рис.). Тогда в каждом из параллелограммов $ABEF$ и $FECD$ диагональ является биссектрисой, то есть это ромбы. Значит, $BE = EF = EC$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
3	Доказательство верное, все шаги обоснованы
2	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
3	*Максимальный балл*

26 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 24 и 42 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Решение.
Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN = 24 \cdot 42 = 1008$.



По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK\cos\angle BAC = 576 + 1008 - 2\cdot 24\cdot\sqrt{1008}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = 576.$$

Значит, $KM = 24$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.
Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{24}{2\sqrt{1-\frac{7}{16}}} = 16.$$

Ответ: 16.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
4	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
3	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
4	*Максимальный балл*